MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

Paul Gordan, Carl Neumann, Max Noether,
Karl VonderMühll, Heinrich Weber

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen

Walther Dyck
in München

Adolph Mayer
in Leipzig.

42. Band.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1893.

Inhalt des zweiundvierzigsten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

Ueber Realitätsverhältnisse bei der einem beliebigen Geschlechte zugehörigen Normalcurve der φ.

Von

Felix Klein in Göttingen.

Man kann die Wechselbeziehung zwischen algebraischen Curven und Riemann'schen Flächen unter einem doppelten Gesichtspunkte auffassen. Das Gewöhnliche ist, dass man die Flächen nur subsidiär benutzt, um den im complexen Gebiete vorhandenen „Zusammenhang" des Gebildes, die aus ihm hervorgehende Periodicität der zugehörigen Integrale, etc. besser verstehen zu können; als Definition der Curve bleibt dann in herkömmlicher Weise die algebraische Gleichung oder eine mit ihr äquivalente „geometrische" Constructionsvorschrift bestehen. Dementgegen betrachtet die andere Auffassungsweise die Riemann'sche Fläche als das zunächst Gegebene und lässt aus ihr erst die verschiedenen „zugehörigen" Curven entstehen, mag man die Fläche nun mehrblättrig über der Ebene ausgebreitet, oder frei im Raume gelegen oder irgendwie als „Fundamentalbereich" gegeben denken. Indem der *Riemann'sche Existenzsatz* z. B. bei der über der Ebene ausgebreiteten mehrblättrigen Fläche in Geltung bleibt, wie immer man auch die Verzweigungspunkte der Fläche gegen einander verschieben mag, hat man bei diesem zweiten Ansatze die Willkür, welche in den *Moduln* des Gebildes liegt, ganz anders in der Hand, als bei dem üblichen Ausgangspunkte, und kann darum die auf sie bezüglichen Probleme viel eingehender behandeln als sonst. Ich bezeichne hiermit diejenige Untersuchungsrichtung, zu der ich mit meiner *Schrift über Riemann* 1881 den Anstoss habe geben wollen*). Indem ich im dritten Abschnitte daselbst den Begriff der „symmetrischen Riemann'schen Fläche" entwickelte und bald darauf durch Hrn. Weichold die Periodicitätseigenschaften der zugehörigen Normalintegrale erster Gattung

*) Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale. — Eine Ergänzung der gewöhnlichen Darstellungen. — Leipzig, Teubner, 1882.

untersuchen liess*), glaubte ich insbesondere für die *Discussion der bei den algebraischen Curven stattfindenden allgemeinen Realitätsverhältnisse* neue Grundlagen gewonnen zu haben. Inzwischen hat noch Niemand, so viel ich weiss, die hier gegebene Fragestellung seither aufgegriffen, und ich nehme also an, dass es nicht unnützlich ist, wenn ich nachstehend auf die Sache zurückkomme und die bezüglichen Resultate mittheile, welche ich in einer Vorlesung des letzten Sommersemesters in ausführlicher Form entwickelt habe. Es wird kaum der Rechtfertigung bedürfen, wenn ich dabei unter allen „Curven", die aus einer Riemann'schen Fläche erwachsen, insbesondere die Normalcurve der φ herausgreife. Ich erreiche dadurch insbesondere den Vortheil, dass sich meine neuen Entwickelungen unmittelbar an diejenigen anreihen, welche ich in Bd. 10 und 11 dieser Annalen 1876 über ebene Curven vierter Ordnung gegeben habe. Alle die Continuitätsmethoden und die ganze Art des Ansatzes, welche ich damals für den besonderen Fall $p = 3$ entwickelt habe, erscheinen hier auf den Fall eines beliebigen Geschlechtes übertragen. Und die Möglichkeit dieser Uebertragung ruht, — um noch einmal auszusprechen, was mir an diesen Dingen das Wesentlichste ist —, durchaus darauf, dass jetzt mit den Riemann'schen Flächen als solchen begonnen wird. Ich hatte 1876 den Ausgangspunkt unmittelbar von den Curven genommen. Das war bei $p = 3$ möglich, wo ich zahlreiche geometrische Vorarbeiten, insbesondere diejenigen des Hrn. Zeuthen in Bd. 7 der mathematischen Annalen**), benutzen konnte. Aber eben dieses Augangspunktes halber wollte mir damals die Uebertragung auf beliebige p nicht gelingen, so einfach die Theoreme sind, um die es sich schliesslich handelt.

§ 1.

Von den verschiedenen Arten der symmetrischen Riemann'schen Flächen, insbesondere im Falle der hyperelliptischen Gebilde.

Reelle algebraische Curven ergeben *symmetrische* Riemann'sche Flächen und können umgekehrt allgemein gültig von letzteren aus definirt werden, das ist der hier fundamentale Satz, den ich auf p. 72 ff. meiner Schrift entwickelte. Ich bezeichne dabei eine Riemann'sche Fläche als symmetrisch, wenn sie durch eine conforme Abbildung zweiter Art von der Periode 2 in sich übergeführt wird (i. e. durch eine conforme Abbildung, welche die Winkel umlegt).

---

*) Ueber symmetrische Riemann'sche Flächen und die Periodicitätsmoduln der zugehörigen Abel'schen Normalintegrale erster Gattung (Leipziger Dissertation 1883, abgedruckt in Bd. 28 von Schlömilch's Zeitschrift).

**) Sur les différentes formes des courbes planes du quatrième ordre.

Die symmetrischen Riemann'schen Flächen eines gegebenen p zerfallen, wie ich ebendort angab und Hr. Weichold l. c. eingehender ausgeführt hat, nach der Zahl und Art ihrer „Symmetrielinien" in $\left[\frac{3p+4}{2}\right]$ Arten. Wir haben erstlich $\left[\frac{p+2}{2}\right]$ Arten *orthosymmetrischer* Flächen bez. mit $p+1$, $p-1$, $p-3, \ldots$ Symmetrielinien; das sind solche symmetrische Flächen, welche, längs ihrer Symmetrielinien zerschnitten, in zwei (zu einander symmetrische) Hälften zerfallen; — das einfachste (zu $p=0$ gehörige) Beispiel ist eine Kugel, welche durch „orthogonale" Projection auf sich selbst bezogen ist. — Wir haben ferner $(p+1)$ Arten *diasymmetrischer* Flächen bez. mit $p, p-1, \ldots, 1, 0$ Symmetrielinien; das sind Flächen, die längs ihrer Symmetrielinien zerschnitten gleichwohl noch ein zusammenhängendes Ganzes vorstellen; — man vergleiche, bei $p=0$, die durch eine „diametrale" Projection auf sich selbst bezogene Kugel. — Dabei bilden die Flächen derselben Art jedesmal ein zusammenhängendes Continuum: es ist möglich von jeder Fläche einer Art zu jeder anderen Fläche derselben Art continuirlich überzugehen, ohne aus der Art herauszutreten. *Hierin liegt, dass es genügt, die hernach in Betracht kommenden Realitätsverhältnisse immer nur bei einem beliebig gewählten Repräsentanten der einzelnen „Art" zu untersuchen; die Resultate gelten dann ohne weiteres für alle Flächen derselben Art.* Dabei kann die Reihenfolge, in der man die Symmetrielinien der einen Fläche den Symmetrielinien der anderen Fläche zuweist, beliebig gewählt werden. Wir drücken dies aus, indem wir die verschiedenen Symmetrielinien als *gleichberechtigt* bezeichnen.

Als besonders einfache Repräsentanten kommen hier die *hyperelliptischen* Flächen in Betracht*). Aber dieselben repräsentiren nicht die sämmtlichen vorgenannten Arten und es hat mit ihnen überhaupt eine besondere Bewandtniss. Eine symmetrische hyperelliptische Fläche wird in der Art zweiblättrig über der z-Ebene ausgebreitet werden können, dass zu ihr eine Gleichung gehört:

$$(1) \qquad s = \sqrt{f_{2p+2}(z)},$$

in welcher f_{2p+2} ein Polynom $(2p+2)^{\text{ten}}$ Grades von z *mit reellen Coefficienten* ist. Nun beachte man, dass die Fläche durch die conforme Abbildung „erster Art":

$$S: \qquad s' = -s, \quad z' = z$$

in sich übergeht. In Folge dessen geht sie immer gleich durch zwei Abbildungen zweiter Art in sich über, die ich Σ_1 und Σ_2 nenne**):

*) Wie ich dies für $p=3$ bereits in Bd. 11 benutzte, entgegen der sonst verbreiteten Auffassung, welche die hyperelliptischen Fälle wesentlich als Ausnahmefälle angesehen wissen wollte.

**) In den Formeln bedeuten $\bar{s}$ und $\bar{z}$ bez. die conjugirten Werthe von s und z.

$$\Sigma_1: \qquad s' = \bar{s}, \quad z' = \bar{z},$$
$$\Sigma_2: \qquad s' = -\bar{s}, \quad z' = \bar{z},$$

ist also immer in zweifachem Sinne symmetrisch. *Bei Σ_1 bilden diejenigen Curven der Fläche die Symmetrielinien, welche gleichzeitig reelles z und reelles s besitzen, bei Σ_2 diejenigen Curven, deren Punkte reelles z und rein imaginäres s aufweisen.* Man betrachte nun zunächst die Fälle, wo wenigstens einige, sagen wir 2τ, der $2p+2$ Verzweigungspunkte $f_{2p+2}(z) = 0$ reell sind. Wir werden dann sowohl bei Σ_1 als bei Σ_2 τ Symmetrielinien der Fläche erhalten, die beide Mal in derselben Weise gegen einander liegen: *die Fläche gehört, mögen wir Σ_1 oder Σ_2 auswählen, beide Mal zu derselben Art symmetrischer Flächen.* Und zwar ist diese Art für $\tau = p+1$ selbstverständlich orthosymmetrisch, für $\tau < p+1$ aber diasymmetrisch. In der That: zerschneidet man die Fläche längs der τ Symmetrielinien, so wird sie für $\tau < p+1$ immer noch ein zusammenhängendes Ganze vorstellen. Seien nun aber sämmtliche Verzweigungspunkte imaginär. Das Polynom $f_{2p+2}(z)$ ist dann definit, und ich will der Bestimmtheit halber (hier wie weiter unten) annehmen, dass es positiv definit sei. Es werden dann bei Σ_1 alle Punkte der Fläche festbleiben, welche reelles z haben, bei Σ_2 aber überhaupt keine Punkte. Wir sehen: *sofern wir Σ_1 zu Grunde legen, haben wir eine orthosymmetrische Fläche, bei Σ_2 aber eine diasymmetrische.* Und dabei ist die Zahl λ der auftretenden Symmetrielinien bei Σ_2 natürlich 0, bei Σ_1 aber (wie man sofort sieht, wenn man die Figur macht) 2 oder 1, jenachdem p ungerade oder gerade ist. Dies stimmt damit, dass die Differenz $(p+1-\lambda)$ in den orthosymmetrischen Fällen immer gerade ausfällt. Wir werden kurz sagen dürfen, dass wir im Falle lauter imaginärer Verzweigungspunkte eines reellen hyperelliptischen Gebildes *entweder den niedrigsten diasymmetrischen Fall oder den niedrigsten orthosymmetrischen Fall des in Betracht kommenden Geschlechts vor uns haben.* Nehmen wir dann ferner alle Fälle hinzu, wo einige oder alle der Verzweigungen reell sind, so erhalten wir *Beispiele für die sämmtlichen übrigen diasymmetrischen Fälle und den höchsten orthosymmetrischen Fall.* Das macht bei $p = 0, 1, 2, 3$ noch alle Arten symmetrischer Flächen, die es giebt, und hierin liegt z. B., dass man bei $p = 3$ nach alle hier in Betracht kommenden Realitätsfragen von den hyperelliptischen Fällen aus discutiren kann, wie ich in Bd. 11 angab. Bei $p = 4$ zum ersten Male existirt eine Art symmetrischer Flächen, welche keinen hyperelliptischen Repräsentanten zulässt: das sind die orthosymmetrischen Flächen mit 3 Symmetrielinien. Solcher Arten giebt es allgemein $\left[\frac{p-2}{2}\right]$.

§ 2.

Von den Normalcurven der φ, die zu den symmetrischen Flächen gehören.

Wir definiren jetzt die Normalcurve der φ in üblicher Weise durch die Formeln:

$$\varphi_1 : \varphi_2 : \cdots : \varphi_p = dw_1 : dw_2 : \cdots : dw_p,$$

unter $w_1, w_2, \ldots, w_p$ irgend p linear unabhängige überall endliche Integrale der Fläche verstanden*). Dabei können wir vermöge der in meiner Schrift l. c. gegebenen Ueberlegung die dw jedenfalls so aussuchen, dass ihre Verhältnisse in symmetrischen Punkten der Fläche conjugirt imaginäre Werthe annehmen. Solcher Weise haben wir dann der symmetrischen Fläche entsprechend eine *reelle Curve der* φ. Zugleich ist ersichtlich, dass diese Curve abgesehen von reellen Collineationen, denen man sie unterwerfen mag, bei gegebener Riemann'scher Fläche völlig bestimmt ist, Den λ Symmetrielinien der Fläche entsprechend hat sie λ *reelle Züge*. Man überzeugt sich leicht, dass dieselben alle *paaren* Charakter besitzen. Ueberhaupt sind sie alle *gleichberechtigt*. Wir nennen die Curve *orthosymmetrisch* oder *diasymmetrisch*, jenachdem es die zugehörige Riemann'sche Fläche ist.

Beispielsweise entstehen bei $p = 3$ sechs Arten von ebenen Curven vierter Ordnung (wie das mit der von anderer Seite bekannten Theorie dieser Curven stimmt): zwei orthosymmetrische Arten mit 4, bez. 2 und vier diasymmetrische Arten mit 3, 2, 1, 0 reellen Zügen. Es kann nur die Frage sein, welche der zwei bekannten zweitheiligen Curven vierter Ordnung die orthosymmetrische ist, die „Gürtelcurve" oder die andere, deren zwei Ovale aus einander liegen. Hier entscheiden die Riemann'schen Flächen, die ich in Bd. 10 zu den einzelnen Curvenarten hinzuconstruirt habe**). Nehmen wir etwa den Fall der Gürtelcurve. Zerschneiden wir die dort gegebene, zu ihr gehörige Riemann'sche Fläche längs der beiden Züge der Curve, so zerfällt die Fläche in zwei Stücke. *Die Gürtelcurve ist also orthosymmetrisch.* Das gleiche Resultat ent-

*) Was diesen Uebergang zur „Sprechweise der analytischen Geometrie" und die Einführung der „Curve der φ" insbesondere angeht, so darf ich den Leser, der damit nicht vertraut ist, vielleicht auf die Darstellung verweisen, welche hierüber in meinen von Hrn. Fricke bearbeiteten Vorlesungen über elliptische Modulfunctionen in Bd. I, p. 556—572 gegeben ist.

**) Ich hebe gern hervor, dass ich ebenda in Bd. 10 beim nähern Studium meiner „neuen" Riemann'schen Flächen (auf pag. 416) zum ersten Male zur Unterscheidung der reellen Curven in orthosymmetrische und diasymmetrische geführt worden bin, an die ich dann freilich damals keine weiteren Folgerungen anzuschliessen wusste, weil mir zur Zeit der Riemann'sche Existenzsatz und die ganze von ihm beginnende Betrachtungsweise noch unbekannt war.

steht, wenn wir die hyperelliptischen Fälle heranziehen (wegen deren ich hier, wo es sich um $p = 3$ handelt, auf die Darstellung in Bd. 11 verweisen darf). Wir haben da als Normalcurve der φ einen doppeltzählenden eintheiligen Kegelschnitt, auf dem wir so viele „Scheitel" anzubringen haben, als $f = 0$ reelle Verzweigungspunkte liefert. Ist diese Zahl wieder gleich 2τ, und nehmen wir τ vorab > 0, so zerfällt der Kegelschnitt durch besagte Scheitel in 2τ Segmente, die man dann, um zu einer allgemeinen Curve vierter Ordnung überzugehen, abwechselnd wegnehmen, beziehungsweise in schmale Ovale verwandeln wird. Ist aber $\tau = 0$, so werden wir beim Uebergang zur allgemeinen Curve vierter Ordnung entweder den ganzen Kegelschnitt wegnehmen müssen [was die nulltheilige Curve vierter Ordnung ergiebt] oder ihn nach seiner ganzen Erstreckung in zwei reelle Züge spalten müssen [wobei eben die Gürtelcurve entsteht]. *Die Gürtelcurve entspricht also dem hyperelliptischen Falle mit $\tau = 0$ und ist eben darum orthosymmetrisch.*

Nehmen wir ferner $p = 4$. Die Normalcurve der φ liegt hier im dreidimensionalen Raume und stellt sich als voller Schnitt einer Fläche zweiten und einer Fläche dritten Grades dar. Aber die verschiedenen Möglichkeiten des genannten Schnittes hat man direct noch nicht untersucht und wir sehen uns also, was die Discussion der möglichen Curvengestalten betrifft, auf unsere eigenen Hülfsmittel angewiesen. Wir beginnen vielleicht vom hyperelliptischen Falle aus. Da haben wir (als Berührungsschnitt eines Kegels zweiter Ordnung mit einer Fläche dritten Grades) eine doppeltzählende Raumcurve dritter Ordnung vor uns und auf dieser jenachdem 10, 8, 6, 4, 2, 0 reelle Scheitel. Indem wir dann genau so operiren, wie mit dem doppeltzählenden Kegelschnitte im Falle der Curven vierter Ordnung, erhalten wir zunächst Curven sechster Ordnung, die aus 5, 4, 3, 2, 1 neben einander liegenden Ovalen bestehen: nur die erste dieser Curven ist orthosymmetrisch, die anderen sind diasymmetrisch. Ferner aber erhalten wir von der doppeltzählenden Curve dritter Ordnung aus, die keinen reellen Scheitel trägt, einerseits die nulltheilige C_6 [welche diasymmetrisch ist], andererseits eine merkwürdige eintheilige C_6, deren einer Curvenzug sich längs der ganzen Erstreckung der Curve dritter Ordnung doppelt hinzieht. *Dies ist die eintheilige orthosymmetrische C_6.* Es fehlt uns nun noch die orthosymmetrische Curve mit drei reellen Zügen, und diese kann uns, wie wir wissen, vom hyperelliptischen Falle aus überhaupt nicht geliefert werden. Glücklicherweise giebt es einen anderen Ansatz, welcher in einfachster Weise eine dreitheilige C_6 liefert, welche von der gerade construirten dreitheiligen diasymmetrischen Curve durch die Anordnung ihrer Ovale verschieden ist und daher nothwendig orthosymmetrisch ist. Man schneide nämlich ein Ellipsoid oder auch

ein Hyperboloid durch drei Parallelebenen in drei Ellipsen und ersetze dann die drei Parallelebenen durch eine in ihrer unmittelbaren Nähe verlaufende eigentliche Fläche dritter Ordnung. Die entstehende Durchschnittscurve hat ersichtlich keine dreifachen Tangentialebenen, welche alle drei Ovale der Curve gleichzeitig berührten, und eben hierin werden wir bald eine Bestätigung ihres orthosymmetrischen Charakters erblicken.

§ 3.

Einführung der Doppelpunktsmethode.

Die Ueberführung in ein hyperelliptisches Gebilde ist nur einer derjenigen Continuitätsprocesse, die wir beim Studium unserer reellen Curven benutzen wollen. Wir stellen daneben die Ueberführung der Curve in eine solche mit isolirtem Doppelpunkte. Wir denken uns dieselbe in der Weise bewerkstelligt, dass wir irgend eine der Symmetrielinien der zugehörigen Riemann'schen Fläche auf einen Punkt zusammenziehen. Dies setzt natürlich voraus, dass die Fläche überhaupt eine Symmetrielinie hat: die nulltheiligen Curven bleiben also von unserem Verfahren ausgeschlossen. Aber auch diejenigen orthosymmetrischen Fälle müssen bei Seite gelassen werden, welche nur eine Symmetrielinie besitzen (was natürlich gerades p voraussetzt). Ziehen wir nämlich bei ihnen die eine überhaupt vorhandene Symmetrielinie zu einem Punkte zusammen, so *zerfällt* dabei die Fläche in zwei Stücke. Dementsprechend degenerirt dann die zugehörige Curve der φ in einer Weise, die complicirt ist, und hier nicht weiter verfolgt werden soll. Glücklicherweise gehören die beiden hiernach auszuschliessenden Fälle zu denjenigen, die man hyperelliptisch degeneriren lassen kann. Bei allen anderen Fällen hat die Durchführung des genannten Processes und damit die Zusammenziehung eines beliebigen Ovals der Curve zu einem isolirten Doppelpunkte keine Schwierigkeit. Dabei entsteht dann eine Curve des Geschlechtes $(p-1)$, welche ausser dem isolirten Punkte noch $(\lambda-1)$ reelle Züge hat, und übrigens orthosymmetrisch oder diasymmetrisch ist, je nachdem es die ursprüngliche Curve war. Dieselbe ist nach wie vor von der Ordnung $(2p-2)$ und im Raume von $(p-1)$ Dimensionen gelegen. Projicirt man sie von ihrem Doppelpunkte aus auf einen Raum von $(p-2)$ Dimensionen, so entsteht in diesem eine Normalcurve der φ des Geschlechtes $(p-1)$ von der Ordnung $(2p-4)$.

Sollen wir diese geometrischen Verhältnisse durch Beispiele belegen, so nehmen wir vielleicht zunächst den Fall der Gürtelcurve $p=3$. Hier hat es ersichtlich keine Schwierigkeit, das innere Oval auf einen Punkt zusammenzuziehen. Von diesem aus projiciren wir

jetzt die Curve auf eine gerade Linie. Die Gerade wird dann nach ihrer ganzen Erstreckung von den Bildpunkten doppelt überdeckt, so zwar, dass dabei kein reeller „Scheitel" auftritt. Das entspricht in der That dem orthosymmetrischen Falle $\lambda = 1$ des Geschlechtes $p = 2$. Wie aber kann man das äussere Oval einer Gürtelcurve zu einem isolirten Punkte zusammenziehen? Einfach so, dass man dasselbe vorab durch das andere Oval hindurchtreten lässt. Dabei wird als Zwischenfall ein doppeltzählender Kegelschnitt überschritten, der dem Geschlechte $p = 3$ angehört, d. h. der bezügliche hyperelliptische Fall. — Man nehme ferner die dreitheilige orthosymmetrische Curve des Geschlechtes $p = 4$, die wir vorhin als den Schnitt einer Fläche zweiter Ordnung und einer Fläche dritter Ordnung erzeugten. Hier erreichen wir durch Abänderung der letztgenannten Flächen mit Leichtigkeit, dass sich ein beliebiges Oval der Curve zum isolirten Punkte zusammenzieht. Projiciren wir dann die Curve vom isolirten Punkte aus auf die Ebene, so entsteht in letzterer richtig die orthosymmetrische Curve $\lambda = 2$ des Geschlechtes 3, nämlich eine Gürtelcurve vierter Ordnung. —

Der Uebergang zum hyperelliptischen Gebilde und die hiermit besprochene Einführung eines isolirten Doppelpunktes sind die einzigen Degenerationsprocesse, die wir bei unseren Curven in Betracht ziehen wollen. Es hat ja keine Schwierigkeit, noch andere Processe heranzuziehen. Wir könnten z. B. mehrere Züge unserer Curve gleichzeitig in isolirte Doppelpunkte überführen. Wir könnten auch jeden einzelnen der erhaltenen Doppelpunkte vollends verschwinden lassen, wodurch das Geschlecht wieder auf p steigt, die Zügezahl und Art unserer Curve aber eine andere wird. Es ist besonders interessant, bei den sogleich zu gebenden Abzählungen alle diese Möglichkeiten ins Einzelne zu verfolgen. Doch würde es sich dabei nur um Bestätigungen der von uns zu machenden Angaben handeln, und wir lassen also alle diese Entwickelungen hier der Kürze halber bei Seite.

§ 4.

Allgemeine Sätze über die zu unseren Curven gehörigen Φ und F_μ.

Unter einer φ verstehe ich fortan allgemein ein solches Gebilde des Raumes der $\varphi_1 : \varphi_2 : \cdots : \varphi_\mu$, welches durch eine lineare Gleichung zwischen den $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ dargestellt wird, unter einer f_μ aber ein Gebilde, welches durch eine Gleichung μ^{ter} Ordnung gegeben wird. Berühren die φ, f_μ unsere Curve überall, wo sie dieselbe treffen, also in $(p-1)$, bez. in $\mu(p-1)$ Punkten, so nenne ich sie Φ, bez. F_μ. Die φ, Φ sind also nichts Anderes als die f_1, F_1, und es geschieht nur wegen ihrer Wichtigkeit, dass sie mit einem besonderen Namen

belegt sind. *Der besondere Zielpunkt der gegenwärtigen Arbeit soll sein, die Realitätsverhältnisse darzulegen, welche die Φ wie die F_μ bei den verschiedenen Arten reeller Normalcurven darbieten, die wir unterschieden haben, und damit die Realitätstheoreme, welche man über die Doppeltangenten und sonstigen Berührungscurven der ebenen Curven vierter Ordnung hat, auf beliebige p zu übertragen.* Ich darf hier vorab die allgemeinen Sätze von der Theorie der Abel'schen Functionen zusammenstellen, welche die Grundlage für jedes Studium dieser Φ, F_μ bilden müssen:

Seien $w_1, w_2, \ldots, w_p$ irgend p zur Curve gehörige linear unabhängige Integrale erster Gattung, $P_{\alpha,1}, \ldots, P_{\alpha,p}$ die p ersten, $P'_{\alpha,1}, \ldots, P'_{\alpha,p}$ die p zweiten Perioden von w_α. Seien ferner $x_1, \ldots, x_{2p-2}$ die Schnittpunkte unserer Curve mit irgend einer φ, z ein beliebiger fester Punkt der Curve. Man hat dann die Gleichungen des Abel'schen Theorems:

$$(1) \qquad w_\alpha^{x_1, z} + \cdots + w_\alpha^{x_{2p-2}, z} \equiv K_\alpha \pmod{P_{\alpha\beta}, P'_{\alpha\beta}},$$

die umgekehrt ausreichen, nachdem man die K_α an irgend einer besonderen φ berechnet hat, um die $x_1, \ldots, x_{2p-2}$ als volles Schnittpunktssystem der Curve mit einer φ zu charakterisiren. Man beachte, dass die hiermit eingeführten Constanten K_α ihrer Natur nach nur bis auf beliebige ganzzahlige Multipla der Perioden $P_{\alpha\beta}$, $P'_{\alpha\beta}$ definirt sind. — Wir betrachten ferner die Schnittpunktssysteme unserer Curve mit einer f_μ. Wir erhalten als nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Punkte $x_1, \ldots, x_{2\mu(p-1)}$ unserer Curve ein solches Schnittpunktssystem bilden, die Gleichungen:

$$(2) \qquad w_\alpha^{x_1, z} + \cdots + w_\alpha^{x_{2\mu(p-1)}, z} \equiv \mu K_\alpha \pmod{P_{\alpha\beta}, P'_{\alpha\beta}}.$$

In (1) und (2) brauchen wir jetzt die Punkte x nur paarweise zusammenfallen zu lassen, um die Berührungspunkte einer Φ, bez. F_μ zu erhalten Indem wir beiderseits durch 2 dividiren, erhalten wir 2^{2p} verschiedene Gleichungssysteme, nämlich erstens für die Φ:

$$(3) \qquad w_\alpha^{x_1, z} + \cdots + w_\alpha^{x_{p-1}, z} \equiv \frac{K_\alpha}{2} + \sum_1^p \varrho_\beta \frac{P_{\alpha\beta}}{2} + \sum_1^p \varrho'_\beta \frac{P'_{\alpha\beta}}{2} \pmod{P, P'},$$

zweitens für die F_μ:

$$(4) \qquad w_\alpha^{x_1, z} + \cdots + w_\alpha^{x_{\mu(p-1)}, z} \equiv \frac{\mu K_\alpha}{2} + \sum_1^p \varrho_\beta \frac{P_{\alpha\beta}}{2} + \sum_1^p \varrho'_\beta \frac{P'_{\alpha\beta}}{2} \pmod{P, P'};$$

hier bedeuten die ϱ_β, ϱ'_β $2p$ Zahlen, welche nach Belieben gleich 0 oder 1 zu nehmen sind. *Diese 2^{2p} Gleichungssysteme stellen uns eben-*

soviele Umkehrprobleme zur Bestimmung der Φ, bez. der F_μ vor. Aber wir werden uns bei Discussion derselben zunächst auf die Gleichungen (4) mit $\mu > 1$ beschränken müssen. Denn die Gleichungen (3) enthalten nur $(p-1)$ Unbekannte, sind also überzählig, und es bedarf tiefer gehender Untersuchungen, die erst durch die Theorie der Thetafunctionen geliefert werden, um zu unterscheiden, welche der 2^{2p} in (3) eingeschlossenen Gleichungssysteme überhaupt Lösungen zulassen. Für $\mu > 1$ aber haben wir folgende Sätze:

1) Ein jedes der 2^{2p} Umkehrprobleme hat sicher Lösungen; *es giebt also 2^{2p} Schaaren von F_μ.*

2) Was die Zahl der Lösungen angeht, so müssen wir den Fall $\mu = 2$, $\varrho_\beta = 0$, $\varrho'_\beta = 0$ vorweg nehmen, für den die Gleichungen (4) mit den Gleichungen (1) zusammenfallen und bei dem es sich also einfach um diejenigen ∞^{p-1} Punktsysteme $x_1 \ldots x_{2p-2}$ handelt, in denen die φ schneiden (welche doppeltzählend als uneigentliche F_2 anzusehen sind).

3) In allen anderen Fällen hat man es durchaus mit „bestimmten“ Umkehrproblemen zu thun, d. h. *von den $\mu(p-1)$ Punkten $x_1 \ldots x_{\mu(p-1)}$ sind genau $\mu(p-1)-p$ willkürlich anzunehmen.* Ich werde dies kurz wohl so ausdrücken, dass ich sage: *die zugehörigen Schaaren von F_μ sind $[\mu(p-1)-p]$-fach unendlich.* Da sind denn alle F_μ, welche in denselben Punkten x berühren, nur für eine F_μ gezählt, was ja natürlich ungenau ist, weil man bei höheren Werthen von μ aus jeder F_μ, die in irgendwelchen Punkten x berührt, unendlich viele F_μ machen kann, die in den nämlichen Punkten x berühren, indem man einfach diejenigen f_μ, welche längs der Curve identisch verschwinden, mit irgendwelchen Zahlenfactoren multiplicirt hinzuaddirt. Ich denke aber, dass diese Ungenauigkeit keine Missverständnisse zur Folge haben wird.

4) Ist μ gerade und alle ϱ_β, ϱ'_β gleich Null, so kann die Schaar der F_μ allemal durch die *Gesammtheit der doppeltgezählten $f_{\frac{\mu}{2}}$ ersetzt* werden.

5) Ueberhaupt aber wird es bei geradem μ niemals zweifelhaft sein, welches Zahlensystem der ϱ_β, ϱ'_β man einer bestimmten F_μ zuordnen soll. Denn es handelt sich in den Gleichungen (4) bei geradem μ rechter Hand um ganzzahlige Multipla der K_α, und die K_α sind selbst, wie wir hervorhoben, bis auf ganzzahlige Multipla der Perioden $P_{\alpha\beta}$, $P'_{\alpha\beta}$ bestimmt. *Das Zahlensystem ϱ_β, ϱ'_β, welches einer F_μ gerader Ordnung zugehört, nennen wir ihre Elementarcharakteristik.*

6) Anders bei ungeradem μ, insofern die dann rechter Hand stehenden Grössen $\frac{\mu K_\alpha}{2}$ von vornherein nur bis auf halbe Perioden

bestimmt erscheinen. Die ϱ_β, ϱ'_β des einzelnen F_μ sind also keineswegs fixirt, nur die Differenzen $\varrho_\beta - \bar{\varrho}_\beta$, $\varrho'_\beta - \bar{\varrho}'_\beta$ sind es, welche zu zwei verschiedenen F_μ, $\overline{F}_\mu$ gehören. *Wir haben da also zunächst keine absoluten Charakteristiken* ϱ, ϱ', *sondern nur relative Charakteristiken* (*Elementarcharakteristiken*).

Zur Ergänzung dieser Sätze ziehen wir nunmehr die *Theorie der Thetafunctionen* heran. Indem wir auf der Riemann'schen Fläche irgendwie ein „kanonisches" Querschnittsystem construiren, führen wir statt der $w_1, w_2, \ldots. w_p$ *Normalintegrale* $j_1, j_2, \ldots, j_p$ ein, deren kanonische Perioden $P_{\alpha\beta}$, $P'_{\alpha\beta}$ in üblicher Weise so lauten werden:

$$
(5)\qquad
\begin{array}{c|cccc|ccc|}
 & P_{\alpha 1} & P_{\alpha 2} & \ldots & P_{\alpha p} & P'_{\alpha 1} & \ldots & P'_{\alpha p} \\
\hline
j_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & \tau_{11} & \ldots & \tau_{1p} \\
j_2 & 0 & 1 & \ldots & 0 & \tau_{21} & \ldots & \tau_{2p} \\
 & & & & & & & \\
j_p & 0 & 0 & \ldots & 1 & \tau_{p1} & \ldots & \tau_{pp}
\end{array}
$$

Die $P_{\alpha\beta}$ entsprechen hier der Ueberschreitung der A_β, die $P'_{\alpha\beta}$ der Ueberschreitung der B_β. Ich will annehmen, dass man dabei einfach setzen kann:

$$(6)\qquad \varphi_1 : \varphi_2 : \cdots : \varphi_p = dj_1 : dj_2 : \cdots : dj_p.$$

Unsere Curve ist dann auf ein *Normalcoordinatensystem* bezogen; für jedes System kanonischer Querschnitte unserer Riemann'schen Fläche wird es ein solches Coordinatensystem geben. Im Uebrigen definiren wir jetzt die 2^{2p} Thetafunctionen durch die Reihenentwickelungen:

$$(7)\qquad \vartheta\begin{vmatrix} g_1 \ldots g_p \\ h_1 \ldots h_p \end{vmatrix}(j_1, \ldots, j_p;\ \tau_{11}, \ldots, \tau_{pp}) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{n_1} \cdots \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{n_p} E,$$

wo

$$E = e^{i\pi\left(\sum_1^p{}_\alpha \sum_1^p{}_\beta \left(n_\alpha + \frac{g_\alpha}{2}\right)\left(n_\beta + \frac{g_\beta}{2}\right)\tau_{\alpha\beta} + 2\sum_1^p{}_\alpha \left(n_\alpha + \frac{g_\alpha}{2}\right)\left(j_\alpha + \frac{h_\alpha}{2}\right)\right)}.$$

Hier haben die Zahlen $g_1 \ldots g_p$, $h_1 \ldots h_p$, welche die „Charakteristik" der Thetafunction ausmachen, unabhängig von einander die Werthe 0 und 1 anzunehmen, und die Thetafunction ist als Function der $j_1 \ldots j_p$ gerade oder ungerade, jenachdem $g_1 h_1 + \cdots + g_p h_p \equiv 0$ oder $\equiv 1$ (mod. 2). Des Weiteren ergiebt sich dann:

1) *Jeder Schaar von F_μ ungerader Ordnung ist eine bestimmte Thetafunction zugeordnet.* Die Definition der Grössen $\frac{\mu K_\alpha}{2}$ in den Formeln (4) lässt sich darauf so wählen, dass die ϱ_β, ϱ'_β gleich den h_β, g_β

der zugehörigen Thetafunction werden. Die F_μ ungerader Ordnung erhalten so *absolute* Charakteristiken, welche wir ihre *Primcharakteristiken* nennen.

2) Nach der hiermit bezeichneten Fixirung der Grössen $\frac{K_\alpha}{2}$ entscheidet sich die Frage, ob es den Gleichungen (3) entsprechend für bestimmte ϱ, ϱ' überall berührende Φ giebt, bez. wie viele solcher Φ es giebt, aus der *Potenzentwickelung* des zugehörigen ϑ (nach ansteigenden Potenzen der $j_1, j_2, \ldots, j_p$). Im Allgemeinen beginnt die Reihenentwickelung der geraden ϑ mit einem constanten Gliede, diejenige der ungeraden ϑ mit einem linearen Gliede:

$$\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial j_1}\right)_{0\ldots 0} \cdot j_1 + \cdot \cdot + \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial j_p}\right)_{0\ldots 0} \cdot j_p$$

(wo die den Differentialquotienten beigesetzten Indices $0 \ldots 0$ bedeuten sollen, dass für $j_1, \ldots, j_p$ die Werthe $0, \ldots, 0$ einzutragen sind). *Dem geraden ϑ entspricht dann kein Φ, dem ungeraden ϑ eines, welches, auf das Normalcoordinatensystem bezogen, durch die Gleichung:*

$$(8) \qquad \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial j_1}\right)_{0\ldots 0} \cdot \varphi_1 + \cdots + \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial j_p}\right)_{0\ldots 0} \cdot \varphi_p = 0$$

gegeben ist. In besonderen Fällen aber kann die Potenzentwickelung eines geraden oder ungeraden ϑ auch mit Gliedern höherer Ordnung, sagen wir der ϱ^{ten} Ordnung, beginnen. *Es wird dann eine* $(\varrho-1)$*-fach unendliche Schaar zugehöriger Φ geben, deren Gleichungen aus dem Gliede ϱ^{ter} Ordnung der für das ϑ geltenden Reihenentwickelung algebraisch abgeleitet werden können.*

3) Die Theorie der Φ gestaltet sich hiernach im speciellen Falle vielfach anders, als im allgemeinen Falle. So ist es besonders bei den hyperelliptischen Gebilden. *Als Vergleichspunkt für Realitätsfragen muss dann nicht sowohl die Theorie der Φ selbst, sondern die Theorie der ϑ [speciell der ungeraden ϑ] dienen.*

§ 5.

Besondere Angaben über die ϑ, Φ, F_μ der hyperelliptischen Gebilde.

Möge das hyperelliptische Gebilde analytisch wieder durch die Gleichung:

$$(1) \qquad s = \sqrt{f_{2p+2}(z)}$$

gegeben sein. Es ist dann bekanntlich möglich, über die zugehörigen ϑ, Φ, F_μ specielle Angaben zu machen, sofern man die einzelnen Factoren von f als bekannt ansehen will, so dass also ein Eingehen auf die transcendente Theorie hier noch nicht erforderlich ist. Es gelten in dieser Hinsicht die folgenden Sätze:

1. Für die Theorie der ϑ sind die Spaltungen von f in zwei Factoren $\psi_{p+1-2\sigma}\cdot\chi_{p+1+2\sigma}$ fundamental (wo σ eine beliebige ganze Zahl bedeuten soll, die $\geqq 0$ und $\leqq \frac{p+1}{2}$ ist). Einer jeden solchen Spaltung entspricht ein ϑ, und umgekehrt. Das betreffende ϑ ist gerade oder ungerade, je nachdem es σ ist.

2. Wir können hiernach die Φ, welche es giebt, direct den Spaltungen von f in zwei Factoren der genannten Art zuordnen. Die Sache wird dann die, dass nur bei solchen Spaltungen, deren $\sigma = 0$ ist, keine Φ auftreten und dass übrigens die zu der einzelnen Spaltung gehörigen Φ durch die Formel gegeben sind:

(2) $$\sqrt{\Phi} = \Psi_{\sigma-1}\cdot\sqrt{\psi_{p+1-2\sigma}}.$$

Hier soll $\Psi_{\sigma-1}$ irgend ein Polynom von z vom Grade $(\sigma-1)$ bedeuten.

3. Ein entsprechender Ansatz wird für die F_μ ungerader Ordnung gelten. Sei $\mu = 2\nu + 1$, so erhält man die sämmtlichen existirenden F_μ, wenn man den verschiedenen unter (1) genannten Spaltungen entsprechend setzt:

(3) $$\sqrt{F_\mu} = \Psi_{\nu(p-1)+\sigma-1}\cdot\sqrt{\psi_{p+1-2\sigma}} + X_{\nu(p-1)-\sigma-1}\cdot\sqrt{\chi_{p+2+2\sigma}}.$$

Hier bedeuten Ψ, X wieder irgend welche Polynome von dem durch den bezüglichen Index gegebenen Grade. Ferner hat σ *alle* seine Werthe, die Null eingeschlossen, zu durchlaufen.

4. Für die F_μ gerader Ordnung kommen in analoger Weise die Zerlegungen von f in Factoren $\psi_{2\sigma}\cdot\chi_{2p+2-2\sigma}$ in Betracht; das sind dieselben Zerlegungen, die wir schon betrachteten, wenn p ungerade, aber andere Zerlegungen, wenn p gerade.

5. Indem wir $\mu = 2\nu$ setzen, sind die F_μ gerader Ordnung den einzelnen Zerlegungen entsprechend durch die Formel gegeben:

(4) $$\sqrt{F_\mu} = \Psi_{\nu(p-1)-\sigma}\cdot\sqrt{\psi_{2\sigma}} + X_{(\nu-1)(p-1)+\sigma-2}\cdot\sqrt{\chi_{2p+2-2\sigma}}. \text{ —}$$

Von diesen Sätzen aus kann man im Falle des einzelnen reellen hyperelliptischen Gebildes natürlich sehr leicht die Realität des einzelnen Φ oder F_μ (oder auch der ϑ) beurtheilen. Es wird vor allem darauf ankommen, unter den Spaltungen von f in zwei Factoren $\psi\,.\,\chi$ die „reellen" herauszugreifen. Reell aber ist eine Spaltung erstlich und hauptsächlich, wenn die Factoren ψ, χ einzeln reell sind, dann noch, wenn die ψ, χ conjugirt imaginär sind. Letzteres kann natürlich nur bei solchen f eintreten, deren sämmtliche Wurzeln imaginär sind, und auch dann nur bei den Spaltungen in $\psi_{p+1}\cdot\chi_{p+1}$. Statt längerer Erläuterungen will ich Tabellen für $p = 2, 3$ geben, aus denen die hier in Betracht kommende Gesetzmässigkeit am besten ersichtlich ist. In denselben ist die Zahl der reellen Wurzeln von f wieder mit 2τ bezeichnet.

$p = 2$. Spaltungen von f_6.

a) Reelle Spaltungen der Form $\psi_{p+1-2\sigma} \cdot \chi_{p+1+2\sigma}$.

$2\tau =$	0	2	4	6
Reelle ψ_1, χ_5	0	2	4	6
Reelle ψ_3, χ_3	0	2	4	10
Conjugirte ψ_3, χ_3	4	0	0	0
Reelle Spaltungen überhaupt	4	4	8	16

b) Reelle Spaltungen der Form $\psi_{2\sigma} \cdot \chi_{2p+2-2\sigma}$.

$2\tau =$	0	2	4	6
Reelle ψ_0, χ_6	1	1	1	1
Reelle ψ_2, χ_4	3	3	7	15
Reelle Spaltungen überhaupt	4	4	8	16

Von hier aus ergiebt sich beispielsweise als Regel: *Ist p gerade und 2τ die Zahl der reellen Factoren von f, so hat man für $\tau > 0$ sowohl bei a) wie bei b) $2^{p+\tau-1}$ Spaltungen in reelle Factoren, für $\tau = 0$ aber bei a) 2^p Spaltungen in conjugirte Factoren, bei b) 2^p Spalungen in reelle Factoren.*

$p = 3$. Spaltungen von f_8.

Reelle Spaltungen der Form $\psi_{p+1-2\sigma} \cdot \chi_{p+1+2\sigma} = \psi_{2\sigma'} \cdot \chi_{2p+2-2\sigma'}$.

$2\tau =$	0	2	4	6	8
Reelle ψ_0, χ_8	1	1	1	1	1
Reelle ψ_2, χ_6	4	4	8	16	28
Reelle ψ_4, χ_4	3	3	7	15	35
Conjugirte ψ_4, χ_4	8	0	0	0	0
Reelle Spaltungen überhaupt.	16	8	16	32	64

Von hier aus dann etwa wieder: *Ist p ungerade und 2τ die Zahl der reellen Wurzeln von f, so hat man für $\tau > 0$ $2^{p+\tau-1}$ Spaltungen in reelle Factoren, für $\tau = 0$ aber 2^p Spaltungen in conjugirte Factoren und 2^p Spaltungen in reelle Factoren.*

An diese Realitätsdiscussion der Spaltungen schliesst sich dann zunächst, von Formel (2) aus, diejenige der Φ. Ich will hier einen zusammenfassenden Satz nur für diejenigen Φ aussprechen, welche ungeraden σ zugehören; denn sie allein kommen in Betracht, wenn wir hernach vom hyperelliptischen Gebilde zum allgemeinen Gebilde übergehen. Wir haben:

So lange $\tau > 0$ und $< (p+1)$, ist die Zahl der verschiedenen hier in Betracht kommenden reellen Φ gleich $2^{p+\tau-2}$.

Für $\tau = p+1$ wird die Zahl gleich $2^{p-1}(2^p-1)$, für $\tau = 0$ bei geradem p gleich 0, bei ungeradem p gleich 2^{p-1}.

Ferner aber die Realitätsdiscussion der F_μ. Da sind die Gebilde mit $\tau > 0$ sofort erledigt, indem wir sagen:

Reelle Spaltungen von f ergeben auch reelle Schaaren zugehöriger F_μ.

Dagegen ist der Fall $\tau = 0$ in nähere Betrachtung zu ziehen. Ich will f_{2p+2} hier wieder als *positives* Polynom voraussetzen. Das reelle hyperelliptische Gebilde kann dann noch in einer der beiden Formen vorgelegt sein:

$$\alpha)\quad s = \sqrt{f_{2p+2}(z)}, \qquad \beta)\quad s' = i\sqrt{f_{2p+2}(z)};$$

im ersteren Falle ist es orthosymmetrisch, im letzteren diasymmetrisch.

Wir nehmen nun erstlich p gerade und betrachten die Zerlegungen von f in $\psi_{p+1-2\sigma} \cdot \chi_{p+1+2\sigma}$. Reell sind unter denselben nur diejenigen mit $\sigma = 0$, bei denen ψ und χ conjugirt imaginär sind. Wir setzen nun nach Formel (3):

$$\sqrt{F_\mu} = \Psi_{\nu(p-1)-1} \cdot \sqrt{\psi_{p+1}} + X_{\nu(p-1)-1} \cdot \sqrt{\chi_{p+1}}$$

und nehmen hier die Ψ, X ebenfalls conjugirt imaginär. Indem wir quadriren, erhalten wir einen Werth von F_μ, in welchen wir entweder, vermöge α), das s, oder, vermöge β), das s' einführen werden. Wir sehen:

I. *Im Falle α) liefert jede Spaltung von f in conjugirt imaginäre Factoren eine Schaar reeller F_μ (ungerader Ordnung), im Falle β) aber eine Schaar, die man nur insofern als reell bezeichnen kann, als in ihr neben der einzelnen imaginären F_μ immer auch deren conjugirte auftritt.*

Wir betrachten ferner, bei geradem p, die Zerlegungen von f in Factoren $\psi_{2\sigma} \cdot \chi_{2p+2-2\sigma}$. Reelle Spaltungen entstehen hier nur so, dass man die ψ, χ einzeln reell nimmt. Ausgehend von Formel (4):

$$\sqrt{F_\mu} = \Psi_{\nu(p-1)-\sigma} \cdot \sqrt{\psi_{2\sigma}} + X_{(\nu-1)(p-1)+\sigma-2} \cdot \sqrt{\chi_{2p+2-2\sigma}}$$

werden wir jetzt sowohl im Falle α) als im Falle β) reelle F_μ erhalten können. Wir werden zu dem Zwecke im Falle α) die Coefficienten von Ψ, X sämmtlich reell nehmen, im Falle β) aber die Coefficienten von Ψ reell, die von X rein imaginär. Also:

II. *Eine jede der hier in Betracht kommenden reellen Spaltungen von f liefert für α) wie für β) eine Schaar reeller F_μ gerader Ordnung.*

Wir nehmen endlich das p ungerade. Da haben wir neben einander 2^p Spaltungen von f in conjugirt imaginäre Factoren und ebensoviele in reelle Factoren zu betrachten. Eine jede dieser Spaltungen ergiebt F_μ von ungerader, wie von gerader Ordnung. Wir sehen sofort:

III. *Was die Realität der F_μ bei ungeradem p angeht, so haben wir für conjugirt imaginäre ψ, χ einen Satz ganz wie I, für reelle ψ, χ einen Satz wie* II.

§ 6.

Die Realitätstheoreme des allgemeinen Falles.

Aus der Realität der Φ, F_μ der hyperelliptischen Fälle werden wir jetzt ohne Weiteres auf die Realität der bezüglichen Gebilde in allen denjenigen Fällen symmetrischer Flächen schliessen dürfen, die einen hyperelliptischen Repräsentanten enthalten; bei den Φ werden wir dabei natürlich, wie wir schon bemerkten, nur diejenigen mitzählen dürfen, welche Zerlegungen von f in $\psi_{p+1-2\sigma} \cdot \chi_{p+1+2\sigma}$ mit ungeradem σ entsprechen; denn nur diese gehören zu ungeraden ϑ. —

In der That ist klar, dass sich die Realität der einzelnen Schaaren der F_μ, wie der Φ, nicht ändern kann (selbst wenn einzelne Φ zwischendurch einmal unbestimmt werden), so lange sich die symmetrische Riemann'sche Fläche nur innerhalb ihrer Art abändert. Denn es können niemals zwei F_μ oder auch zwei Φ, die verschiedenen Charakteristiken angehören, zusammenfallen, so lange man es überhaupt mit einer Riemann'schen Fläche vom Geschlechte p zu thun hat. — Aber wir können weiter gehen. Die Zahl der Berührungspunkte, welche eine reelle F_μ oder Φ mit dem einzelnen reellen Zuge unserer Curve gemein hat, kann offenbar, so lange sich die Curve innerhalb ihrer Art, d. h. stetig, ändert, nur um *gerade* Zahlen abgeändert werden; *es wird also eine bleibende Unterscheidung abgeben, ob dieselbe gerade ist (die Null eingeschlossen) oder ungerade.* Wir theilen unsere F_μ, Φ dementsprechend bei jeder einzelnen unserer Curvenarten in *Classen* je nach den Curvenzügen, *welche sie ungeradzahlig berühren.* Ich werde die Classen in der Bezeichnung so weit zur Geltung bringen, dass ich die Zahl der ungeradzahlig berührten Ovale durch einen dem F_μ oder Φ oben zugesetzten Accent bezeichne.

$\Phi^{(0)}$ z. B. wird eine Φ heissen, wenn sie kein Oval ungeradzahlig berührt, wenn sie also möglicherweise überhaupt kein Oval berührt (entsprechend den „Doppeltangenten erster Art“ der ebenen Curven vierter Ordnung bei Zeuthen). Bei geradem μ wird es natürlich nur $F_\mu^{(0)}$, $F_\mu^{(2)}$, $F_\mu^{(4)}$, ... geben können [da doch die Gesammtzahl der reellen Berührungspunkte bei diesen F_μ gerade sein muss]. Analog gibt es bei ungeradem μ, sofern p *gerade* ist, $F_\mu^{(1)}$, $F_\mu^{(3)}$, ..., dagegen, wenn p *ungerade* ist, wieder $F_\mu^{(0)}$, $F_\mu^{(2)}$, ... Dasselbe gilt für die Φ. Die einzelnen $F_\mu^{(\omega)}$, $\Phi^{(\omega)}$ bezeichnen wir dabei als denjenigen ω Ovalen „zugehörig“, die eben von ihnen ungeradzahlig berührt werden. Natürlich können nur solche $F_\mu^{(\omega)}$, $\Phi^{(\omega)}$ existiren, welche, wie ich mich ausdrücke, *combinatorisch möglich* sind. Es soll dies heissen, dass erstens ω gerade oder ungerade genommen ist nach der soeben angedeuteten Regel, dass zweitens (wie selbstverständlich) $\omega \leq \lambda$ ist, unter λ die Gesammtzahl der überhaupt vorhandenen Curvenovale verstanden. Und nun werden wir verlangen dürfen, *bei jeder einzelnen unserer Curvenarten die Gesammtzahl der verschiedenen Arten reeller* $F_\mu^{(\omega)}$, $\Phi^{(\omega)}$ *anzugeben, welche in irgend welche combinatorisch-mögliche Classe gehören.*

Die so erweiterte Frage wird sich für die sämmtlichen diasymmetrischen Arten wie für die beiden äussersten orthosymmetrischen Arten wieder ohne Weiteres aus dem Verhalten der entsprechenden hyperelliptischen Gebilde beantworten lassen; man hat bei der Discussion der letzteren nur noch mehr in's Einzelne zu gehen, als wir im vorigen Paragraphen gethan haben. Ich ziehe aber vor, *die betreffenden Sätze*, bei denen sich die „mittleren“ orthosymmetrischen Fälle von den übrigen Fällen schliesslich gar nicht abtrennen, *zunächst einmal als solche ganz allgemein hinzustellen.* Die Beweisgründe sollen dann hinterher, soweit sie sich nicht aus der elementaren Betrachtung der hyperelliptischen Fälle ergeben, in den folgenden Paragraphen entwickelt werden. — Diese hier mitzutheilenden Sätze enthalten das eigentlich neue Resultat der vorliegenden Arbeit*). Ich sage folgendermassen:

1) Was die Φ angeht, so nehme ich natürlich keine Notiz von den besonderen Φ, welche in einzelnen Fällen den geraden ϑ entsprechen mögen; auch drücke ich mich so aus, als wenn jedem ungeraden ϑ nur *ein* Φ zugehörte. Ich habe dann:

Man bilde sich bei den Φ *die sämmtlichen combinatorisch möglichen Classen, lasse dann aber in den orthosymmetrischen Fällen die eine Classe* $\omega = \lambda$ *bei Seite. Jede einzelne dieser Classen wird dann in jedem Falle genau* 2^{p-1} *reelle* Φ *enthalten.*

*) Das auf die Φ bezügliche Resultat habe ich bereits in den Göttinger Nachrichten vom Mai dieses Jahres (1892) bekannt gegeben.

Hiernach ist die Gesammtzahl der reellen Φ im Falle $\lambda = 0$ 2^{p-1} oder 0, jenachdem p ungerade oder gerade ist, in den diasymmetrischen Fällen $2^{p+\lambda-2}$, in den orthosymmetrischen Fällen $2^{p-1}(2^{\lambda-1}-1)$.

2) Bei den F_μ nehme man die Fälle $\lambda > 0$ vorweg. Man hat dann:

Es gibt in diesen Fällen bei jedem μ von jeder combinatorisch möglichen Classe genau 2^p reelle Arten.

3) Was endlich die F_μ im Falle $\lambda = 0$ angeht, so hat man zwischen geradem und ungeradem p zu unterscheiden. Bei geradem p hat man wieder die geraden und die ungeradem μ auseinanderzuhalten. *Bei geradem μ giebt es 2^p Schaaren reeller F_μ* (die natürlich als $F_\mu^{(0)}$ zu bezeichnen sind), *bei ungeradem μ 2^p Schaaren von F_μ, welche nur insofern als reell zu bezeichnen sind, als sie zu jeder imaginären F_μ die conjugirte enthalten* (diese F_μ fallen aus der verabredeten Bezeichnung heraus; man könnte sie als $[F_\mu]$ benennen). Dagegen verhalten sich bei ungeradem p die geraden und ungeraden μ übereinstimmend: *Es gibt bei jedem μ 2^p Schaaren reeller $F_\mu^{(0)}$ und 2^p Schaaren von $[F_\mu]$.* —

Hierzu dann etwa noch folgende Bemerkungen:

ad 1). Hier finden sich natürlich die Zeuthen'schen Sätze von den Doppeltangenten der ebenen Curven vierter Ordnung wieder und zwar in der Form: allemal gibt es 4 Doppeltangenten Φ^0 und ausserdem, sofern wir nur den Fall der Gürtelcurve bei Seite lassen, zu je 2 Ovalen, die wir unter den vorhandenen nach Belieben herausgreifen mögen, 4 zugehörige Doppeltangenten $\Phi^{(2)}$. —

Uebrigens mag man darin, *dass bei ihnen die Combination $\Phi^{(\lambda)}$ wegfällt*, den geometrischen Unterschied der λ-theiligen orthosymmetrischen Curven von den mit gleicher Zügezahl ausgestatteten diasymmetrischen Curven erblicken. So hat die dreitheilige orthosymmetrische Curve des Geschlechtes 4 keine Tritangentialebenen $\Phi^{(3)}$ (wie wir schon am Schlusse des § 2 bemerkten), die dreitheilige diasymmetrische Curve dagegen wird 8 derselben besitzen (wie man ebenfalls aus der Figur ohne Weiteres ersieht).

ad 2, 3). Unter den F_μ gerader Ordnung sind hier die doppeltzählenden $f_{\frac{\mu}{2}}$ mitgerechnet. Insofern alle reellen Züge unserer Curve paaren Charakter haben, werden sie von jeder Fläche und also auch jeder $f_{\frac{\mu}{2}}$ in einer paaren Anzahl von Punkten geschnitten werden. Als F_μ betrachtet gehören die $f_{\frac{\mu}{2}}$ daher zu den $F_\mu^{(0)}$. Von dieser besonderen Art der $F_\mu^{(0)}$ muss man absehen, wenn man meine jetzige Angabe mit derjenigen vergleichen will, welche ich selbst in Bd. 10

der Annalen oder Crone in Bd. 12 daselbst für die Schaaren der Berührungskegelschnitte der ebenen Curven vierter Ordnung gegeben haben.

§ 7.

Die Weichold'schen Periodicitätsschemata.

Ich werde den Beweis der vorstehend formulirten Theoreme, soweit er durch elementare Betrachtung der hyperelliptischen Gebilde geführt werden kann, nicht weiter verfolgen. Insbesondere mag der Fall der nulltheiligen Curven fortan durch den Verweis auf die entsprechenden hyperelliptischen Verhältnisse als erledigt gelten. Statt dessen wende ich mich zu neuen Betrachtungen, welche gestatten werden, den Beweis nach gleichförmiger Methode *für die sämmtlichen nicht nulltheiligen Curven* zu erbringen*). Damit ist denn die Lücke, welche der hyperelliptische Ansatz betreffs der „mittleren" orthosymmetrischen Fälle liess, von selbst mit ausgefüllt.

Die neuen Betrachtungen schliessen sich direct an die in § 4 gegebenen Sätze aus der Theorie der Abel'schen Functionen an. Sie gehen darauf aus, durch Construction möglichst „symmetrischer" kanonischer Schnittsysteme auf den symmetrischen Flächen mit $\lambda > 0$ Normalintegrale j_α festzulegen, bei denen man über die Realität der Perioden $\tau_{\alpha\beta}$ etwas aussagen kann, um dann eine directe Realitätsdiscussion derjenigen Umkehrprobleme, bez. Thetaformeln eintreten zu lassen, durch welche man die F_μ, bez. die Φ bestimmen kann. Die erste Hälfte dieses Gedankenganges ist bereits in der in der Einleitung genannten Weichold'schen Dissertation zur Durchführung gekommen; ich darf mich hier darauf beschränken, über die bezüglichen von Hrn. Weichold gefundenen Resultate zu referiren (wobei ich ausschliesslich diejenigen Momente hervorkehre, welche für meine jetzigen Zwecke von Wichtigkeit sind):

Wir setzten $\lambda > 0$ voraus. Dementsprechend gibt es sicher Symmetrielinien, und nun wollen wir irgend eine derselben bevorzugen und als *ausgezeichnete* Symmetrielinie zu Grunde legen. Die übrigen $(\lambda - 1)$ Symmetrielinien benutzen wir dann in irgend einer Reihenfolge als die Schnitte $A_1, \ldots A_{\lambda-1}$ unseres kanonischen Schnittnetzes. Ferner wählen wir die zugehörigen Schnitte $B_1, \ldots B_{\lambda-1}$ so als sich selbst symmetrische Curven, dass jede derselben das ihr entsprechende A wie auch die ausgezeichnete Symmetrielinie einmal schneidet. Es gilt jetzt noch, weitere Schnitte $A_\lambda, \ldots A_p, B_\lambda, \ldots, B_p$ in geeigneter Weise einzuführen. Hier muss ich wegen der Einzelheiten auf Weichold's eigene Darstellung verweisen. In der That werden wir

*) Dies ist dieselbe Methode, welche ich in Bd. 10 insbesondere bei Untersuchung der ebenen Curven 4. Ordnung gebrauchte.

diese Einzelheiten weiterhin doch nicht in Discussion ziehen. Die Festsetzungen werden so gemacht, dass die sämmtlichen Normalintegrale j_α *rein imaginär* ausfallen. Wir setzen daraufhin $ij_\alpha = j'_\alpha$. Die „reellen" Integrale j'_α zeigen dann bei Ueberschreitung der Querschnitte A, B Periodicitätsmoduln, die wir der Deutlichkeit halber hier ausführlich hersetzen:

	A_1	A_2		A_p	B_1	B_2		B_p
j_1'	i	0		0	$i\tau_{11}$	$i\tau_{12}$		$i\tau_{1p}$
j_2'	0	i		0	$i\tau_{21}$	$i\tau_{22}$		$i\tau_{2p}$
j_p'	0	0		i	$i\tau_{p1}$	$i\tau_{p2}$		$i\tau_{pp}$

Und nun ist die Sache die, dass man in allen unseren Fällen die imaginären Theile der hier auftretenden Grössen $i\tau_{\alpha\beta}$ durch eine einfache Hülfsbetrachtung (die wir hier überspringen) angeben kann. *Besagte imaginäre Theile sind im allgemeinen Null, nur in* $(p+1-\lambda)$ *Feldern unserer Tabelle betragen sie jedesmal* $\frac{i}{2}$. Und zwar liegen diese $(p+1-\lambda)$ Felder in den orthosymmetrischen Fällen rechter Hand und linker Hand von den $(p+1-\lambda)$ letzten Feldern der Hauptdiagonale, wie folgendes Schema aufweist:

	B_1		$B_{\lambda-1}$	B_λ	$B_{\lambda+1}$		B_{p-1}	B_p
j_1'	0		0	0	0		0	0
$j_{\lambda-1}'$	0		0	0	0		0	0
j_λ'	0		0	0	$\frac{i}{2}$		0	0
$j_{\lambda+1}'$	0		0	$\frac{i}{2}$	0		0	0
j_{p-1}'	0		0	0	0		0	$\frac{i}{2}$
j_p'	0		0	0	0		$\frac{i}{2}$	0

in den diasymmetrischen Fällen aber rücken sie in die Hauptdiagonale selbst hinein:

	B_1		$B_{\lambda-1}$	B_λ	$B_{\lambda+1}$		B_{p-1}	B_p
j_1'	0		0	0	0		0	0
$j_{\lambda-1}'$	0		0	0	0		0	0
j_λ'	0		0	$\frac{i}{2}$	0		0	0
$j_{\lambda+1}'$	0		0	0	$\frac{i}{2}$		0	0
j_{p-1}'	0		0	0	0		$\frac{i}{2}$	0
j_p'	0		0	0	0		0	$\frac{i}{2}$

Dies ist Alles, was wir aus der Weichold'schen Dissertation gebrauchen. Ich darf aber folgende Bemerkungen zufügen:

a) Weichold hat auch den Fall der diasymmetrischen Fläche ohne Symmetrielinie behandelt und bei ihm „reelle" Normalintegrale j_α gefunden, deren Perioden $\tau_{\alpha\alpha}$ reell sind, während ihre übrigen $\tau_{\alpha\beta}$ sämmtlich den imaginären Bestandtheil $\frac{i}{2}$ aufweisen. *Dieses Weichold'sche Schema ist indessen überflüssig.* Ich sage, dass man für die diasymmetrische Fläche ohne Symmetrielinie immer dasselbe Schema aufstellen kann, wie für die niederste orthosymmetrische Fläche; nur sind bei ihr die zu diesem Schema gehörigen j_α' als rein imaginär zu bezeichnen, die j_α selbst also als reell. Man führe nämlich die gegebene diasymmetrische Fläche durch Continuität in den zugehörigen hyperelliptischen Fall (mit lauter imaginären Verzweigungspunkten) über. Die so gewonnene hyperelliptische Fläche gehört dann von selbst, wie wir wissen, zugleich der niedersten orthosymmetrischen Art an. Man ziehe auf ihr jetzt diejenigen Querschnitte, wie sie Weichold für diese orthosymmetrische Art vorschreibt. Zugleich construire man diesen Querschnitten zugehörig genau dieselben Integrale wie im orthosymmetrischen Falle. Diese Integrale, welche im orthosymmetrischen

Falle reell waren, werden eben desshalb jetzt als rein imaginär zu bezeichnen sein. Denn diese Integrale haben alle die Gestalt:

$$\int \frac{\varphi_{p-1} \cdot dz}{\sqrt{f_{2p+2}}}$$

(unter φ_{p-1} ein Polynom $(p-1)^{\text{ten}}$ Grades von z verstanden) und hier ist nun die $\sqrt{f_{2p+2}}$ im orthosymmetrischen Falle gleich s, in unserem diasymmetrischen Falle aber gleich is' zu setzen. Endlich gehe man von der hyperelliptischen Fläche durch Continuität zur ursprünglichen Fläche zurück, indem man Sorge trägt, dass die Querschnitte dabei fortgesetzt diejenige Symmetrieeigenschaft behalten, welche sie auf der hyperelliptischen Fläche bezüglich der zugehörigen symmetrischen Umformung Σ_2 besessen haben. —

b) Lassen wir dem gerade Gesagten zufolge das besondere Schema der nulltheiligen Curve bei Seite, so bleiben $\left[\frac{3p+2}{2}\right]$ unabhängige Periodicitätsschemata für die $\left[\frac{p+2}{2}\right]$ orthosymmetrischen und die p von uns beibehaltenen diasymmetrischen Arten übrig. *Diese Schemata können bei beliebigem p durch Abänderung der Schnittsysteme unmöglich auf einander reducirt werden.* Von dem Schema hängt nämlich, wie wir bald sehen werden, in einfacher Weise die jeweilige Gesammtzahl der reellen Φ ab, und diese Gesammtzahl ist bei jeder der genannten Arten eine andere (ausgenommen den niedersten diasymmetrischen und niedersten orthosymmetrischen Fall eines ungeraden p). — Da scheint nun, auf den ersten Blick, ein Widerspruch vorzuliegen gegen ein Resultat, welches Hr. Hurwitz in Bd. 94 des Journals für Mathematik (1882) abgeleitet hat. Hr. Hurwitz untersucht dort von dem Allgemeinbegriff *reeller* $2p$-fach periodischer Functionen ausgehend deren Periodicitätseigenschaften und bringt dieselben auf nur $(p+1)$ Schemata zurück, die so construirt sind, dass die Perioden zweiter Art entweder nirgends oder nur in einer Anzahl von Gliedern der Hauptdiagonale den imaginären Bestandtheil $\frac{i}{2}$ aufweisen, sofern man die Perioden erster Art in der Weise rein imaginär gewählt hat, wie wir dies bei den j_α' gethan haben. Das wäre also unser oberstes orthosymmetrisches Schema zusammen mit unseren p diasymmetrischen Schematen. — Aber der Widerspruch ist nur scheinbar, wie mir Hr. Burkhardt bemerkt. Hurwitz sagt in der That nirgends, dass er *kanonische* Perioden betrachten will. Und verzichtet man hierauf, so sind aus den orthosymmetrischen Schematen mit $\lambda < p+1$ natürlich sofort diasymmetrische zu machen. Man hat nur die Colonnen B_λ und $B_{\lambda+1}, \ldots, B_{p-1}$ und B_p zu vertauschen. —

§ 8.

Directe Abzählung der reellen F_μ in den Fällen $\lambda > 0$.

Auf Grund der mitgetheilten Schemata erledigt sich nun die Abzählung der Schaaren reeller F_μ in den hier zu betrachtenden Fällen $\lambda > 0$ mit grosser Leichtigkeit. Wir werden zunächst Einiges über die Werthe behaupten, welche unsere Integrale j_α' annehmen, wenn man sie von einem Punkte z der ausgezeichneten Symmetrielinie nach einem anderen Punkte x der symmetrischen Fläche hinleitet. Die Richtigkeit dieser Behauptungen ergiebt sich aus den jeweiligen geometrischen Verhältnissen sofort; wir brauchen dabei nicht zu verweilen. Wir haben:

1) *Ist x selbst ein Punkt der ausgezeichneten Symmetrielinie, so sind sämmtliche $j_\alpha'^{x,z}$ reell (d. h. bis auf beliebig hinzuzufügende Multipla der Perioden reell).*

2) *Liegt dagegen x auf einer der anderen Symmetrielinien, sagen wir auf A_β, so wird das $j_\beta'^{x,z}$, modulo der Perioden genommen, den Bestandtheil $\frac{i}{2}$ aufweisen; die anderen $j_\alpha'^{x,z}$ sind wie ad 1) reell.*

3) *Ist x ein beliebiger Punkt der Riemann'schen Fläche und $\bar{x}$ der zu ihm symmetrische Punkt, so wird $j_\alpha'^{x,z} + j_\alpha'^{\bar{x},z}$ bis auf Multipla der Perioden allemal einer reellen Grösse gleich sein.*

Wir betrachten ferner irgend welches Umkehrproblem:

$$j_\alpha'^{x_1,z} + j_\alpha'^{x_2,z} + \cdots \equiv K_\alpha (\text{mod. } P_{\alpha\beta},\, P_{\alpha\beta}')$$

und fragen, wie hier die K_α beschaffen sein müssen, damit die x, soweit sie nicht den verschiedenen Symmetrielinien angehören, paarweise symmetrisch ausfallen, damit also das Umkehrproblem eine *reelle Lösung* zulasse, wie wir sagen wollen. Offenbar kommt:

Zu dem genannten Zwecke ist nothwendig und hinreichend, dass, von Multiplis der Perioden abgesehen,

diejenigen K_α, deren Index $> (\lambda - 1)$ ist, reell sind,

diejenigen K_α aber, deren Index $\leqq (\lambda - 1)$ ist, entweder reell sind oder den imaginären Bestandtheil $\frac{i}{2}$ aufweisen.

Und zwar werden wir, was die einzelne reelle Lösung des Umkehrproblems angeht, sagen dürfen:

Je nachdem das einzelne K_α der letzteren Kategorie $\big(\alpha \leqq (\lambda - 1)\big)$ reell ist oder den imaginären Bestandtheil $\frac{i}{2}$ besitzt, wird die Symmetrielinie A_α eine gerade oder ungerade Zahl bezüglicher Punkte x enthalten.

Damit ist denn zugleich gesagt, ob die „ausgezeichnete" Symmetrielinie eine gerade oder ungerade Zahl der Punkte x trägt; dies wird ersichtlich davon abhängen, ob die Gesammtzahl der gesuchten x von

der Zahl der auf die $A_1, \ldots, A_{\lambda-1}$ entfallenden x um eine gerade oder ungerade Differenz abweicht. —

So vorbereitet greifen wir jetzt auf die Ansätze des § 4 zurück, indem wir nur die damals zu Grunde gelegten beliebigen Integrale erster Gattung w_α durch die reellen Integrale j_α' ersetzen. Wir nehmen dementsprechend zunächst die $2p-2$ Schnittpunkte $x_1, x_2, \ldots, x_{2p-2}$ unserer Curve mit irgendwelcher φ und schreiben:

$$j_\alpha'^{x_1, z} + j_\alpha'^{x_2, z} + \cdots + j_\alpha'^{x_{2p-2}, z} \equiv k_\alpha \text{ (mod. } P_{\alpha\beta},\ P'_{\alpha\beta}).$$

Möge die φ hier insbesondere reell sein. Dann liegen die x, soweit sie nicht paarweise conjugirt imaginär sind, in gerader Zahl auf die verschiedenen reellen Züge unserer Curve vertheilt. Daher kommt:

Die k_α sind bis auf Multipla der Perioden reellen Grössen gleich.

Dementsprechend mögen wir uns fortan die k_α als reelle Grössen denken. Wir bilden uns jetzt die 2^{2p} Umkehrprobleme, von deren Auflösung die Bestimmung der F_μ ($\mu > 1$) abhängt:

$$j_\alpha'^{x_1, z} + \cdots + j_\alpha'^{x_{\mu(p-1)}, z} \equiv \frac{\mu k_\alpha}{2} + \sum \varrho_\beta \frac{P_{\alpha\beta}}{2} + \sum \varrho_\beta' \frac{P'_{\alpha\beta}}{2}.$$

Welche dieser Umkehrprobleme werden reelle Lösungen zulassen? Indem wir die näheren Angaben über die $P_{\alpha\beta}$, $P'_{\alpha\beta}$ heranziehen, die wir im vorigen Paragraphen entwickelten, kommt:

Nur diejenigen Umkehrprobleme, bei denen die Zahlen ϱ_λ', $\varrho_{\lambda+1}', \ldots \varrho_p'$ verschwinden, ergeben reelle Lösungen (und also Schaaren reeller F_μ).

Von den 2^{2p} Umkehrproblemen sind dies $2^{p+\lambda-1}$, in Uebereinstimmung mit unserer früheren Angabe. Ferner aber:

Von den zugehörigen Punkten x liegen auf der Symmetrielinie A_β eine gerade oder ungerade Zahl, jenachdem ϱ_β gleich Null oder Eins ist.

Auf der ausgezeichneten Symmetrielinie findet sich eine gerade oder ungerade Zahl der Punkte x, jenachdem $\mu(p-1) - \sum_1^{\lambda-1} \varrho_\beta$ gerade oder ungerade ist.

Alle F_μ gegebener Ordnung also, die in den $\varrho_1, \ldots \varrho_{\lambda-1}$ übereinstimmen, zeigen betreffs der Vertheilungsweise der Punkte x auf die verschiedenen Symmetrielinien einen übereinstimmenden Charakter, sie gehören im Sinne der früheren Benennung zu derselben *Classe*. Wir sehen:

Die einzelne Classe ist durch die Werthe der $\varrho_1, \ldots \varrho_{\lambda-1}$ bestimmt.

Hat man über die $\varrho_1, \ldots \varrho_{\lambda-1}$ irgend verfügt, so können die $\varrho_\lambda, \ldots \varrho_p$ und die $\varrho_1' \ldots \varrho_{\lambda-1}'$ noch beliebig angenommen werden, was 2^p Möglichkeiten gibt. Daher:

Jede combinatorisch mögliche Classe existirt und enthält noch 2^p *verschiedene Arten von* F_μ. —

Damit haben wir in der That die sämmtlichen für die F_μ von uns aufgestellten Sätze für die hier in Betracht kommenden Fälle ($\lambda > 0$) zur Ableitung gebracht. Wir haben aber noch mehr gewonnen. In der That sehen wir, wie sich die *reellen* F_μ von den imaginären und hinwieder die verschiedenen *Classen* reeller F_μ von einander durch ihre „Elementarcharakteristiken“ ϱ_β, ϱ_β' unterscheiden. Von hier aus ist dann nur noch ein Schritt, um bei einer Curve, bei welcher man die sämmtlichen *Arten* reeller F_μ geometrisch beherrscht, für jede derselben die ganze Reihe der zugehörigen ϱ_β, ϱ_β' anzuschreiben. Ich will annehmen, dass wir das Gleiche auch für die „Primcharakteristiken“ geleistet hätten, welche den F_μ ungerader Ordnung, bez. den Φ zuzuordnen sind; ich werde darüber im folgenden Paragraphen noch nähere Bemerkungen machen. Wir sind dann in der Lage, alle die schönen Theoreme, die man über die Gruppirung der Charakteristiken besitzt, was die reellen F_μ und die reellen Φ angeht, in die volle geometrische Anschauung zu übersetzen. Die Schwierigkeit liegt hier nur im Vordersatz. Was gibt es für Curven der φ, bei denen man die sämmtlichen Arten reeller F_μ wie Φ auf Grund bestimmter geometrischer Definitionen auseinanderhalten kann? Natürlich sind die hyperelliptischen Curven in diesem Falle; bei ihnen sind ja die sämmtlichen F_μ wie die Φ durch ihr Verhalten zu den Verzweigungspunkten des Gebildes algebraisch bestimmt, wie wir in § 5 des Näheren ausführten. Da hat es in der That keine Schwierigkeit jeder reellen F_μ oder Φ diejenige Charakteristik ϱ_β, ϱ_β' oder auch diejenige Primcharakteristik zuzusetzen, die ihr vermöge unserer Festsetzungen zukommt. Von da aus beherrscht man dann durch Continuität die reellen F_μ und Φ bei allen denjenigen unserer Curven, die eben aus den hyperelliptischen Fällen durch Continuität hervorgehen, d. h. also in den beiden äussersten orthosymmetrischen und in den sämmtlichen diasymmetrischen Fällen (inclusive den Fall $\lambda = 0$). Die verschiedenen Schaaren der F_μ sind dabei nicht mehr algebraisch, sondern nur noch durch *Ungleichheiten* getrennt, die in abstracto vielleicht schwierig zu formuliren aber bei jeder ausgeführten Figur unmittelbar zu verstehen sind. Ich darf mich in diesem Betracht auf die Zeichnungen berufen, die ich in Band 11 der Annalen für die viertheilige ebene Curve vierter Ordnung gegeben habe (wobei ich gleich die Bemerkung zufügen will, dass die Festlegung der dort für das hyperelliptische Gebilde gebrauchten Primcharakteristiken vermöge der Regeln, welche Hr. Burkhardt und ich über diesen Gegenstand in Bd. 32 der Annalen (p. 426, 358) entwickelt haben, wesentlich vereinfacht werden kann). — Die Frage bleibt, wie man das Gleiche für die „mittleren“ orthosym-

metrischen Fälle soll leisten können, welche dem hyperelliptischen Ansatze unzugänglich sind. Vielleicht wird hier eine Ausbildung der Doppelpunktsmethode im Sinne der dem § 3 beigefügten Schlussbemerkungen nützlich. —

§ 9.

Von der Realität der Φ.

Sollen wir jetzt noch die Realität der Φ discutiren, so wollen wir dabei, weil es keine Mühe macht, unsere sämmtlichen Curvenarten, auch die mit $\lambda = 0$, gleichförmig neben einander behandeln. Bemerken wir zunächst, dass in allen Fällen das „normale" Coordinatensystem, das wir durch die Formeln definirten:

$$\varphi_1 : \cdots : \varphi_p = dj_1 : \cdots : dj_p,$$

insofern doch die dj_α mit den dj'_α proportional sind, *reell* ist. In Bezug auf dieses Coordinatensystem stellen sich nun die Φ des allgemeinen Falles [und nur von diesen soll hier die Rede sein] nach Formel (8) des § 4 durch die Gleichung dar:

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial j_1}\right)_{0\ldots 0} \cdot \varphi_1 + \cdots + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial j_p}\right)_{0\ldots 0} \cdot \varphi_p = 0;$$

ϑ soll dabei der Reihe nach alle ungeraden ϑ-Functionen bedeuten. *Wir werden hiernach die sämmtlichen reellen Φ erhalten, indem wir unter den ungeraden ϑ jeweils diejenigen heraussuchen, bei denen sich die Nullwerthe der Differentialquotienten* $\frac{\partial \vartheta}{\partial j_1}, \cdots \frac{\partial \vartheta}{\partial j_p}$ *vermöge der in § 7 gegebenen Schemata der $\tau_{\alpha\beta}$ wie reelle Grössen verhalten.* Dies ist eine ganz elementare Aufgabe. Wir finden sofort: dass bei Zugrundelegung der *orthosymmetrischen* Schemata reelle Φ von denjenigen ungeraden ϑ geliefert werden, welche *verschwindende* $g_\lambda, g_{\lambda+1}, \ldots g_p$ besitzen, im Falle der *diasymmetrischen* Schemata aber von den anderen, *deren* $g_\lambda, g_{\lambda+1}, \ldots g_p$ *gleich Eins sind.* Hieran schliesst sich dann folgende Abzählung:

In den orthosymmetrischen Fällen wird man, um reelle Φ zu bekommen, die $h_\lambda, \ldots h_p$ ganz beliebig annehmen können, dagegen die $g_1, \ldots g_{\lambda-1}$ und $h_1, \ldots h_{\lambda-1}$ der einen Bedingung unterwerfen müssen, dass $g_1 h_1 + \cdots + g_{\lambda-1} h_{\lambda-1}$ ungerade sein soll. *Dies gibt*

$$2^{p-\lambda+1} \cdot 2^{\lambda-2}(2^{\lambda-1} - 1) = 2^{p-1}(2^{\lambda-1} - 1)$$

reelle Φ. Der Minimalwerth von λ ist hier für gerade p, wie wir wissen, gleich 1, für ungerade p gleich 2. Dies gibt für die niederste orthosymmetrische Curve beziehungsweise 0 und 2^{p-1} reelle Φ. Eben diese Zahlen gelten dann auch für die zugehörige *nulltheilige* Curve, wie aus den Angaben, die wir über deren Periodicitätsschema machten,

ohne weiteres hervorgeht. Was die anderen diasymmetrischen Fälle angeht, so werden wir bei ihnen (um reelle Φ zu bekommen) die Grössen $g_1, \ldots g_{\lambda-1}, h_1, \ldots h_{\lambda-1}$ beliebig annehmen dürfen und haben dann die $h_\lambda \ldots h_p$ der einen Bedingung zu unterwerfen, dass

$$g_1 h_1 + \cdots + g_{\lambda-1} h_{\lambda-1} + h_\lambda + \cdots + h_p$$

ungerade sein soll. *Dies gibt ersichtlich* $2^{p+\lambda-2}$ *reelle* Φ. — Wir haben damit die früheren Angaben über die Gesammtzahlen der reellen Φ sämmtlich bestätigt. —

Das Problem der Φ ist jetzt für alle diejenigen Curven bereits erledigt, bei denen es hinsichtlich der Φ nur eine combinatorische Möglichkeit gibt, insbesondere also bei der nulltheiligen Curve und bei geradem p für die niedrigste orthosymmetrische Curve. Bei den übrigen Curven wird jetzt zu beweisen sein, was in § 6 über die Zugehörigkeit der verschiedenen reellen Φ zu den einzelnen Ovalen der Curven behauptet wurde. *Hier gehe ich nun den Weg der vollen Induction, indem ich die Doppelpunktsmethode des* § 3 *heranziehe* (die ja bei allen hier noch in Betracht kommenden Curven ohne Weiteres angewandt werden kann), folgendermassen:

Wir ziehen ein beliebiges Oval der uns vorgelegten Curve C_{2p-2} des Raumes von $(p-1)$ Dimensionen zu einem isolirten Punkt zusammen. Dabei verwandeln sich diejenigen reellen Φ, welche das Oval *ungeradzahlig* berührten, indem sie *paarweise zusammenfallen*, in solche Φ, *welche durch den Doppelpunkt hindurchgehen;* die anderen reellen Φ erleiden keine besondere Aenderung, sie haben mit dem Doppelpunkte nichts zu schaffen. Wir achten nun insbesondere auf die ersteren Φ und bemerken, dass sie bei der Projection vom Doppelpunkte aus direct die Φ' (wollen wir sagen) derjenigen C'_{2p-4} des Raumes von $(p-2)$ Dimensionen liefern, in welche sich unsere C_{2p-2} projicirt. Aber diese C'_{2p-4} ist nichts anderes als die Normalcurve des Geschlechtes $(p-1)$. Daher werde angenommen, dass für sie unser Satz über die Vertheilungsweise der reellen Φ auf die verschiedenen Classen bereits bewiesen sei, dass also bei den zugehörigen Φ' innerhalb jeder combinatorisch möglichen Classe 2^{p-2} Individuen vorhanden seien, ausgenommen die Classe $\omega' = \lambda - 1$ der orthosymmetrischen Fälle, der keinerlei Φ' angehören. Wir gehen jetzt zur ursprünglichen C_{2p-2} zurück. Da spaltet sich denn umgekehrt jede reelle Φ' in zwei reelle Φ, welche das aus dem Doppelpunkte entstehende Oval ungeradzahlig berühren, und es entstehen so aus den 2^{p-2} Φ' einer Classe 2^{p-1} Φ, welche wieder einer Classe angehören. Wir werden schliessen, dass unsere Behauptung über die Anzahl der reellen Φ in den verschiedenen combinatorisch möglichen Classen für alle Φ der ursprünglichen Curve, welche das ausgezeichnete Oval ungeradzahlig berühren, richtig ist.

Aber das ausgezeichnete Oval ist doch nur ein beliebiges unter den übrigen. Wir schliessen:

Ist unser Theorem für das Geschlecht $(p-1)$ *richtig, so ist es auch beim Geschlechte* p *richtig hinsichtlich aller derjenigen* Φ, *welche wenigstens ein Curvenoval ungeradzahlig berühren.*

Daraufhin wird aber die Zahl 2^{p-1} der Φ^0, welche unserem Theoreme zufolge bei ungeradem p auftreten sollen, jedenfalls auch richtig sein. Wir brauchen, um dies zu sehen, nur die Gesammtzahl der reellen Φ, die wir vorhin bestimmten, heranzuziehen und von ihr die jetzt gewonnenen Zahlen der verschiedenartigen $\Phi^{(2)}, \Phi^{(4)}, \ldots$ zu subtrahiren. Wir sehen:

Unser Satz ist allgemein für das Geschlecht p *richtig, sobald er für* $(p-1)$ *bewiesen ist,* —

und damit ist denn die Sache erledigt, da sie für $p=2$ bekanntlich stimmt.

Es erübrigt, dass wir noch einiges Wenige über die *Primcharakteristiken* sagen, welche den reellen Φ, wie den F_μ ungerader Ordnung, zukommen. Wir bemerkten bereits, dass die $g_\lambda, \ldots g_p$ der reellen Φ alle gleich 0 oder 1 sind, jenachdem es sich um eine orthosymmetrische oder diasymmetrische Curve handelt. Dies gilt gleichförmig für die F_μ ungerader Ordnung, wie die Betrachtung der geraden ϑ zeigt. Aber auch die $h_1, \ldots h_{\lambda-1}$ lassen sich für jede Φ oder F_μ sofort angeben. *Die einzelne dieser Zahlen ist nämlich* 0 *oder* 1, *je nachdem das mit gleichem Index versehene Curvenoval ungeradzahlig oder geradzahlig berührt wird. Alle* Φ *also, resp.* F_μ, *welche derselben „Classe" angehören, stimmen in den* $h_1, \ldots h_{\lambda-1}$ *überein.* Dabei haben wir, wie wir bereits bemerkten, die h_β mit den früheren ϱ'_β (die g_β mit den ϱ_β) zu vergleichen. Wir sehen dann, dass unsere Behauptung gerade entgegengesetzt zu derjenigen ist, welche wir oben für die Elementarcharakteristiken fanden: $\varrho'_\beta=0$ bedeutete damals den geradzahligen, $\varrho'_\beta=1$ den ungeradzahligen Contact mit A_β. Ich kann leider diese Angabe hier nicht näher beweisen, weil ich zu dem Zwecke das Verhalten der ϑ bei der Curve mit Doppelpunkt noch ausführlicher studiren müsste; man vergleiche hierzu die Entwickelungen auf p. 59—63 von Bd. 36 der Annalen. Uebrigens aber schliessen sich hier die Bemerkungen vom Ende des vorigen Paragraphen an, auf die ich nicht weiter zurückkomme.

Wir haben hiermit die sämmtlichen Entwickelungen durchlaufen, welche in der vorliegenden Arbeit gegeben werden sollten. Wir könnten ja mannigfache Verallgemeinerungen anschliessen, unter Festhaltung der methodischen Grundgedanken. Einmal wird man statt der f_μ,

welche unsere Curve überall berühren, solche f_μ heranziehen können, welche überall osculiren, hyperosculiren etc. (wie ich dies zum Theil schon in Bd. 10 für die dort behandelten ebenen Curven 4. Ordnung gethan habe). Dann aber wird man die Betrachtung von der Normalcurve der φ als solcher ablösen. Die Unterscheidung der symmetrischen Flächen in orthosymmetrische und diasymmetrische gibt *ein durchgreifendes Eintheilungsprincip für sämmtliche reelle Curven.* Und so oft man bei einer solchen Curve eine Anwendung der Abel'schen Functionen zu machen weiss, sind wir in der Lage, eine vollständige *Realitätsdiscussion* der bei dieser Anwendung in Betracht kommenden Gebilde hinzuzufügen.

Göttingen, den 2. September 1892.

Sui gruppi di sostituzioni lineari.

Nota di

Luigi Bianchi a Pisa.

Le ricerche seguenti servono di complemento a quelle da me pubblicate nel XL Vol° di questi Annali. In quest' ultima memoria fu già osservato che alcuni gruppi dei campi quadratici ivi considerati e precisamente i gruppi*):

$$\bar{\Gamma}^{(i\sqrt{5})},\ \bar{\Gamma}^{(i\sqrt{6})},\ \bar{\Gamma}^{(i\sqrt{10})},\ \bar{\Gamma}^{(i\sqrt{13})},\ \bar{\Gamma}^{\frac{(1+i\sqrt{15})}{2}}$$

sono suscettibili d'ulteriore ampliamento, essendo contenuti, quali sottogruppi eccezionali, in gruppi più ampî. Nella prima parte del presente lavoro si ricerca dapprima il modo generale di siffatti ampliamenti e si determinano ulteriormente i poliedri fondamentali dei gruppi

$$\bar{\Gamma}^{(i\sqrt{14})},\ \bar{\Gamma}^{(i\sqrt{17})},\ \bar{\Gamma}^{(i\sqrt{21})},\ \bar{\Gamma}^{(i\sqrt{30})},\ \bar{\Gamma}^{\frac{(1+i\sqrt{39})}{2}}.$$

E qui da osservarsi che i coefficienti delle sostituzioni deî gruppi ampliati sono sempre bensì interi algebrici, ma appartengono a campi di grado superiore al 2°; in ogni singolo caso, come si riscontra sui poliedri fondamentali determinati, l'ampliamento conseguìto è il massimo possibile. Gli esempî trattati furono scelti soltanto fra quelli, in cui le sfere di riflessione del gruppo dividono il semispazio rappresentativo in una rete di poliedri alternatamente simmetrici e congruenti (nel senso non-euclideo), con un numero finito di faccie. Ove ciò non avvenga, si può bensì coll' impiègo di altri mezzi separare ancora un poliedro fondamentale del gruppo; ma questo poliedro non offre più quella naturale determinatezza, che è propria del primo caso.**)

La seconda parte collega la teoria dei gruppi studiati e più in generale quella di tutti i gruppi discontinui di sostituzioni lineari sopra

---

*) Per le notazioni si confronti l'indicata memoria che verrà qui citata colla segnatura (M).

**) Cf. Klein-Fricke, Elliptische Modulfunctionen p^a 231.

una variabile, a coefficienti complessi, colla teoria delle forme quadratiche quaternarie, reali.

È noto come Poincaré nella sua memoria: *Les fonctions fuchsiennes et l'arithmètique**) ha stabilito un notevole principio, che permette di dedurre dalla teoria delle forme reali ternarie quadratiche una classe di gruppi discontinui di sostituzioni lineari sopra una variabile *a coefficienti reali.* Del tutto analogamente si vedrà che, presa ad arbitrio una forma reale quaternaria quadratica, riducibile con trasformazione reale al tipo

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - u_4^2,$$

ad ogni gruppo discontinuo quaternario, che la trasformi in sè medesima, corrisponde un gruppo discontinuo di sostituzioni lineari

$$\text{A)} \quad z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

sopra una variabile *a coefficienti* α, β, γ, δ *complessi.* In particolare al gruppo *aritmetico* riproduttivo di una forma *aritmetica* (a coefficienti interi) corrisponde un tale gruppo **poliedrico****) e i coefficienti delle sue sostituzioni risultano in tal caso numeri algebrici. Così i gruppi $\bar{\Gamma}^{(i\sqrt{D})}$, studiati precedentemente, corrispondono nel senso ora indicato ad un sottogruppo del gruppo aritmetico riproduttivo per la forma quaternaria

$$x_2^2 + Dx_3^2 - x_1 x_4.$$

All' interesse aritmetico di siffatte ricerche una recente osservazione di **Klein** aggiunge importanza analitica. Klein osserva infatti***) che un gruppo poliedrico A) pure essendo *impropriamente discontinuo* quando le sue sostituzioni operano sopra una sola variabile z, diventa al contrario *propriamente discontinuo*, se queste si effettuano simultaneamente sopra due variabili z, t:

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad t' = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}.$$

Vi corrispondono quindi funzioni *automorfe* $F(z, t)$ di due variabili, che si riproducono per quelle sostituzioni simultanee. Ci troviamo

*) Journal de Mathématiques S^e IV, T. III, 1887.

**) Per brevità di linguaggio mi sono permesso di introdurre in questa nota alcune nuove denominazioni. Un gruppo A) che non abbia sostituzioni infinitesimali può essere *propriamente discontinuo* in convenienti regioni del piano z ovvero dappertutto *impropriamente discontinuo.* Nel 1° caso dà luogo ad una divisione del piano in una rete di poligoni e si dirà un *gruppo poligonale.* Nel 2° caso invece dà luogo soltanto, nella rappresentazione geometrica di Poincaré, ad una divisione dello spazio in una rete di poliedri e si dirà un *gruppo poliedrico.*

***) Lezioni litografate sulla teoria delle equazioni differenziali lineari di 2° ordine, Sommersemester 1891, p^a 61.

così nel campo delle funzioni *iperabeliane* di Picard. Gli studî del Sig[r] Picard sulle funzioni e sui gruppi iperabeliani*) trovano anch' essi il loro fondamento nella teoria delle forme quaternarie quadratiche e precisamente di quelle che si possono ridurre con trasformazione reale al tipo $u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2$. Il nuovo caso ora indicato sembra più facilmente accessibile, come quello che ammette una più semplice rappresentazione geometrica. Spero che mi sia dato in seguito di riprendere e sviluppare le presenti ricerche, di cui qui ho potuto soltanto tracciare le linee generali.

Parte 1ª.

I gruppi quadratici ampliati e i loro poliedri fondamentali.

§ 1.

I gruppi ampliati.

La possibilità di ampliare i gruppi $\bar{\Gamma}^{(\omega)}$ dipende da alcuni principii generali, che è bene premettere.

Supponiamo di avere una serie infinita di numeri costituenti, nel senso di Dedekind**), un *modulo* M, che goda delle proprietà seguenti:

1ª. Il prodotto di due numeri qualunque in M dia un numero intero del corpo quadratico immaginario Ω.

2ª. Il prodotto di ogni numero in M per un intero qualsiasi di Ω dia nuovamente un numero di M.

3ª. Il numero coniugato di ogni numero in M trovisi pure in M***). Supponiamo di più che esistano sostituzioni

$$B) \quad z' = \frac{az + b}{cz + d}$$

a determinante $ad - bc = \pm 1$, i cui coefficienti a, b, c, d siano numeri del modulo M. Se indichiamo col simbolo generico S le sosti-

---

*) Journal de Mathém. S° IV, T. I, 1885.

**) V[d] il Supplemento XI alle lezioni sulla teoria dei numeri di Dirichlet § 165 (3ª edizione).

***) Nel caso nostro i moduli M saranno a base binaria

$$M = [\lambda, \mu]$$

e per verificare le proprietà enunciate basterà confrontare la base di M colla base $[1, \omega]$ di Ω. Così dovremo avere 1° che i numeri

$$\lambda^2, \lambda\mu, \mu^2$$

sono interi in Ω, 2° i numeri

$$\omega\lambda, \omega\mu$$

sono in M, 3° i numeri λ_0, μ_0 coniugati di λ, μ sono in M.

tuzioni di $\Gamma^{(\omega)}$, col simbolo T quelle del tipo B), le proprietà supposte pel modulo M portano per conseguenza che il prodotto di due sostituzioni T è una S, e il prodotto di una S per una T è nuovamente una T, onde le sostituzioni S, T formano complessivamente un gruppo, che contiene $\Gamma^{(\omega)}$ quale sottogruppo eccezionale d'indice 2. Inoltre, per la 3ª proprietà supposta, il nuovo gruppo è alla sua volta permutabile colla riflessione $z' = z_0$ e associando alle sostituzioni dell' ultimo gruppo le sostituzioni di 2ª specie che risultano da queste, cangiandovi z' in z_0, otterremo un nuovo gruppo che contiene $\bar{\Gamma}^{(\omega)}$ come sottogruppo eccezionale d'indice 2.

Consideriamo ora il caso in cui il complesso dei numeri interi nel corpo quadratico Ω ha la base $[1, i\sqrt{D}]$, essendo

$$D \equiv 2 \quad \text{o} \quad D \equiv 1 \, (\text{mod. } 4),$$

e indichiamo con m uno qualunque dei divisori di D. Vediamo subito che il modulo

$$M = \left[\sqrt{m},\ i\sqrt{\frac{D}{m}}\right]$$

gode, rispetto alcorpo Ω, delle proprietà sopra enunciate. Se si ricorda inoltre che il numero D è supposto privo di fattori quadrati e in conseguenza i due numeri m, $\frac{D}{m}$, sono primi fra loro, è facile vedere che esistono sostituzioni B) a determinante ± 1 formate con coefficienti appartenenti a M. E infatti si risolva p. e. in numeri razionali interi a, b l'equazione

$$ma + \frac{D}{m} b = \pm 1$$

e la sostituzione

$$z' = \frac{a\sqrt{m}z + ib\sqrt{\frac{D}{m}}}{i\sqrt{\frac{D}{m}}z + \sqrt{m}}$$

apparterrà alla classe richiesta.

Osserviamo di più che se

$$M = \left[\sqrt{m},\ i\sqrt{\frac{D}{m}}\right], \quad M' = \left[\sqrt{m'},\ i\sqrt{\frac{D}{m'}}\right]$$

sono due moduli della specie descritta, appartenenti a due diversi divisori m, m' di D, il loro *prodotto* è nuovamente un modulo della medesima specie ed appartiene a quel divisore di D, che è composto dei fattori primi di m, m' non comuni ad ambedue questi numeri. Ne risulta che se si fanno percorrere a m tutti i divisori di D e si considerano tutte le sostituzioni di 1ª e 2ª specie a determinante ± 1 formate con numeri dei corrispondenti moduli M, queste costituiranno un gruppo che conterrà il primitivo $\bar{\Gamma}^{(i\sqrt{D})}$ come sottogruppo eccezio-

nale; il gruppo ampliato, nel caso $D \equiv 2 (\mathrm{mod.}\ 4)$, si indicherà con $\overline{G}^{(i\sqrt{D})}$. Per valutare l'indice di $\overline{\Gamma}^{(i\sqrt{D})}$ rispetto a $\overline{G}^{(i\sqrt{D})}$ basta ora l'osservazione complementare che i due moduli

$$\left[\sqrt{m},\, i\sqrt{\frac{D}{m}}\right],\quad \left[\sqrt{\frac{D}{m}},\, i\sqrt{m}\right]$$

non differiscono, pel nostro scopo, fra di loro; si ottiene così il risultato: *Se n indica il numero dei fattori primi diversi di D, il gruppo $\overline{\Gamma}^{(i\sqrt{D})}$ è contenuto in $\overline{G}^{(i\sqrt{D})}$, quale sottogruppo eccezionale d'indice 2^{n-1}.*

§ II.

Casi $D \equiv 1$, $D \equiv 3$ (mod. 4).

L'ampliamento di $\overline{\Gamma}^{(i\sqrt{D})}$ eseguito nel precedente § vale tanto per $D \equiv 2$ come per $D \equiv 1$ (mod. 4); ma nell' ultimo caso resta ancora possibile un nuovo ampliamento. E invero al modulo

$$\mathsf{H} = \left[\sqrt{2},\, \frac{1 + i\sqrt{D}}{\sqrt{2}}\right]$$

competono allora le proprietà fondamentali enunciate al § I. Il prodotto del modulo H per un modulo M appartenente al divisore m di D è il modulo

$$K = \left[\sqrt{2m},\, \frac{\sqrt{m} + i\sqrt{\frac{D}{m}}}{\sqrt{2}}\right],$$

pel quale sono in conseguenza verificate le proprietà stesse. Inoltre constatiamo facilmente l'esistenza di sostituzioni a determinante ± 1 formate con numeri di H*), p. e. della seguente

$$z' = \frac{\frac{1 + i\sqrt{D}}{\sqrt{2}} z - \frac{D-1}{4}\sqrt{2}}{\sqrt{2} z + \frac{i\sqrt{D} - 1}{2}}.$$

Se procediamo quindi ad un nuovo ampliamento del gruppo ultimamente ottenuto, associandovi le sostituzioni del modulo H, la composizione di queste colle sostituzioni dei moduli M ci darà sostituzioni dei moduli K ed è visibile che tutte le sostituzioni così ottenute formeranno un gruppo più ampio in cui $\overline{\Gamma}^{(i\sqrt{D})}$ sarà contenuto come sottogruppo eccezionale d'indice 2^n. Il gruppo finale si indicherà qui nuovamente con $\overline{G}^{(i\sqrt{D})}$.

*) Nel caso $D \equiv 3$ (mod. 4) il modulo H gode bensì delle stesse proprietà, ma non esistono sostituzioni corrispondenti.

Consideriamo ora il caso $D \equiv 3$ (mod. 4) e il corrispondente gruppo $\overline{\Gamma}^{\left(\frac{1+i\sqrt{D}}{2}\right)}$, i coefficienti delle cui sostituzioni sono interi del campo quadratico $\left[1, \frac{1+i\sqrt{D}}{2}\right]$. Se m è un divisore qualsiasi di D, il modulo

$$M = \left[\sqrt{m}, \frac{\sqrt{m} + i\sqrt{\frac{D}{m}}}{2}\right]$$

gode delle proprietà fondamentali del § 1. Con numeri di M possono costruirsi sostituzioni a determinante 1, come p. e. la seguente:

$$z' = \frac{a\left(\sqrt{m} + i\sqrt{\frac{D}{m}}\right)z + b\sqrt{m}}{\sqrt{m}z + \left(\sqrt{m} - i\sqrt{\frac{D}{m}}\right)},$$

ove i numeri razionali interi a, b siano determinati in guisa da rendere

$$a\left(m + \frac{D}{m}\right) - bm = 1,$$

ciò che è sempre possibile essendo $m, \frac{D}{m}$ primi fra loro.

Ora il prodotto di due moduli M, M' appartenenti a due divisori diversi m, m' di D dà, come al § prec^te^, un modulo della medesima specie che appartiene al divisore di D composto dei fattori primi di m, m' non comuni ad ambedue. Si osservi inoltre che due moduli M corrispondenti ai divisori complementari $m, \frac{D}{m}$ di D danno luogo anche qui alle medesime sostituzioni. Dopo ciò è chiaro che se ampliamo $\overline{\Gamma}^{\left(\frac{1+i\sqrt{D}}{2}\right)}$ coll' aggiunta di tutte le sostituzioni di 1ª e 2ª specie, a determinante ± 1, formate con numeri dei moduli M, otteremo un gruppo in cui $\overline{\Gamma}^{\left(\frac{1+i\sqrt{D}}{2}\right)}$ sarà contenuto come sottogruppo eccezionale d'indice 2^{n-1}, ove con n s'indica al solito il numero dei fattori primi diversi di D. Pel gruppo ampliato adotteremo la notazione corrispondente $\overline{G}^{\left(\frac{1+i\sqrt{D}}{2}\right)}$.

Osserviamo in fine che i gruppi ampliati $\overline{G}^{(i\sqrt{D})}$, $\overline{G}^{\left(\frac{1+i\sqrt{D}}{2}\right)}$, a cui siamo così pervenuti hanno manifestamente per coefficienti dei numeri *interi* algebrici appartenenti a corpi di grado superiore. Così p. e. se D è un numero primo della forma $4r + 1$ e poniamo

$$\xi = \frac{1 + i\sqrt{D}}{\sqrt{2}},$$

il numero intero algebrico ξ soddisfa alla equazione biquadratica

$$\xi^4 + (D-1)\,\xi^2 + \left(\frac{D+1}{2}\right)^2 = 0$$

e i coefficienti delle sostituzioni in $\overline{G}^{(i\sqrt{D})}$ sono numeri interi del corrispondente corpo biquadratico*).

§ III.

Le nuove riflessioni nei gruppi $\overline{G}^{(\omega)}$.

Allo scopo di separare i poliedri fondamentali dei gruppi ampliati servono i principii stessi della precedente memoria, in particolare quelli sviluppati al § 10, che presuppongono la conoscenza di tutte le *riflessioni* contenute nel gruppo. Nei gruppi $\overline{G}^{(\omega)}$, oltre alle riflessioni già esistenti nei sottogruppi $\overline{\Gamma}^{(\omega)}$ (M. § 7), se ne presentano delle nuove, che, determinandosi coi noti processi (M. § 6), basterà semplicemente enumerare.

Distinguendo i tre casi $D \equiv 2, 1, 3$ (mod. 4) otteniamo i risultati seguenti:

1º *caso* $D \equiv 2$ (*mod.* 4). Fra le sostituzioni di 2ª specie con coefficienti del modulo M appartenente secondo il § I al divisore m di D figurano le riflessioni dei due tipi seguenti

Tipo I)

Sostituzione $$z' = \frac{\left(a_1\sqrt{m} + i a_2\sqrt{\frac{D}{m}}\right) z_0 + b_1\sqrt{m}}{c_1\sqrt{m}\, z_0 + \left(-a_1\sqrt{m} + i a_2\sqrt{\frac{D}{m}}\right)},$$

$$\text{(A)} \quad m a_1^2 + \frac{D}{m} a_2^2 + m b_1 c_1 = 1,$$

Sfera di riflessione $$\left(\xi - \frac{a_1}{c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2\sqrt{D}}{m c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{c_1\sqrt{m}}\right)^2.$$

---

*) Per convincersene basta osservare che le irrazionalità

$$\sqrt{2},\quad i\sqrt{D}$$

si esprimono razionalmente per ξ colle formole

$$i\sqrt{D} = \xi^2 + \frac{D-1}{2},$$

$$\sqrt{2} = \xi + \frac{D+1}{2\xi}.$$

Tipo II)

Sostituzione $$z' = \frac{\left(a_1\sqrt{m} + ia_2\sqrt{\frac{D}{m}}\right) z_0 + ib_1\sqrt{\frac{D}{m}}}{ic_1\sqrt{\frac{D}{m}}\, z_0 + \left(a_1\sqrt{m} - ia_2\sqrt{\frac{D}{m}}\right)},$$

$$\text{(B)}\quad m a_1^2 + \frac{D}{m} a_2^2 + \frac{D}{m} b_1 c_1 = 1,$$

Sfera di riflessione $$\left(\xi - \frac{a_2}{c_1}\right)^2 + \left(\eta + \frac{m a_1}{\sqrt{D}}\right)^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{c_1\sqrt{\frac{D}{m}}}\right)^2.$$

I numeri a_1, a_2, b_1, c_1 debbono essere razionali interi legati fra loro nei due casi rispettivamente dalla equazione (A) o dalla (B). Da queste ultime risulta che le riflessioni del tipo I) si presentano solo se $\frac{D}{m}$ è residuo quadratico di m, quelle del tipo II) quando m sia residuo quadratico di $\frac{D}{m}$.

2^0 *caso* $D \equiv 1$ (*mod.* 4). Oltre alle riflessioni dell' antico gruppo $\Gamma^{(i\sqrt{D})}$ e quelle dei tipi I), II), avremo qui riflessioni di altri quattro tipi fra le sostituzioni appartenenti ai moduli H, K (§ II). Troviamo infatti pei moduli H le riflessioni seguenti:

Tipo III)

Sostituzione $$z' = \frac{\frac{a_1 + ia_2\sqrt{D}}{\sqrt{2}}\, z_0 + b_1\sqrt{2}}{c_1\sqrt{2}\, z_0 + \frac{-a_1 + ia_2\sqrt{D}}{\sqrt{2}}},$$

$$\text{(C)}\quad a_1^2 + D a_2^2 + 4 b_1 c_1 = 2,$$

Sfera di riflessione $$\left(\xi - \frac{a_1}{2c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2\sqrt{D}}{2c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{c_1\sqrt{2}}\right)^2.$$

Tipo IV)

Sostituzione $$z' = \frac{\frac{a_1 + ia_2\sqrt{D}}{\sqrt{2}}\, z_0 + ib_1\sqrt{2D}}{ic_1\sqrt{2D}\, z_0 + \frac{a_1 - ia_2\sqrt{D}}{\sqrt{2}}},$$

$$\text{(D)}\quad a_1^2 + D a_2^2 + 4D b_1 c_1 = 2,$$

Sfera di riflessione $$\left(\xi - \frac{a_2}{2c_1}\right)^2 + \left(\eta + \frac{a_1}{2c_1\sqrt{D}}\right)^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{c_1\sqrt{2D}}\right)^2,$$

a_1, a_2, b_1, c_1 indicando nuovamente numeri razionali interi, soggetti alle rispettive condizioni (C), (D). Come si vede, le riflessioni del tipo III) esistono in ogni caso, quelle del tipo IV) invece solo quando 2 è residuo quadratico di D.

Corrispondentemente poi ai moduli K abbiamo in $\overline{G}^{(i\sqrt{D})}$ le nuove riflessioni:

Tipo V)

$$\text{riflessione} \quad z' = \frac{\dfrac{a_1\sqrt{m} + i a_2\sqrt{\dfrac{D}{m}}}{\sqrt{2}}\, z_0 + b_1\sqrt{2m}}{c_1\sqrt{2m}\, z_0 + \dfrac{-a_1\sqrt{m} + i a_2\sqrt{\dfrac{D}{m}}}{\sqrt{2}}},$$

$$\text{(E)} \quad m a_1^2 + \frac{D}{m} a_2^2 + 4 m b_1 c_1 = 2,$$

$$\text{sfera di riflessione} \quad \left(\xi - \frac{a_1}{2c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2\sqrt{D}}{2mc_1}\right)^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{c_1\sqrt{2m}}\right)^2,$$

Tipo VI)

$$\text{riflessione} \quad z' = \frac{\dfrac{a_1\sqrt{m} + i a_2\sqrt{\dfrac{D}{m}}}{\sqrt{2}}\, z_0 + i b_1\sqrt{\dfrac{2D}{m}}}{i c_1\sqrt{\dfrac{2D}{m}}\, z_0 + \dfrac{a_1\sqrt{m} - i a_2\sqrt{\dfrac{D}{m}}}{\sqrt{2}}},$$

$$\text{(F)} \quad m a_1^2 + \frac{D}{m} a_2^2 + 4\frac{D}{m} b_1 c_1 = 2,$$

$$\text{sfera di riflessione} \quad \left(\xi - \frac{a_2}{2c_1}\right)^2 + \left(\eta + \frac{m a_1}{2c_1\sqrt{D}}\right)^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{c_1\sqrt{\dfrac{2D}{m}}}\right)^2.$$

Per l'esistenza delle riflessioni del tipo V) richiedesi che 2 e $\frac{D}{m}$ abbiano lo stesso carattere quadratico (mod. m); per quelle del tipo VI) che 2 e m abbiano lo stesso carattere quadratico $\left(\text{mod. } \frac{D}{m}\right)$.

3° *caso* $D \equiv 3$ (*mod.* 4). Fra le sostituzioni dei moduli M (§ II) troviamo le nuove riflessioni:

Tipo VII)

$$\textit{riflessione}\ \ z' = \frac{\dfrac{a_1\sqrt{m} + i a_2\sqrt{\dfrac{D}{m}}}{2}\, z_0 + b_1\sqrt{m}}{c_1\sqrt{m}\, z_0 + \dfrac{-a_1\sqrt{m} + i a_2\sqrt{\dfrac{D}{m}}}{2}},$$

$$\text{(G)}\quad m a_1^2 + \frac{D}{m} a_2^2 + 4 m b_1 c_1 = 4,$$

$$\textit{sfera di riflessione}\ \left(\xi - \frac{a_1}{2c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2\sqrt{D}}{2 m c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{c_1\sqrt{m}}\right)^2;$$

Tipo VIII)

$$\textit{riflessione}\ \ z' = \frac{\dfrac{a_1\sqrt{m} + i a_1\sqrt{\dfrac{D}{m}}}{2}\, z_0 + i b_1\sqrt{\dfrac{D}{m}}}{i c_1\sqrt{\dfrac{D}{m}}\, z_0 + \dfrac{a_1\sqrt{m} - i a_2\sqrt{\dfrac{D}{m}}}{2}},$$

$$\text{(H)}\quad m a_1^2 + \frac{D}{m} a_2^2 + 4\frac{D}{m} b_1 c_1 = 4,$$

$$\textit{sfera di riflessione}\ \left(\xi - \frac{a_2}{2c_1}\right)^2 + \left(\eta + \frac{m a_1}{2c_1\sqrt{D}}\right)^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{c_1\sqrt{\dfrac{D}{m}}}\right)^2.$$

Quelle del tipo VII) esistono se $\frac{D}{m}$ è residuo quadratico di m, quelle del tipo VIII) se m è residuo quadratico di $\frac{D}{m}$.

§ IV.

I gruppi $\overline{G}^{(i\sqrt{5})}$, $\overline{G}^{(i\sqrt{6})}$, $\overline{G}^{(i\sqrt{10})}$, $\overline{G}^{(i\sqrt{13})}$, $\overline{G}^{\left(\frac{1+i\sqrt{15}}{2}\right)}$,

I poliedri fondamentali dei rispettivi sottogruppi $\overline{\Gamma}^{(i\sqrt{5})}$, $\overline{\Gamma}^{(i\sqrt{6})}$ . . . sono già stati determinati nella precedente memoria (§§ 14, 19); per fissare quelli dei gruppi ampliati, che li contengono quali sottogruppi eccezionali d'indice 2, procediamo come segue.

Il poliedro fondamentale di $\overline{\Gamma}^{(i\sqrt{5})}$ (M. § 14) è trasformato in sè medesimo dalla riflessione

$$z' = \frac{\dfrac{1 + i\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\, z_0 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}\, z_0 + \dfrac{-1 + i\sqrt{5}}{\sqrt{2}}}$$

del tipo III), che ha la sfera di riflessione

$$\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{2}.$$

Questa divide il primitivo poliedro in due parti equivalenti, delle quali una ad arbitrio potrà assumersi a poliedro fondamentale di $\overline{G}^{(i\sqrt{5})}$. Così possiamo definire quest' ultimo poliedro come la porzione del semispazio R, contenuta fra i quattro piani

$$\xi=0,\ \xi=\frac{1}{2},\ \eta=0,\ \eta=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

esternamente alle due sfere

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1,\ \left(\xi-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\eta-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{2}.$$

Il nuovo poliedro P, oltre il vertice *singolare* all' infinito, ha i 6 vertici

$$V_1\equiv(0,\ 0,\ 1),\qquad V_2\equiv\left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ V_3\equiv\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2\sqrt{5}},\ \sqrt{\frac{3}{10}}\right),$$

$$V_4\equiv\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{5}}{2},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ V_5\equiv\left(0,\ \frac{\sqrt{5}}{2},\ \frac{1}{2}\right),\ V_6\equiv\left(0,\ \frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right),$$

tutti al di sopra del piano $\xi\eta$. È immediatamente visibile che non vi ha nessuna sostituzione lineare nè di 1ª, nè di 2ª specie, che trasformi P in sè medesimo, onde si conclude che il gruppo $\overline{G}^{(i\sqrt{5})}$ non è suscettibile d'ulteriore ampliamento.

Nel caso $D=6$ il poliedro fondamentale di $\overline{\Gamma}^{(i\sqrt{6})}$ (M. § 15) è attraversato dalla sfera di riflessione del tipo III)

$$\xi^2+\left(\eta-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{2}$$

e per poliedro fondamentale di $\overline{G}^{(i\sqrt{6})}$ può assumersi quello racchiuso in R dai quattro piani

$$\xi=0,\ \xi=\frac{1}{2},\ \eta=0,\ \eta=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

esternamente alle due sfere

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1,\ \ \xi^2+\left(\eta-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{2}.$$

Oltre il vertice all' infinito, abbiamo qui i 6 vertici non singolari

$$V_1\equiv(0,\ 0,\ 1),\qquad V_2\equiv\left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \ V_3\equiv\left(\frac{1}{2},\ \frac{2}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{2\sqrt{3}}\right),$$

$$V_4\equiv\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{6}}{2},\ \frac{1}{2}\right),\ \ V_7\equiv\left(0,\ \frac{\sqrt{6}}{2},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \ V_8\equiv\left(0,\ \frac{2}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Un nuovo ampliamento di $\overline{G}^{(i\sqrt{6})}$ è, come si vede, impossibile. Del tutto analogamente si utilizzeranò, nei casi $D=10$, $D=13$, le rispettive sfere di riflessione

$$\xi^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{2},$$
$$\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{2}$$

e si vedrà che i gruppi ampliati $\overline{G}^{(i\sqrt{10})}$, $\overline{G}^{(i\sqrt{13})}$ non consentono ulteriore ampliamento.

Nel caso $D = 15$, essendo $\left(\frac{3}{5}\right) = \left(\frac{5}{3}\right) = -1$, il gruppo $\overline{G}^{\left(\frac{1+i\sqrt{15}}{2}\right)}$ non contiene altre riflessioni che quelle del sottogruppo $\overline{\Gamma}^{\left(\frac{1+i\sqrt{15}}{2}\right)}$. Il poliedro, limitato da sfere di riflessione, definito al § 19 (M), è trasformato in sè medesimo soltanto dalle 3 sostituzioni (ellittiche a periodo 2):

$$z' = -z + \frac{1+i\sqrt{15}}{2}, \quad z' = \frac{\frac{-\sqrt{3}+i\sqrt{5}}{2} z_0 + \frac{\sqrt{3}+i\sqrt{5}}{2}}{\frac{\sqrt{3}+i\sqrt{5}}{2} z_0 + \frac{\sqrt{3}-i\sqrt{5}}{2}},$$

$$z' = \frac{\frac{-\sqrt{3}+i\sqrt{5}}{2} z_0 + \sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}+i\sqrt{5}}{2} z_0 + \frac{\sqrt{3}-i\sqrt{5}}{2}},$$

le quali, insieme coll' identità, formano un *Vierergruppe*.

I tre circoli fissi di queste sostituzioni ellittiche $\Big($dei quali il primo si riduce alla retta normale al piano $\xi\eta$ nel punto $\frac{1+i\sqrt{15}}{4}\Big)$ escono, due a due ortogonali, dal punto $V \equiv \left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ interno al poliedro. A poliedro fondamentale del gruppo $\overline{G}^{\left(\frac{1+i\sqrt{15}}{2}\right)}$ può prendersi una qualunque delle quattro parti in cui i piani dei due ultimi circoli dividono il poliedro primitivo.

§ V.

Il gruppo $\overline{G}^{(i\sqrt{14})}$.

Nel gruppo $\overline{G}^{(i\sqrt{14})}$ si presentano le sfere di riflessione dei quattro tipi)

$$\text{a)} \quad \begin{cases} \left(\xi - \frac{a_1}{c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2\sqrt{14}}{c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{c_1^2}, \\ a_1^2 + 14a_2^2 + b_1c_1 = 1; \end{cases}$$

$$\text{b)} \quad \begin{cases} \left(\xi - \frac{a_2}{c_1}\right)^3 + \left(\eta - \frac{a_1}{c_1\sqrt{14}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{14c_1^2}, \\ a_1^2 + 14a_2^2 + 14b_1c_1 = 1; \end{cases}$$

$$\text{c)}\quad \begin{cases} \left(\xi - \frac{a_1}{c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2\sqrt{14}}{2c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{2c_1^2}, \\ 2a_1^2 + 7a_2^2 + 2b_1c_1 = 1; \end{cases}$$

$$\text{d)}\quad \begin{cases} \left(\xi - \frac{a_2}{c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{2a_1}{c_1\sqrt{14}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{7c_1^2}, \\ 2a_1^2 + 7a_2^2 + 7b_1c_1 = 1. \end{cases}$$

Quelle dei primi due tipi, che appartengono già al sottogruppo $\overline{\Gamma}^{(i\sqrt{14})}$, sono insufficienti a limitarne il poliedro fondamentale (M. § 20), perchè il punto $\frac{1+i\sqrt{14}}{3}$ è esterno a tutte le sfere dei tipi a), b). Si dimostra subito che questo punto non è nemmeno interno ad alcuna sfera di riflessione dei nuovi tipi c), d); ma per esso passano due serie di tali sfere, le sfere di ciascuna serie c) o d) essendo tangenti fra loro ed ortogonali a quelle dell' altra serie.

Ciò posto, consideriamo la porzione di prisma racchiusa in R fra i quattro piani

$$1)\ \xi = 0,\quad 2)\ \xi = \frac{1}{2},\quad 3)\ \eta = 0,\quad 4) = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

esternamente alla sfera

$$5)\ \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

e togliamone le porzioni interne alle quatto sfere dei rispettivi tipi c), d)

$$6)\qquad \xi^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{14}}{2}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{2},$$

$$7)\ \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{14}}{2}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{8},$$

$$8)\ \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{5}{\sqrt{14}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{28},$$

$$9)\qquad \xi^2 + \left(\eta - \frac{2\sqrt{14}}{7}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{7},$$

che passano pel punto singolare $\frac{1+i\sqrt{14}}{3}$ ed hanno i massimi raggi fra le sfere delle due serie indicate. Dimostreremo che il poliedro P così definito è il poliedro fondamentale di $\overline{G}^{(i\sqrt{14})}$.

Il poliedro P ha 12 vertici, pei quali calcolando le rispettive coordinate troviamo

$V_1 \equiv (0,\ 0,\ 1)$ intersezione delle faccie 1) 3) 5),

$V_2 \equiv \left(0,\ \frac{\sqrt{14}}{2},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ " " " 1) 4) 6),

$V_3 \equiv \left(0,\ \frac{\sqrt{14}}{2},\ \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ " " " 1) 5) 9),

$V_4 \equiv \left(0, \frac{\sqrt{14}}{3}, \frac{1}{3}\right)$ insersezione delle faccie 1) 6) 9),

$V_5 \equiv \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ " " " 2) 3) 5),

$V_6 \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{14}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ " " " 2) 4) 6),

$V_7 \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}\right)$ " " " 2) 5) 7),

$V_8 \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{3\sqrt{14}}{8}, \frac{1}{4\sqrt{2}}\right)$ " " " 2) 6) 8),

$V_9 \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{14}}{3}, \frac{1}{6}\right)$ " " " 2) 7) 8),

$V_{10} \equiv \left(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{14}}{3}, 0\right)$ " " " 6) 7) 8) 9),

$V_{11} \equiv \left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{14}}{4}, \frac{1}{4}\right)$ " " " 5) 7) 9),

$V_\infty \equiv (0, 0, \infty)$ " " " 1) 2) 3) 4),

di questi vertici soltanto i due V_{10}, V_∞ sono singolari. Coi valori delle coordinate dei vertici così date esplicitamente, ci assicuriamo nel solito modo (Cf. (M) § 14) che nessuna sfera di riflessione di $\overline{G}^{(i\sqrt{14})}$ attraversa P; resta soltanto a vedersi quante sostituzioni di $\overline{G}^{(i\sqrt{14})}$ trasformano P in sè medesimo. Qui conviene però ricercare più generalmente tutte le sostituzioni lineari di 1ª o 2ª specie che cangiano P in sè medesimo, senza esigere che appartengano a $\overline{G}^{(i\sqrt{14})}$, perchè in tal modo potremo decidere nello stesso tempo se è possibile un nuovo ampliamento di $\overline{G}^{(i\sqrt{14})}$.

Ora osserviamo che in una trasformazione di P in sè stesso i due vertici singolari V_{10}, V_∞ debbono permutarsi fra loro o restare singolarmente invariati. Poichè inoltre, fra diedri di P, i due agli spigoli $\overline{V_5 V_7}$, $\overline{V_6 V_8}$ hanno rispettivamente l'ampiezza di 60^0 e di 45^0, mentre tutti gli altri sono retti, lo stesso dovrà valere delle coppie di vertici (V_5, V_7), (V_6, V_8). Dietro queste osservazioni dal semplice esame delle formole di Poincaré (M. § 1) risulta subito che non esiste alcuna sostituzione della specie cercata all' infuori dell' identità, onde concludiamo:

Il poliedro P è il poliedro fondamentale di $\overline{G}^{(i\sqrt{14})}$. Questo gruppo non è contenuto quale sottogruppo eccezionale in alcun gruppo più ampio.

Volendo ora il poliedro fondamentale del sottogruppo $\Gamma^{(i\sqrt{14})}$ basterà p. e. associare a P il suo simmetrico rispetto alla sfera 6). Questo nuovo poliedro ha i tre vertici singolari

$$\infty, \quad \frac{i\sqrt{14}}{3}, \quad \frac{1+i\sqrt{14}}{3}$$

corrispondenti alle tre forme quadratiche ordinarie

$$(1, 0, 14), \quad (2, 0, 7), \quad (3, -1, 5)$$

a determinante -14, le quali, insieme alla *opposta* $(3, 1, 5)$ dell' ultima, costituiscono un sistema completo di forme (ridotte) pel determinante $D = -14$. Ne risulta che nella rete di poliedri, che dà la divisione dello spazio corrispondente al gruppo $\overline{\Gamma}^{(i\sqrt{14})}$, tutti e soli i punti del piano $\xi\eta$, indici di numeri frazionarii del corpo quadratico $(1, i\sqrt{14})$, figurano come vertici di poliedri della rete. Aggiungiamo, senza più farne oggetto di particolari considerazioni, che la medesima circostanza si potrà constatare sugli altri gruppi $\overline{\Gamma}^{(\omega)}$, che passiamo ora a considerare (Cf. (M) Prefazione).

§ VI.

Il gruppo $\overline{G}^{(i\sqrt{17})}$.

Nel gruppo attuale si presentano le sfere di riflessione dei quattro tipi

$$\text{a)}\quad \begin{cases} \left(\xi - \frac{a_1}{c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2\sqrt{17}}{c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{c_1^2}, \\ a_1^2 + 17a_2^2 + b_1c_1 = 1; \end{cases}$$

$$\text{b)}\quad \begin{cases} \left(\xi - \frac{a_2}{c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_1}{c_1\sqrt{17}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{17c_1^2}, \\ a_1^2 + 17a_2^2 + 17b_1c_1 = 1; \end{cases}$$

$$\text{c)}\quad \begin{cases} \left(\xi - \frac{a_1}{2c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2\sqrt{17}}{2c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{2c_1^2}, \\ a_1^2 + 17a_2^2 + 4b_1c_1 = 2; \end{cases}$$

$$\text{d)}\quad \begin{cases} \left(\xi - \frac{a_2}{2c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_1}{2c_1\sqrt{17}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{34c_1^2}, \\ a_1^2 + 17a_2^2 + 68b_1c_1 = 2. \end{cases}$$

Rispetto a quelle dei due primi tipi si presentava il punto singolare $\frac{1+i\sqrt{17}}{2}$, pel quale passano due serie di sfere dei nuovi tipi c) d). Si osservi di più che il punto $\frac{i\sqrt{17}}{3}$ è alla sua volta esterno a tutte le sfere dei tipi c) d), mentre passano per esso due serie di sfere dei tipi a) b). Scegliendo ciascuna volta nella serie le due sfere di massimo raggio, definiamo un poliedro P racchiuso in R dai quattro piani

$$1)\ \xi = 0,\quad 2)\ \xi = \tfrac{1}{2},\quad 3)\ \eta = 0,\quad 4)\ \eta = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

esternamente alle 9 sfere

$$\begin{array}{ll}
5) & \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1, \\
6) & \left(\xi - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2 + \zeta^2 = \tfrac{1}{2}, \\
7) & \left(\xi - \tfrac{1}{4}\right)^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{17}}{4}\right)^2 + \zeta^2 = \tfrac{1}{8}, \\
8) & \left(\xi - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{11}{2\sqrt{17}}\right)^2 + \zeta^2 = \tfrac{1}{34}, \\
9) & \left(\xi - \tfrac{1}{4}\right)^2 + \left(\eta - \frac{23}{4\sqrt{17}}\right)^2 + \zeta^2 = \tfrac{1}{136}, \\
10) & \left(\xi - \tfrac{1}{9}\right)^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{17}}{3}\right)^2 + \zeta^2 = \tfrac{1}{81}, \\
11) & \xi^2 + \left(\eta - \frac{16}{3\sqrt{17}}\right)^2 + \zeta^2 = \tfrac{1}{153}, \\
12) & \xi^2 + \left(\eta - \frac{35}{6\sqrt{17}}\right)^2 + \zeta^2 = \tfrac{1}{612}, \\
13) & \xi^2 + \left(\eta - \frac{3\sqrt{17}}{8}\right)^2 + \zeta^2 = \tfrac{1}{64}.
\end{array}$$

Per le coordinate dei vertici di P troviamo col calcolo effettivo:

$$\begin{array}{lll}
V_1 \equiv (0,\ 0,\ 1) & \text{intersezione delle faccie} & 1)\ 3)\ 5), \\
V_2 \equiv \left(\tfrac{1}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right) & \text{,, \quad ,, \quad ,,} & 2)\ 3)\ 5), \\
V_3 \equiv \left(\tfrac{1}{2},\ \frac{7}{2\sqrt{17}},\ \frac{1}{\sqrt{34}}\right) & \text{,, \quad ,, \quad ,,} & 2)\ 5)\ 7), \\
V_4 \equiv \left(\tfrac{1}{2},\ \frac{3\sqrt{17}}{10},\ \frac{1}{5\sqrt{2}}\right) & \text{,, \quad ,, \quad ,,} & 2)\ 7)\ 8), \\
V_5 \equiv \left(\tfrac{1}{2},\ \frac{\sqrt{17}}{3},\ \tfrac{1}{6}\right) & \text{,, \quad ,, \quad ,,} & 2)\ 6)\ 8), \\
V_6 \equiv \left(\tfrac{1}{2},\ \frac{\sqrt{17}}{2},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right) & \text{,, \quad ,, \quad ,,} & 2)\ 4)\ 6), \\
V_7 \equiv \left(0,\ \frac{\sqrt{17}}{2},\ \tfrac{1}{2}\right) & \text{,, \quad ,, \quad ,,} & 1)\ 4)\ 6), \\
V_8 \equiv \left(0,\ \frac{13}{2\sqrt{17}},\ \frac{1}{2\sqrt{17}}\right) & \text{,, \quad ,, \quad ,,} & 1)\ 6)\ 13). \\
V_9 \equiv \left(0,\ \frac{9\sqrt{17}}{26},\ \tfrac{1}{26}\right) & \text{,, \quad ,, \quad ,,} & 1)\ 12)\ 13), \\
V_{10} \equiv \left(0,\ \frac{\sqrt{17}}{3},\ 0\right) & \text{,, \quad ,, \quad ,,} & 1)\ 10)\ 11)\ 12),
\end{array}$$

$V_{11} \equiv \left(0, \frac{4\sqrt{17}}{13}, \frac{1}{13}\right)$ intersezioni delle faccie 1) 7) 11),

$V_{12} \equiv \left(0, \frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{1}{\sqrt{17}}\right)$ " " " 1) 5) 7),

$V_{13} \equiv \left(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{17}}{3}, 0\right)$ " " " 6) 7) 8) 9),

$V_{14} \equiv \left(\frac{5}{26}, \frac{9\sqrt{17}}{26}, \frac{\sqrt{2}}{26}\right)$ " " " 6) 9) 10),

$V_{15} \equiv \left(\frac{1}{10}, \frac{61}{10\sqrt{17}}, \frac{1}{5\sqrt{34}}\right)$ " " " 6) 10) 13),

$V_{16} \equiv \left(\frac{1}{5}, \frac{\sqrt{17}}{3}, \frac{1}{15}\right)$ " " " 7) 9) 10),

$V_{17} \equiv \left(\frac{1}{22}, \frac{7\sqrt{17}}{22}, \frac{\sqrt{2}}{22}\right)$ " " " 7) 10) 11),

$V_{18} \equiv \left(\frac{1}{52}, \frac{9\sqrt{17}}{26}, \frac{\sqrt{3}}{52}\right)$ " " " 10) 12) 13),

$V_\infty \equiv (0, 0, +\infty)$ " " " 1) 2) 3) 4).

Col solito metodo ci assicuriamo che nessura sfera di riflessione di $\overline{G}^{(i\sqrt{17})}$ attraversa P.

Ora, per facilitare la ricerca delle sostituzioni che cangiano P in sè medesimo, osserviamo che fra i diedri di P ve ne sono due di 60^0 agli spigoli

$$\overline{V_2 V_3}, \quad \overline{V_{15} V_{18}}$$

e quattro di 45^0 agli spigoli

$$\overline{V_3 V_4}, \quad \overline{V_5 V_6}, \quad \overline{V_{11} V_{12}}, \quad \overline{V_{14} V_{15}},$$

mentre tutti gli altri diedri sono retti. In una trasformazione che cangi P in sè stesso i due vertici V_3, V_{15}, come appartenenti simultaneamente ai primi ed ai secondi spigoli, debbono manifestamente permutarsi fra loro o restare ciascuno invariato. Nel 2^0 caso dovrebbero pure restare invariati V_2, V_4, V_{14}, V_{18}; ma, esaminando il denominatore delle formole di Poincarè (M § 1), si vede subito che tale sostituzione si riduce all' identità. La sostituzione cercata deve dunque produrre gli scambi

$$(V_3 V_{15})\,(V_4 V_{14})\,(V_2 V_{18})$$

nè ve ne possono essere due distinte chè altrimenti la loro combinazione, per quanto si è visto, dovrebbe condurre all' identità. Troviamo che la sostituzione cercata esiste effettivamente ed è la ellittica a periodo 2

$$\alpha) \quad z' = \frac{i\sqrt{17}\,.\,z + 6}{3z - i\sqrt{17}},$$

appartenente a $\overline{G}^{(i\sqrt{17})}$, che lasciando fisso V_{13} produce sugli altri vertici gli scambí

$(V_1 V_9)(V_2 V_{18})(V_3 V_{15})(V_4 V_{14})(V_5 V_{16})(V_6 V_{17})(V_7 V_{11})(V_8 V_{12})(V_{10} V_\infty)$.

Per avere il poliedro fondamentale P' di $\overline{G}^{(i\sqrt{17})}$ basterà dunque dividere P in due parti (equivalenti) con una sfera che passi pel circolo fisso della sostituzione α), i cui punti d'incontro col piano $\xi\eta$ sono $\frac{\pm 1 + i\sqrt{17}}{3}$. Si prenderà ad esempio a questo oggetto la sfera

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 2$$

e del poliedro P si considererà soltanto la parte esterna a quest' ultima sfera.

§ VII.

Il gruppo $\overline{G}^{\left(\frac{1+i\sqrt{39}}{2}\right)}$.

In questo gruppo, secondo i risultati del § III, si offrono le sfere di riflessione dei quattro tipi seguenti:

$$\text{a)}\quad \begin{cases} \left(\xi - \frac{a_1}{2c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2\sqrt{39}}{2c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{c_1^2}, \\ a_1^2 + 39a_2^2 + 4b_1c_1 = 4; \end{cases}$$

$$\text{b)}\quad \begin{cases} \left(\xi - \frac{a_2}{2c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_1}{2c_1\sqrt{39}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{39c_1^2}, \\ a_1^2 + 39a_2^2 + 156b_1c_1 = 4; \end{cases}$$

$$\text{c)}\quad \begin{cases} \left(\xi - \frac{a_1}{2c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2\sqrt{39}}{6c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{3c_1^2}, \\ 3a_1^2 + 13a_2^2 + 12b_1c_1 = 4; \end{cases}$$

$$\text{d)}\quad \begin{cases} \left(\xi - \frac{a_2}{2c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{3a_1}{2c_1\sqrt{39}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{13c_1^2}, \\ 3a_1^2 + 13a_2^2 + 52b_1c_1 = 4. \end{cases}$$

Quelle dei tipi a) b), che già appartenevano al sottogruppo $\overline{\Gamma}^{\left(\frac{1+i\sqrt{39}}{2}\right)}$, sono insufficienti a limitarne il poliedro fondamentale, a causa della presenza del punto singolare $\frac{1+i\sqrt{39}}{4}$ esterno a tutte le sfere di questi due tipi. Per questo punto passano due serie di sfere di riflessione dei nuovi tipi c) d) e se in ciascuna serie scegliamo le due dei massimi raggi, veniamo a definire un poliedro P racchiuso in R fra i quattro piani

$$1)\ \xi = 0,\quad 2)\ \xi = \frac{1}{2},\quad 3)\ \eta = 0,\quad 4)\ \eta = \frac{\sqrt{39}}{2}$$

esternamente alle due sfere del tipo a)

$$5)\ \xi^2+\eta^2+\zeta^2=1, \qquad 6)\ \left(\xi-\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(\eta-\tfrac{\sqrt{39}}{2}\right)^2+\zeta^2=1$$

e alle quattro sfere dei tipi c) d)

$$7)\qquad \xi^2+\left(\eta-\frac{\sqrt{39}}{3}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{3},$$

$$8)\quad \left(\xi-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\eta-\frac{\sqrt{39}}{6}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{3},$$

$$9)\qquad \xi^2+\left(\eta-\frac{9}{\sqrt{39}}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{13},$$

$$10)\quad \left(\xi-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\eta-\frac{21}{2\sqrt{39}}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{13},$$

Per le coordinate dei vertici di P troviamo:

$V_1 \equiv (0,\ 0,\ 1)$ intersezione delle faccie 1) 3) 5),

$V_2 \equiv \left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ " " " 2) 3) 5),

$V_3 \equiv \left(\frac{1}{2},\ \frac{9}{2\sqrt{39}},\ \sqrt{\frac{3}{13}}\right)$ " " " 2) 5) 8),

$V_4 \equiv \left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{39}}{4},\ \frac{1}{4}\right)$ " " " 2) 8) 10),

$V_5 \equiv \left(\frac{1}{2},\ \frac{3\sqrt{39}}{10},\ \frac{1}{5}\right)$ " " " 2) 7) 10),

$V_6 \equiv \left(\frac{1}{2},\ \frac{27}{2\sqrt{39}},\ \frac{1}{\sqrt{13}}\right)$ " " " 2) 6) 7),

$V_7 \equiv \left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{39}}{2},\ 1\right)$ " " " 2) 4) 6),

$V_8 \equiv \left(0,\ \frac{\sqrt{39}}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ " " " 1) 4) 6),

$V_9 \equiv \left(0,\ \frac{15}{\sqrt{39}},\ \sqrt{\frac{3}{13}}\right)$ " " " 1) 6) 7),

$V_{10} \equiv \left(0,\ \frac{\sqrt{39}}{4},\ \frac{1}{4}\right)$ " " " 1) 7) 9),

$V_{11} \equiv \left(0,\ \frac{\sqrt{39}}{5},\ \frac{1}{5}\right)$ " " " 1) 8) 9),

$V_{12} \equiv \left(0,\ \frac{6}{\sqrt{39}},\ \frac{1}{\sqrt{13}}\right)$ " " " 1) 5) 8),

$V_{13} \equiv \left(\frac{1}{4},\ \frac{\sqrt{39}}{4},\ 0\right)$ " " " 7) 8) 9) 10),

$V_\infty \equiv (0,\ 0,\ +\infty)$ " " " 1) 2, 3) 4).

Nessuna sfera di riflessione lo attraversa e la sola sostituzione (ellittica a periodo 2)

$$z' = -z + \frac{1 + i\sqrt{39}}{2},$$

che appartiene al gruppo, lo cangia in sè stesso. Dividendo P in due parti col piano

$$\eta - \xi\sqrt{39} = 0,$$

una qualunque delle due può assumersi a poliedro fondamentale di $\overline{G}^{\left(\frac{1+i\sqrt{39}}{2}\right)}$.

§ VIII.

I gruppi $\overline{G}^{(i\sqrt{21})}$, $\overline{G}^{(i\sqrt{30})}$.

Per questi gruppi ci limiteremo a definirne i poliedri fondamentali, che si determinano applicando gli stessi metodi.

A) Pel gruppo $\overline{G}^{(i\sqrt{21})}$ i quattro piani di riflessione

$$1)\ \xi = 0,\quad 2)\ \xi = \frac{1}{2},\quad 3)\ \eta = 0,\quad 4)\ \eta = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

insieme alle sette sfere

$$
\begin{aligned}
&5) && \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,\\
&6) && \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{21}}{2}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{2},\\
&7) && \xi^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{21}}{3}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{3},\\
&8) && \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{21}}{4}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{16},\\
&9) && \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{4}{\sqrt{21}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{84},\\
&10) && \left(\xi - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\eta - \frac{13}{3\sqrt{21}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{189},\\
&11) && \left(\xi - \frac{3}{14}\right)^2 + \left(\eta - \frac{3\sqrt{21}}{14}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{98}
\end{aligned}
$$

limitano un poliedro P, non attraversato da alcuna altra sfera di riflessione con due soli vertici singolari, l'uno all' infinito e l'altro nel punto $\frac{2 + i\sqrt{21}}{5}$ del piano $\xi\eta$. Oltre alla identità, esiste la sola sostituzione (ellittica a periodo 2)

$$\beta)\quad z' = \frac{\dfrac{\sqrt{7} + i\sqrt{3}}{\sqrt{2}}z - \dfrac{2i\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}{\dfrac{\sqrt{7} - i\sqrt{3}}{\sqrt{2}}z - \dfrac{\sqrt{7} + i\sqrt{3}}{\sqrt{2}}},$$

che appartiene a $\overline{G}^{(i\sqrt{21})}$, e cangia P in sè stesso. Il poliedro fondamentale P' di $\overline{G}^{(i\sqrt{21})}$ si ottiene quindi dividendo P in due parti

equivalenti con una sfera che passi pel circolo fisso della β), per esempio colla sfera

$$\left(\xi-\frac{2}{5}\right)^2+\left(\eta-\frac{\sqrt{21}}{5}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{5},$$

che lo contiene quale circolo massimo.

B) Pel gruppo $\overline{G}^{(i\sqrt{30})}$ i quattro piani

$$1)\ \xi=0,\quad 2)\ \xi=\frac{1}{2},\quad 3)\ \eta=0,\quad 4)\ \eta=\frac{\sqrt{30}}{2},$$

insieme alle sette sfere di riflessione

$$
\begin{array}{ll}
5) & \xi^2+\eta^2+\zeta^2=1,\\
6) & \xi^2+\left(\eta-\frac{\sqrt{30}}{2}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{2},\\
7) & \xi^2+\left(\eta-\frac{\sqrt{30}}{3}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{3},\\
8) & \xi^2+\left(\eta-\frac{\sqrt{30}}{5}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{5},\\
9) & \left(\xi-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\eta-\frac{\sqrt{30}}{4}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{8},\\
10) & \left(\xi-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\eta-\frac{\sqrt{30}}{6}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{12},\\
11) & \left(\xi-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\eta-\frac{2\sqrt{30}}{5}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{20}
\end{array}
$$

limitano un poliedro P, con un solo vertice singolare (all' infinito), che non è attraversato du alcuna sfera di riflessione e non ammette alcuna trasformazione in sè medesimo. Esso è quindi il poliedro fondamentale di $\overline{G}^{(i\sqrt{30})}$.

Nota.

Colla determinazione dei nuovi poliedri, eseguita in questa prima parte, vengono altresì risoluti i problemi fondamentali della teoria delle forme quadratiche di Dirichlet e di Hermite nei rispettivi campi quadratici (*M* § 21 s. s.). A questo proposito non è inutile osservare che insieme all' ampliamento dei primitivi gruppi $\Gamma^{(\omega)}$, è naturale procedere ad un corrispondente ampliamento nel significato dell' *equivalenza* di due tali forme. È chiaro infatti che, eseguendo sulle variabili x, y di una forma f di Dirichlet o di Hermite, a coefficienti interi nel corpo quadratico Ω, una sostituzione

$$s)\quad \begin{cases} x=\alpha x'+\beta y',\\ y=\gamma x'+\delta y' \end{cases}$$

con coefficienti interi in Ω, ovvero appartenenti ad uno dei moduli M, H, K, che hanno servito all' ampliamento di $\overline{\Gamma}^{(\omega)}$, la forma trasformata f' apparterrà alla stessa specie. Due forme f, f' si diranno dunque equivalenti se l'una si cangia nell' altra con unà sostituzione s) a determinante ± 1. I poliedri dei gruppi ampliati $\overline{G}^{(\omega)}$ compiranno, nel nuovo campo dell' equivalenza, lo stesso ufficio che i poliedri dei sottogruppi $\overline{\Gamma}^{(\omega)}$ nell' antico campo.

Parte 2ª.

Forme quaternarie.

§ IX.

Osservazioni fondamentali.

Sia

$$(1) \qquad z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

una sostituzione lineare a coefficienti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ arbitrarii (complessi). Consideriamo una forma quadratica di Hermite a variabili coniugate $\xi, \eta; \xi_0, \eta_0$:

$$F = x_1 \xi \xi_0 + (x_2 + i x_3) \xi \eta_0 + (x_2 - i x_0 \eta + x_4 \eta \eta_0,$$

ove x_1, x_2, x_3, x_4 indicano pel momento costanti arbitrarie reali. Effettuando sulle $\xi\eta$ la sostituzione

$$\begin{cases} \xi = \alpha \xi' + \beta \eta', \\ \eta = \gamma \xi' + \delta \eta' \end{cases}$$

e contemporaneamente sulle coniugate la sostituzione coniugata

$$\begin{cases} \xi_0 = \alpha_0 \xi_0' + \beta_0 \eta_0', \\ \eta_0 = \gamma_0 \xi_0' + \delta_0 \eta_0' \end{cases}$$

la F si trasforma in una forma F' della medesima specie

$$F' = x_1' \xi' \xi_0' + (x_2' + i x_3') \xi' \eta_0' + (x_2' - i x_3') \xi_0' \eta' + x_4' \eta' \eta_0',$$

i cui coefficienti si esprimono per gli antichi colle formole

$$\begin{cases} x_1' = \alpha\alpha_0 x_1 + \alpha\gamma_0 (x_2 + i x_3) + \alpha_0 \gamma (x_2 - i x_3) + \gamma\gamma_0 x_4, \\ x_2' + i x_3' = \alpha\beta_0 x_1 + \alpha\delta_0 (x_2 + i x_3) + \beta_0 \gamma (x_2 - i x_3) + \gamma\delta_0 x_4, \\ x_2' - i x_3' = \alpha_0 \beta x_1 + \alpha_0 \delta (x_2 - i x_3) + \beta\gamma_0 (x_2 + i x_3) + \gamma_0 \delta x_4, \\ x_4' = \beta\beta_0 x_1 + \beta\delta_0 (x_2 + i x_3) + \beta_0 \delta (x_2 - i x_3) + \delta\delta_0 x_4. \end{cases}$$

Ponendo in evidenza le parti reali, possiamo scrivere:

$$
(2)\quad \begin{cases}
x_1' = \alpha\alpha_0 x_1 + (\alpha\gamma_0+\alpha_0\gamma)x_2 + i(\alpha\gamma_0-\alpha_0\gamma)x_3 + \gamma\gamma_0 x_4,\\
x_2' = \frac{1}{2}(\alpha\beta_0+\alpha_0\beta)x_1 + \frac{1}{2}(\alpha\delta_0+\alpha_0\delta+\beta\gamma_0+\beta_0\gamma)x_2\\
\qquad + \frac{i}{2}(\alpha\delta_0-\alpha_0\delta+\beta\gamma_0-\beta_0\gamma)x_3 + \frac{1}{2}(\gamma\delta_0+\gamma_0\delta)x_4,\\
x_3' = \frac{i}{2}(\alpha_0\beta-\alpha\beta_0)x_1 + \frac{i}{2}(\alpha_0\delta-\alpha\delta_0+\beta\gamma_0-\beta_0\gamma)x_2\\
\qquad + \frac{1}{2}(\alpha\delta_0+\alpha_0\delta-\beta\gamma_0-\beta_0\gamma)x_3 + \frac{i}{2}(\gamma_0\delta-\gamma\delta_0)x_4,\\
x_4' = \beta\beta_0 x_1 + (\beta\delta_0+\beta_0\delta)x_2 + i(\beta\delta_0-\beta_0\delta)x_3 + \delta\delta_0 x_4.
\end{cases}
$$

I due determinanti di F, F' sono eguali; si ha cioè

$$(3)\qquad x_2'^2 + x_3'^2 - x_1'x_4' = x_2^2 + x_3^2 - x_1x_4.$$

Supponendo ora $x_1\, x_2\, x_3\, x_4$ non più costanti ma variabili reali e trasformandole colla sostituzione quaternaria (2) in $x_1'\, x_2'\, x_3'\, x_4'$ ne seguirà, qualunque sia la sostituzione (1) l'identità (3). Alla sostituzione lineare (1) veniamo così a far corrispondere *una* sostituzione quaternaria a coefficienti reali:

$$
(\mathrm{I})\quad \begin{vmatrix}
\alpha\alpha_0\ , & \alpha\gamma_0+\alpha_0\gamma\ , & i(\alpha\gamma_0-\alpha_0\gamma)\ , & \gamma\gamma_0\\
\frac{1}{2}(\alpha\beta_0+\alpha_0\beta), & \frac{1}{2}(\alpha\delta_0+\alpha_0\delta+\beta\gamma_0+\beta_0\gamma), & \frac{i}{2}(\alpha\delta_0-\alpha_0\delta+\beta\gamma_0-\beta_0\gamma), & \frac{1}{2}(\gamma\delta_0+\gamma_0\delta)\\
\frac{i}{2}(\alpha_0\beta-\alpha\beta_0), & \frac{i}{2}(\alpha_0\delta-\alpha\delta_0+\beta\gamma_0-\beta_0\gamma), & \frac{1}{2}(\alpha\delta_0+\alpha_0\delta-\beta\gamma_0-\beta_0\gamma), & \frac{i}{2}(\gamma_0\delta-\gamma\delta_0)\\
\beta\beta_0\ , & \beta\delta_0+\delta_0\delta\ , & i(\beta\delta_0-\beta_0\delta)\ , & \delta\delta_0
\end{vmatrix}
$$

e a determinante $+1$, che trasforma in sè medesima la forma reale quaternaria

$$\varphi = x_2^2 + x_3^2 - x_1x_4.\text{*)}$$

Due sostituzioni (1) differenti fra loro s, s' danno luogo a due sostituzioni quaternarie (I) che indicheremo con S, S' pure differenti fra loro, giacchè risalendo dalla (I) alla (1) resta solo l'incertezza di un cangiamento simultaneo di segno in α, β, γ, δ, il che non altera la (1) (nè la (I)). È importante poi osservare che al prodotto $s's$ corrisponde, nel senso sopra fissato, la sostituzione quaternaria SS'.

Ne risulta che se consideriamo una serie di sostituzioni s sopra una variabile z costituenti un gruppo, le corrispondenti sostituzioni quaternarie S formeranno un gruppo isomorfo (oloedricamente) ed inversamente.

---

*) Si osserverà che ponendo

$$x_1 = u_4 + u_1,\quad x_4 = u_4 - u_1,\quad x_2 = u_2,\quad x_3 = u_3$$

la φ si riduce immediatamente al tipo

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - u_4^2$$

§ X.

Gruppo riproduttivo della forma quaternaria

$$x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_4,$$

Ci proponiamo ora di dimostrare che, prescindendo da un cangiamento simultaneo di segno nei coefficienti, le sostituzioni (I) sopra trovate sono le più generali sostituzioni quaternarie reali a determinante $+1$ che trasformino in sè medesima la forma

$$\varphi = x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_4.$$

Cominciamo per ciò dall' osservare che se

$$(4) \qquad \begin{cases} x_1 = a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + a_{13}x_3' + a_{14}x_4', \\ x_2 = a_{21}x_1' + a_{22}x_2' + a_{23}x_3' + a_{24}x_4', \\ x_3 = a_{31}x_1' + a_{32}x_2' + a_{33}x_3' + a_{34}x_4', \\ x_4 = a_{41}x_1' + a_{42}x_2' + a_{43}x_3' + a_{44}x_4' \end{cases}$$

è una tale sostituzione, dovranno sussistere fra i coefficienti (reali) a_{ik} le 10 relazioni

$$(5) \qquad \begin{cases} 2a_{21}a_{22} + 2a_{31}a_{32} - a_{11}a_{42} - a_{12}a_{41} = 0, \\ 2a_{21}a_{23} + 2a_{31}a_{33} - a_{11}a_{43} - a_{13}a_{41} = 0, \\ 2a_{21}a_{24} + 2a_{31}a_{34} - a_{11}a_{44} - a_{14}a_{41} = -1; \end{cases}$$

$$(5^*) \qquad \begin{cases} 2a_{22}a_{23} + 2a_{32}a_{33} - a_{12}a_{43} - a_{13}a_{42} = 0, \\ 2a_{22}a_{24} + 2a_{32}a_{34} - a_{12}a_{44} - a_{14}a_{42} = 0, \\ 2a_{23}a_{24} + 2a_{33}a_{34} - a_{13}a_{44} - a_{14}a_{43} = 0; \end{cases}$$

$$(6) \qquad \begin{cases} a_{21}^2 + a_{31}^2 - a_{11}a_{41} = 0, \\ a_{22}^2 + a_{32}^2 - a_{12}a_{42} = 1, \\ a_{23}^2 + a_{33}^2 - a_{13}a_{43} = 1, \\ a_{24}^2 + a_{34}^2 - a_{14}a_{44} = 0, \end{cases}$$

onde segue che la sostituzione inversa della (4) è data da:

$$(4^*) \qquad \begin{cases} x_1' = a_{44}x_1 - 2a_{24}x_2 - 2a_{34}x_3 + a_{14}x_4, \\ x_2' = -\frac{1}{2}a_{42}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 - \frac{1}{2}a_{12}x_4, \\ x_3' = -\frac{1}{2}a_{43}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 - \frac{1}{2}a_{13}x_4, \\ x_4' = a_{41}x_1 - 2a_{21}x_2 - 2a_{31}x_3 + a_{11}x_4. \end{cases}$$

Ora è chiaro che se componiamo una sostituzione (4) con una sostituzione della forma (I)

$$\begin{cases} x_1'' = b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4, \\ x_2'' = b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + b_{24}x_4, \\ x_3'' = b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3 + b_{34}x_4, \\ x_4'' = b_{41}x_1 + b_{42}x_2 + b_{33}x_3 + b_{44}x_4, \end{cases}$$

il risultato sarà nuovamente una sostituzione del gruppo riproduttivo di φ. È facile vedere che disponendo in modo conveniente delle costanti α, β, γ, δ colle quali le b_{ik} sono composte, si può fare in modo che nella sostituzione risultante sia nullo il nuovo coefficiente a_{14}.

Basta per ciò prendere α, γ inguisa che si abbia

$$a_{14}\alpha\alpha_0 + a_{24}(\alpha\gamma_0 + \alpha_0\gamma) + i a_{34}(\alpha\gamma_0 - \alpha_0\gamma) + a_{44}\gamma\gamma_0 = 0$$

ovvero moltiplicando per a_{14} *) ed osservando la 4ª delle (6)

$$\{a_{14}\alpha + (a_{24} - i a_{34})\gamma\}\ \{a_{14}\alpha_0 + (a_{24} + i a_{34})\gamma_0\} = 0.$$

A questa si soddisfa nel modo più generale lasciando γ arbitrario (diverso da zero) e prendendo

$$\alpha = \frac{i a_{34} - a_{24}}{a_{14}}\gamma.$$

Dopo ciò si potrà ancora prendere β ad arbitrio e determinare δ da $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

Questo risultato preliminare ci permette evidentemente di ridurre la dimostrazione del nostro teorema al caso in cui $a_{14} = 0$. L'ultima delle (6) dà allora:

$$a_{24} = 0, \quad a_{34} = 0$$

e conseguentemente, essendo a_{44} diverso da zero, **) dalle due ultime (5*) deduciamo anche

$$a_{12} = 0, \quad a_{13} = 0.$$

Le rimanenti relazioni fra le a si riducono alle seguenti

$$(7)\quad \begin{cases} a_{11}a_{44} = 1, \quad a_{11}a_{41} = a_{21}^2 + a_{31}^2, \\ a_{11}a_{42} = 2(a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32}), \quad a_{11}a_{43} = 2(a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33}), \\ a_{22}^2 + a_{32}^2 = 1, \quad a_{23}^2 + a_{33}^2 = 1, \quad a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} = 0. \end{cases}$$

Dalle tre ultime deduciamo

$$a_{33} = \pm a_{22}, \quad a_{32} = \mp a_{23};$$

l'incertezza del segno si toglie osservando che il determinante della sostituzione si riduce a

*) Qui suppone $a_{14} \gtrless 0$ chè altrimenti lo scopo che ci proponiamo sarebbe già raggiunto.

**) L'ipotesi

$$a_{14} = a_{24} = a_{34} = a_{44} = 0$$

darebbe il valore *zero* pel determinante della sostituzione.

$$a_{11}a_{44}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})$$

e deve eguagliare l'unità positiva il che per le (7) dà

$$a_{33}=a_{22},\quad a_{32}=-a_{23}.$$

Così indicando con φ un angolo reale avremo per le (7);

$$a_{22}=a_{33}=\cos\varphi,\qquad a_{32}=-a_{23}=\sin\varphi,$$

$$a_{41}=\frac{a_{21}^2+a_{31}^2}{a_{11}},\qquad a_{44}=\frac{1}{a_{11}},$$

$$a_{42}=2\,\frac{a_{21}\cos\varphi+a_{31}\sin\varphi}{a_{11}},\qquad a_{43}=2\,\frac{a_{31}\cos\varphi-a_{21}\sin\varphi}{a_{11}}.$$

Se a_{11} è positivo basterà porre

$$\alpha=\sqrt{a_{11}}\,e^{i\frac{\varphi}{2}},\quad \beta=\frac{a_{21}-ia_{31}}{\sqrt{a_{11}}}\,e^{i\frac{\varphi}{2}},\quad \gamma=0,\quad \delta=\frac{1}{\sqrt{a_{11}}}\,e^{-i\frac{\varphi}{2}}$$

per far coincidere la (I) coll' attuale sostituzione. Quando poi a_{11} fosse negativo basterebbe cangiare tutti i segni delle a, come appunto si era asserito.

§ XI.

Applicazioni.

Nel gruppo totale continuo di sostituzioni (4) riproduttrici della forma

$$\varphi=x_2^2+x_3^2-x_1x_4$$

consideriamo un sottogruppo G discontinuo, privo cioè di sostituzioni infinitesimali. Tutte le sostituzioni di G, per quanto sopra è dimostrato, possono porsi sotto la forma di una sostituzione (I) ovvero di una tale sostituzione in cui siano cangiati simultaneamente i segni dei 16 coefficienti. Le corrispondenti sostituzioni

$$z'=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$$

formano un gruppo isomorfo Γ, privo esso pure di sostituzioni infinitesimali, poichè se esistesse in Γ una sostituzione infinitesimale sarebbe pure infinitesimale la sostituzione (I) corrispondente in G. L'isomorfismo di G, Γ è *oloedrico* se G non contiene la sostituzione

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

ed è invece *meriedrico* col grado $m=2$ di meriedria se questa sostituzione è contenuta in G. Il gruppo discontinuo Γ consente la rappresentazione geometrica di Poincaré ed è quindi un gruppo *poliedrico*.

Dalla considerazione della speciale forma φ possiamo subito passare a quella di una forma reale quaternaria qualunque

$$\psi = \sum_1^4 c_{rs} x_r x_s,$$

supponendo soltanto che essa sia riducibile con trasformazione reale al tipo

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - u_4^2.$$

E infatti la ψ sarà altresì trasformabile con una sostituzione reale T nella forma $\varphi = x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_4$ e ogni sottogruppo K, privo di sostituzioni infinitesimali, che trasformi ψ in sè medesima, darà trasformato con T, il sottogruppo TKT^{-1} riproduttivo di φ, privo di sostituzioni infinitesimali.

Per arrestarci ad un caso di particolare interesse supponiamo che la forma ψ sia *aritmetica*, abbia cioè i coefficienti c_{rs} interi e prendiamo per K il suo gruppo *aritmetico* riproduttivo di sostituzioni a determinante $+1$, i cui coefficienti siano cioè interi. È evidente che K non contiene sostituzioni infinitesimali e dà luogo quindi, nel modo superiormente descritto, ad un gruppo isomorfo poliedrico Γ di sostituzioni sopra una variabile complessa. Fra i gruppi poliedrici Γ così ottenuti meriterebbero uno studio speciale quelli che derivano da forme ψ che non possono annullarsi per valori *interi* (diversi da zero) delle variabili come p. e. la forma

$$\psi = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 6x_4^2.$$

Qui ci limiteremo per altro a dimostrare come i gruppi quadratici $\Gamma^{(\omega)}$ e i gruppi ampliati $G^{(\omega)}$ precedentemente studiati rientrino anch' essi nella classe generale dei gruppi poliedrici, che provengono dai gruppi aritmetici riproduttivi delle forme quaternarie.

Supponiamo che i coefficienti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ della sostituzione (1) percorrano i numeri *interi* del campo quadratico $(1, i\sqrt{D})$ e poniamo quindi

$$\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2\sqrt{D}, \quad \beta = \beta_1 + i\beta_2\sqrt{D}, \quad \gamma = \gamma_1 + i\gamma_2\sqrt{D},$$
$$\delta = \delta_1 + i\delta_2\sqrt{D},$$

dove $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2$ sono razionali interi, indi alla forma di Hermite

$$x_1 \xi\xi_0 + (x_2 + i\sqrt{D}x_3)\xi\eta_0 + (x_2 - i\sqrt{D}x_3)\xi_0\eta + x_4\eta\eta_0$$

(essendo $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$ costanti o variabili reali) applichiamo la sostituzione

$$\begin{cases} \xi = \alpha\xi' + \beta\eta', \\ \eta = \gamma\xi' + \delta\eta'. \end{cases}$$

Col processo del § IX troviamo la corrispondente sostituzione quaternaria:

$$
(\mathrm{II})\quad \left|\begin{array}{llll}
\alpha_1^2+D\alpha_2^2\,, & 2(\alpha_1\gamma_1+D\alpha_2\gamma_2)\,, & 2D(\alpha_1\gamma_2-\alpha_2\gamma_1)\,, & \gamma_1^2+D\gamma_2^2 \\
\alpha_1\beta_1+D\alpha_2\beta_2\,, & \alpha_1\delta_1+\beta_1\gamma_1+D(\alpha_2\delta_2+\beta_2\gamma_2)\,, & D(\alpha_1\delta_2-\alpha_2\delta_1+\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1)\,, & \gamma_1\delta_1+D\gamma_2\delta_2 \\
\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2\,, & \alpha_2\delta_1-\alpha_1\delta_2+\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1\,, & \alpha_1\delta_1+D\alpha_2\delta_2-(\beta_1\gamma_1+D\beta_2\gamma_2)\,, & \gamma_2\delta_1-\gamma_1\delta_2 \\
\beta_1^2+D\beta_2^2\,, & 2(\beta_1\delta_1+\beta_2\delta_2)\,, & 2D(\beta_1\delta_2-\beta_2\delta_1)\,, & \delta_1^2+D\delta_2^2
\end{array}\right|
$$

che trasforma in sè medesima la forma quaternaria

$$\Phi = x_2^2 + Dx_3^2 - x_1x_4 .$$

È manifesto che nella (II) i coefficienti saranno numeri interi; ma si vede facilmente che essi saranno ancora interi se $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ è una di quelle sostituzioni, appartenenti ai moduli M, H o K, colle quali nei §§ I, II abbiamo ampliato il gruppo $\Gamma^{(i\sqrt{D})}$ fino ad ottenere il gruppo $G^{(i\sqrt{D})}$.

Vediamo adunque che i gruppi ampliati $G^{(i\sqrt{D})}$ corrispondono ad un sottogruppo del gruppo aritmetico che riproduce la forma quaternaria Φ.

Pisa, Agosto 1892.

Ueber den Zusammenhang in Reihen mit einer Anwendung auf die Theorie der Substitutionen.

Von

P. Hoyer in Schnepfenthal.

Die Betrachtung der Aenderungen, welche der Zusammenhang der Blätter einer Riemann'schen Fläche in den Uebergangslinien erfährt, wenn man die Uebergangslinien durch andere ersetzt, führt mit Nothwendigkeit dazu, Producte cyklischer Substitutionen, welche dem Werthe nach gleich, der Form nach aber verschieden sind, auf diese Verschiedenheit ihrer Form von gewissen Gesichtspunkten aus zu betrachten. Wenn man z. B. in der Arbeit des Herrn Lüroth „Note über Verzweigungsschnitte und Querschnitte in einer Riemann'schen Fläche" (Bd. 4 d. Z.) und in der weiteren Ausführung hierzu von Clebsch „Zur Theorie der Riemann'schen Fläche" (Bd. 6 d. Z.) von der Anschauung der Riemann'schen Fläche abstrahirt, so behandeln beide Arbeiten nichts anderes als diesen Gegenstand für ein identisches Product von Transpositionen. Eine allgemeine Theorie der hier in Frage kommenden Begriffsverknüpfungen, wie sie die vorliegende Arbeit zu geben versucht, scheint indessen zu fehlen und möchte vielleicht, ganz abgesehen von dem Nutzen, den sie bei der Behandlung auf die Riemann'sche Fläche bezüglicher Fragen gewähren kann*), auch für sich einiges Interesse beanspruchen dürfen.

A. Ueber den Zusammenhang in Reihen.

§ 1.

In der Reihe $A_1 A_2 \ldots A_n$ möge jedes Glied als Gesammtvorstellung einer bestimmten Anzahl von Elementen, also selbst als Reihe gedacht werden, wobei indessen die Anwendung des Wortes „Reihe" den Fall nicht ausschliessen soll, dass die Anzahl der Glieder bez. Elemente sich auf Eins reducirt. Unter diesen Elementen — wir bezeichnen sie kurz als *„Buchstaben"* und stellen sie in der Folge durch

*) Ich habe mich in dieser Beziehung auf ein kurzes Beispiel am Schlusse beschränkt.

kleine Buchstaben dar — können sich gleiche finden, die demselben oder verschiedenen Reihengliedern angehören können und durch denselben Buchstaben dargestellt sind. Es kann also auch derselbe Buchstabe in verschiedenen Reihengliedern vorkommen, m. a. W. mehrere Glieder können einen Buchstaben gemeinsam haben. Kann man aus mehreren Gliedern der Reihe $A_1 A_2 \ldots A_n$ durch einmalige Aufnahme jedes Gliedes eine Reihe $A_\alpha A_\beta A_\gamma \ldots A_\varkappa A_\lambda$ bilden, in der je zwei aufeinander folgende Glieder wenigstens einen Buchstaben gemeinsam haben, so soll eine solche Reihe $A_\alpha A_\beta \ldots A_\varkappa A_\lambda$ eine „*in der Reihe* $A_1 A_2 \ldots A_n$ *enthaltene Reihenkette*" heissen. Gehören zwei Glieder oder zwei Buchstaben einer Reihe einer in ihr enthaltenen Reihenkette an, so sollen sie „*zusammenhängend im Gebiete der Reihe* (*in der Reihe*)" heissen. Die Betrachtung der Reihen hinsichtlich dieses Zusammenhanges bildet den Gegenstand dieses Abschnitts.

§ 2.

Man beweist zunächst leicht den Satz: Hängen zwei Glieder resp. Buchstaben einer Reihe im Gebiete der Reihe mit einem dritten zusammen, so hängen sie auch mit einander zusammen. Sucht man daher zu einem beliebigen Gliede einer Reihe alle mit ihm im Gebiete der Reihe zusammenhängenden Glieder auf, so wird dadurch aus der gegebenen Reihe eine Reihe ausgeschieden, in der je zwei Glieder resp. Buchstaben zusammenhängen, während kein Glied oder Buchstabe dieser Reihe mit einem der übrigen Glieder resp. Buchstaben in der gegebenen Reihe zusammenhängt. Werden nun ebenso zu einem der letzteren Glieder alle mit ihm in der gegebenen Reihe zusammenhängenden Glieder aufgesucht, so enthält die hierdurch ausgeschiedene Reihe kein Glied der zuerst ausgeschiedenen Reihe. Man wird daher durch genügende Fortsetzung dieses Verfahrens schliesslich sämmtliche Glieder der gegebenen Reihe in Reihen oder Gruppen geschieden erhalten, welche von der Beschaffenheit sind, dass je zwei Glieder resp. Buchstaben einer Gruppe im Gebiete dieser zusammenhängen, dagegen kein Glied einer Gruppe mit einem Gliede einer andern im Gebiete der gegebenen Reihe zusammenhängt, sodass also auch keine zwei Gruppen einen Buchstaben gemeinsam haben. Es ist ferner leicht ersichtlich, dass eine Scheidung der Glieder einer Reihe in Gruppen dieser Beschaffenheit nur auf eine Weise möglich ist, sofern jede Scheidung stets dieselben Gruppen liefert. Diese Gruppen sollen die in der gegebenen Reihe enthaltenen „*transitiven Gruppen*" oder kurz die transitiven Gruppen der gegebenen Reihe heissen*).

*) Eine Reihe mit nur einer transitiven Gruppe ist danach selbst als transitive Reihe zu bezeichnen.

Zwei der transitiven Gruppe *einer* Reihe können keinen Buchstaben gemeinsam haben. Es können aber zwei Reihen in der Beziehung zu einander stehen, dass jeder transitiven Gruppe der einen Reihe eine transitive Gruppe der andern entspricht, die mit ihr alle *verschiedenen* Buchstaben gemeinsam hat, sodass also von zwei entsprechenden transitiven Gruppen jede dieselben verschiedenen Buchstaben enthält, wie die andere. Wir sagen dann, die transitiven Gruppen beider Reihen *„stimmen in den Buchstaben überein"*. Eine solche zwischen zwei Reihen $A_1 A_2 \ldots A_n$ und $B_1 B_2 \ldots B_m$ stattfindende Beziehung soll durch die Schreibweise $A_1 A_2 \ldots A_n \equiv B_1 B_2 \ldots B_m$ ausgedrückt werden. Von dieser Beziehung gilt nun der Satz:

(α) *Wenn*

$$A_1 A_2 \ldots A_n \equiv B_1 B_2 \ldots B_m$$

und

$$A_{n+1} A_{n+2} \ldots A_{n+n_1} \equiv B_{m+1} B_{m+2} \ldots B_{m+m_1}$$

ist, so ist auch

$$A_{\alpha_1} A_{\alpha_2} \ldots A_{\alpha_{n+n_1}} \equiv B_{\beta_1} B_{\beta_2} \ldots B_{\beta_{m+m_1}}.$$

Dabei bedeutet $A_{\alpha_1} A_{\alpha_2} \ldots A_{\alpha_{n+n_1}}$, resp. $B_{\beta_1} B_{\beta_2} \ldots B_{\beta_{m+m_1}}$ eine aus den Gliedern der Reihen $A_1 A_2 \ldots A_n$ und $A_{n+1} A_{n+2} \ldots A_{n+n_1}$, resp. $B_1 B_2 \ldots B_m$ und $B_{m+1} B_{m+2} \ldots B_{m+m_1}$ zusammengesetzte Reihe.

Der Beweis ergiebt sich leicht daraus, dass zwei verschiedene in einer der beiden Reihen $A_{\alpha_1} A_{\alpha_2} \ldots A_{\alpha_{n+n_1}}$ und $B_{\beta_1} B_{\beta_2} \ldots B_{\beta_{m+m_1}}$ zusammenhängende Buchstaben auch in der andern zusammenhängen. Enthält aber eine der beiden Reihen einen Buchstaben, der mit keinem von ihm verschiedenen zusammenhängt, so ist dieser Buchstabe auch in der andern Reihe enthalten und hängt hier mit keinem von ihm verschiedenen zusammen.

(β) Wählt man aus einer transitiven Gruppe eines oder mehrere Glieder aus, so giebt es unter den übrigen Gliedern sicherlich eines, das mit einem der ausgewählten Glieder wenigstens einen Buchstaben gemeinsam hat. Daraus folgt, dass man die Glieder einer transitiven Gruppe stets so ordnen kann, dass jedes mit der Reihe aller vorangehenden wenigstens einen Buchstaben gemeinsam hat und dass man hierbei das Anfangsglied beliebig wählen kann. Bei einer solchen Anordnung der Glieder bildet dann die von dem Anfangsglied bis zu einem beliebigen Gliede erstreckte Reihe für sich eine transitive Gruppe, und umgekehrt ist auch jede dieser Bedingung genügende Anordnung von der Art, dass jedes Glied mit der Reihe aller vorangehenden wenigstens einen Buchstaben gemeinsam hat.

§ 3.

(α) Es seien $a_{\varkappa_1}, a_{\varkappa_2}, \ldots a_{\varkappa_m}$ die in einem Gliede $A_\varkappa$ einer Reihe $A_1 A_2 \ldots A_n$ enthaltenen gleichen und verschiedenen Buchstaben. Aus

diesen Buchstaben denke man sich eine zweigliederige Reihe $A_k' A_k''$ gebildet, die jeden der Buchstaben $a_{\varkappa_1}, a_{\varkappa_2}, \ldots a_{\varkappa_m}$ einmal und nur einmal enthält, und denke sich diese zweigliederige Reihe an die Stelle von $A_\varkappa$ in der gegebenen Reihe gesetzt. Das Bilden dieser zweigliederigen Reihe soll dann ein „*Spalten*" des Gliedes A_k in die beiden Glieder $A_\varkappa'$, $A_\varkappa''$ heissen, und die durch die gedachte Substitution aus der gegebenen Reihe erhaltene Reihe $A_1 A_2 \ldots A_{\varkappa-1} A_\varkappa' A_\varkappa'' A_{\varkappa+1} \ldots A_n$ soll aus der gegebenen Reihe durch diese Spaltung entstanden heissen. Ist es nun unmöglich, eines der Glieder einer Reihe so in zwei Glieder zu spalten, dass diese beiden Glieder in der durch die Spaltung aus der gegebenen entstandenen Reihe zusammenhängen, so nennen wir die Reihe „*einfach zusammenhängend*", sind solche Spaltungen aber möglich, so soll die Reihe „*mehrfach zusammenhängend*" heissen. Aus dieser Erklärung fliessen die nachstehenden Folgerungen:

(β) Eine Reihe, welche sich aus einer einfach zusammenhängenden Reihe durch Fortlassen eines oder mehrerer Glieder ergiebt (in ihr enthalten ist) ist wieder einfach zusammenhängend.

(γ) Kein Glied einer einfach zusammenhängenden Reihe kann gleiche Buchstaben enthalten und mit einer der transitiven Gruppen, welche in einer aus beliebigen der übrigen Glieder gebildeten Reihe enthalten sind, mehr als einen Buchstaben gemeinsam haben; und umgekehrt, jede Reihe, welche diesen Bedingungen genügt, ist einfach zusammenhängend.

Hat nämlich irgend ein Glied einer Reihe gleiche Buchstaben, so kann man dieses stets so in zwei Glieder spalten, dass diese beiden Glieder einen Buchstaben gemeinsam haben. Hat aber irgend ein Glied $A_\varkappa$ mit einer der transitiven Gruppen, welche in einer aus mehreren der übrigen Glieder gebildeten Reihe enthalten sind, die beiden Buchstaben $a_{\varkappa_\alpha}, a_{\varkappa_\beta}$ gemeinsam, so braucht man nur $A_\varkappa$ in zwei Glieder $A_\varkappa'$, $A_\varkappa''$ zu spalten, von denen das eine $a_{\varkappa_\alpha}$, das andere $a_{\varkappa_\beta}$ enthält, um aus der gegebenen eine Reihe entstehen zu lassen, in der $A_\varkappa'$, $A_\varkappa''$ zusammenhängen. Dass auch die Umkehrung gilt, folgt aus

(δ) Wenn eine Reihe mehrfach zusammenhängend ist und keines ihrer Glieder gleiche Buchstaben enthält, so enthält die Reihe stets eine Reihenkette $A_{\alpha_1} A_{\alpha_2} \ldots A_{\alpha_m}$ von der Beschaffenheit, dass jedes Glied $A_{\alpha_\varkappa}$ derselben zwei Buchstaben $a_{\alpha_{\varkappa-1}}, a_{\alpha_\varkappa}$ enthält, welche auch in der von den übrigen Gliedern der Kette gebildeten Reihe zusammenhängen.

Denn der Voraussetzung zufolge kann man durch Spaltung wenigstens eines Gliedes A_{α_1} der gegebenen Reihe in zwei Glieder A_{α_1}', A_{α_1}'' aus der gegebenen eine Reihe entstehen lassen, in welcher A_{α_1}' und A_{α_1}'' zusammenhängen. In dieser Reihe muss somit eine Reihenkette mit den

Gliedern A'_{α_1} und A''_{α_1} enthalten sein, die mindestens drei Glieder enthält, weil A'_{α_1}, A''_{α_1} keinen Buchstaben gemeinsam haben, und also von der Gestalt sein muss: $A'_{\alpha_1} A_{\alpha_2} \ldots A_{\alpha_m} A''_{\alpha_1}$, wo $A_{\alpha_2} \ldots A_{\alpha_m}$ der gegebenen Reihe angehören. Ist nun der Buchstabe a_{α_1} den Gliedern A'_{α_1}, A_{α_2}, der Buchstabe a_{α_2} den Gliedern A_{α_2}, A_{α_3} u. s. f., der Buchstabe a_{α_m} den Gliedern A_{α_m}, A''_{α_1} gemeinsam, so wird man stets voraussetzen dürfen, dass je zwei aufeinander folgende der Buchstaben a_{α_1}, a_{α_2}, $\ldots a_{\alpha_m}$ von einander verschieden sind, da man andernfalls durch Fortlassen eines oder mehrerer der Glieder A_{α_2}, A_{α_3}, $\ldots A_{\alpha_m}$ eine Kette bilden könnte, die dieser Bedingung genügt. Alsdann ist $A_{\alpha_1} A_{\alpha_2} \ldots A_{\alpha_m}$ eine in der gegebenen Reihe enthaltene Reihenkette von der verlangten Beschaffenheit.

(ε) Wie man daher auch die Glieder einer mehrfach zusammenhängenden Reihe, in der kein Glied gleiche Buchstaben enthält, ordnen mag, es findet sich stets wenigstens ein Glied, das mit der Reihe aller vorangehenden Glieder mehr als einen Buchstaben gemeinsam hat. Ordnet man dagegen in einer einfach zusammenhängenden Reihe die Glieder so, dass die Glieder derselben transitiven Gruppe unmittelbar auf einander folgen und dass in jeder der transitiven Gruppen die Anordnung der Glieder die in § 2 (β) angegebene ist, so hat jedes Glied mit der Reihe aller vorangehenden höchstens einen Buchstaben gemeinsam. Denn jedes Glied einer der transitiven Gruppen hat mit der Reihe der vorangehenden Glieder derselben Gruppe nur einen Buchstaben gemeinsam, da diese Reihe für sich eine transitive Gruppe bildet (§ 2 (β), § 3 (γ)), mit einem Gliede der übrigen Gruppen aber überhaupt keinen Buchstaben gemeinsam.

(φ) Zieht man von der Anzahl aller in einer Reihe enthaltenen, gleichen und verschiedenen Buchstaben die Anzahl der verschiedenen unter diesen Buchstaben ab, so soll die erhaltene Differenz *„die Wiederholung in der Reihe“* heissen. Mittelst dieses Begriffs lässt sich die Entscheidung darüber, ob eine Reihe einfach oder mehrfach zusammenhängend ist, in folgendem Satz zusammenfassen:

Eine Reihe mit n Gliedern und r transitiven Gruppen ist einfach oder mehrfach zusammenhängend, je nachdem die Wiederholung in der Reihe $w = n - r$, oder $> n - r$ ist.

Der Beweis dieses Satzes ergiebt sich als einfache Folgerung aus dem leicht zu beweisenden Hilfssatze: Die Wiederholung in einer aus den Gliedern zweier Reihen zusammengesetzten Reihe ist gleich der Summe der Wiederholungen in den beiden Reihen vermehrt um die Anzahl der verschiedenen, den beiden Reihen gemeinsamen Buchstaben. Nach diesem Hilfssatze ergiebt sich, wenn mit w_α die Wiederholung in der Reihe der ersten α Glieder, mit ω_α die Wiederholung

im α^{ten} Gliede selbst und mit ε_α die Anzahl der verschiedenen Buchstaben bezeichnet wird, die das α^{te} Glied mit der Reihe der vorangehenden gemeinsam hat:

$$w = w_n = \omega_n + w_{n-1} + \varepsilon_n, \quad w_{n-1} = \omega_{n-1} + w_{n-2} + \varepsilon_{n-1},$$
$$w_{n-2} = \omega_{n-2} + w_{n-3} + \varepsilon_{n-2} \text{ u. s. f.}$$

mithin

$$w = \Sigma_\alpha \omega_\alpha + \Sigma_\alpha \varepsilon_\alpha.$$

Werden nun die Glieder der Reihe so, wie in (ε) für die einfach zusammenhängende Reihe angegeben wurde, geordnet vorausgesetzt, so haben r der Zahlen ε_α den Werth Null, diejenigen nämlich, welche von den Anfangsgliedern der transitiven Gruppen herrühren, die übrigen $n - r$ sind gleich 1, oder grösser als 1. Ist die Reihe einfach zusammenhängend, so sind alle von Null verschiedenen $\varepsilon_\alpha = 1$, ausserdem alle $\omega_\alpha = 0$, mithin ist $w = n - r$. Ist die Reihe mehrfach zusammenhängend, so ist entweder wenigstens ein $\omega_\alpha > 0$, oder wenigstens ein $\varepsilon_\alpha > 1$, auf alle Fälle daher $w > n - r$.

Zusatz: Spaltet man jedes Glied A_α so in $\omega_\alpha + 1$ Glieder, dass eines dieser Glieder alle verschiedenen in A_α enthaltenen Buchstaben enthält, darauf dieses Glied wieder so in ε_α Glieder*), dsss jedes dieser Glieder einen der ε_α Buchstaben enthält, die A_α mit der Reihe der vorangehenden gemeinsam hat, so sind im ganzen

$$\Sigma_\alpha \omega_\alpha + \Sigma_\alpha \varepsilon_\alpha - (n - r) = w - (n - r)$$

Spaltungen der Art ausgeführt, dass die transitiven Gruppen der durch die Spaltungen entstehenden Reihen mit denen der gegebenen Reihe in den Buchstaben übereinstimmen. Mehr successive Spaltungen dieser Art kann man nicht ausführen, denn nach Ausführung von $w - (n - r)$ solchen Spaltungen ist für die neue Reihe die Anzahl der Glieder

$$n' = n + w - (n - r),$$

die Wiederholung $w' = w$, die Anzahl der transitiven Gruppen $r' = r$, somit

$$w' - (n' - r') = 0,$$

die Reihe also einfach zusammenhängend.

Die Differenz $w - (n - r)$ soll *„der Grad des Zusammenhanges"* heissen.

§ 4.

Der Inhalt der §§ 1—3 ist zum Verständniss des nächsten Abschnitts völlig ausreichend. Mit Rücksicht auf spätere Anwendungen und um der Theorie des Zusammenhanges einen Abschluss zu geben, mag es indessen gestattet sein, die bisher entwickelten Ideen noch

*) Für $\omega_\alpha = 0$, $\varepsilon_\alpha = 0$, oder $= 1$ bleibt das betr. Glied natürlich unverändert.

weiter auszuführen. Wir beschränken uns dabei auf den Fall einer Reihe, in der kein Glied gleiche Buchstaben enthält.

Die Deutung, welche am Schlusse des vorigen Paragraphen die als Grad des Zusammenhanges bezeichnete Differenz $w - (n - r)$ erfahren hat, erschöpft die Bedeutung nicht, welche dieser Differenz für die Theorie des Zusammenhangs zukommt. Diese Bedeutung ist eine weitergehende, jene implicite enthaltende. Um indessen dies nachzuweisen, bedarf es einer Reihe von Begriffsbestimmungen, die im Interesse der Exactheit erforderlich sind und zunächst gegeben werden sollen:

Man kann auf eine als bestimmt gegeben vorausgesetzte Reihe andere Reihen dadurch beziehen, dass man sich die Buchstaben der gegebenen Reihe, sämmtlich oder zum Theil wiederholt und zu neuen Reihen vereinigt vorstellt. Dabei ist es statthaft, einen Buchstaben der gegebenen Reihe beliebig oft (auch in einer Reihe) zu wiederholen. Solche Buchstaben, die also Wiederholungen desselben Buchstabens der gegebenen Reihe sind, und nur solche Buchstaben, sollen dann als „*identische*“ bezeichnet werden, während „*gleiche*“ Buchstaben sowohl identische, als auch Wiederholungen gleicher Buchstaben der gegebenen Reihe sein können, und „*verschiedene*“ Buchstaben stets Wiederholungen als verschieden vorausgesetzter Buchstaben sein sollen. Durch a_m^n soll ein Buchstabe dargestellt werden, der die Wiederholung eines Buchstabens des Gliedes A_m der gegebenen Reihe ist; dabei sollen die oberen Indices gleich oder verschieden sein, je nachdem die Buchstaben in dem soeben angegebenen Sinne gleich oder verschieden sind, sodass zur Darstellung identischer Buchstaben die oberen und unteren Indices gleich zu wählen sind.

Die in solcher Weise auf die gegebene Reihe bezogenen Reihen, um die es sich hier handelt, sind nun Reihen von Buchstabenpaaren $a_m^n a_m^p$, in denen also die Buchstaben jedes Paares Wiederholungen von Buchstaben *eines* Gliedes der gegebenen Reihe sind. Wir stellen eine solche Reihe dar in der Form

$$a_{m_1}^{n_1} a_{m_1}^{n_2} + a_{m_2}^{n_3} a_{m_2}^{n_4} + a_{m_3}^{n_5} a_{m_3}^{n_6} + \cdots.$$

Dabei können die oberen Indices gleich oder verschieden sein. Um eine solche Reihe durch einen einzigen Buchstaben darzustellen, bedienen wir uns in der Folge des Buchstabens P (bez. $P_1, P_2 \ldots$), und verstehen unter einer Summe mehrerer solcher Reihen, $P_1 + P_2 + P_3 + \cdots$, eine Reihe, die aus den Paaren derselben zusammengesetzt ist, wobei die Aufeinanderfolge der Paare gleichgültig sein soll.

Zwei *Paare* heissen *identisch*, wenn die gleichstelligen Buchstaben in ihnen identisch sind, *entgegengesetzt*, wenn der erste und letzte Buchstabe des einen mit dem letzten und ersten Buchstaben des andern

identisch ist. Entsprechend heissen zwei *Reihen* P_1, P_2 *identisch*, oder *entgegengesetzt*, je nachdem die Paare der einen in irgend einer Reihenfolge genommen mit denen der andern identisch, oder entgegengesetzt sind. Durch denselben Buchstaben P (bez. $P_1, P_2, \ldots$) werden stets identische, durch P und $-P$ entgegengesetzte Reihen dargestellt.

Versteht man unter k eine positive oder negative ganze Zahl oder die Zahl Null, so soll unter dem Product kP, das durch Multipliciren der Reihe P mit k entsteht, eine Summe verstanden werden, die aus P und $-P$ ebenso zusammengesetzt ist, wie k aus $+1$ und -1. Danach versteht sich die Bedeutung der Summe $k_1P_1 + k_2P_2 + \cdots$ von selbst.

Eine Reihe P heisst eine „*Null*" und wird durch das Zeichen 0 dargestellt, wenn entweder sich ihre Paare so ordnen lassen, dass die Reihe die Gestalt erhält:

$$\text{I.} \qquad a_m^{n_p} a_m^{n_1} + a_m^{n_1} a_m^{n_2} + a_m^{n_2} a_m^{n_3} + \cdots + a_m^{n_{p-2}} a_m^{n_{p-1}} + a_m^{n_{p-1}} a_m^{n_p},$$

oder wenn die Reihe eine Summe von Reihen dieser Gestalt ist.

Zwei Reihen P_1 und P_2 heissen „*gleich*", wenn die Summe $P_1 + (-P_2)$ eine Null ist. Eine „*Gleichung*" $P_1 = P_2$ endlich ist der Ausdruck für die Gleichheit der beiden Reihen P_1 und P_2.

(α) Damit sind diejenigen Begriffsbestimmungen gegeben, die für die Weiterentwickelung der Theorie des Zusammenhanges erforderlich sind. Es lässt sich zeigen, *dass man mit den soeben entwickelten Begriffen der Summe, des Entgegengesetzten, der Null und der Gleichung ebenso operiren kann, wie in der Algebra*, sofern man sich beim Operiren auf Addiren und Subtrahiren*) von Gleichungen und Multipliciren derselben mit ganzen Zahlen beschränkt. Der nähere Nachweis hierfür mag dem Leser überlassen bleiben, man bedarf dazu des Satzes, dass man in einer Gleichung auf einer Seite beliebige Buchstabenpaare hinzufügen oder fortlassen kann, wenn diese 0 als Summe ergeben.

Wir verstehen daher jetzt, ebenso wie in der Algebra, unter einer linearen Gleichung für die Reihen $P_1, P_2, \ldots P_n$ eine Gleichung von der Form:

$$k_1P_2 + k_2P_2 + \cdots + k_nP_n = 0,$$

in welcher indessen $k_1, k_2, \ldots k_n$, die Coefficienten der Gleichung, positive oder negative ganze Zahlen oder die Zahl Null sind. Je nachdem eine solche lineare Gleichung, in der wenigstens ein Coefficient von Null verschieden ist, für die Reihen $P_1, P_2, \ldots P_n$ besteht,

*) Das Subtrahiren einer Reihe P ist dann als gleichbedeutend mit dem Addiren von $-P$ anzusehen.

oder nicht besteht, sagen wir, diese Reihen sind linear abhängig von einander, oder linear unabhängig von einander, und zwar heisst P_1 linear abhängig von $P_2 \ldots P_n$, wenn der Coefficient von P_1 von Null verschieden ist; ist dieser Coefficient ausserdem gleich 1, so heisst P_1 linear und ganzzahlig abhängig von $P_2 \ldots P_n$. Es ergeben sich weiter die folgenden Sätze:

1) Sind $n+1$ Reihen $P_1', P_2', \ldots P_{n+1}'$ linear abhängig von n Reihen $P_1, P_2, \ldots P_n$, so sind $P_1', P_2', \ldots P_{n+1}'$ linear abhängig von einander.

2) Sind n Reihen $P_1', P_2', \ldots P_n'$ linear und ganzzahlig abhängig von n linear von einander unabhängigen Reihen $P_1, P_2, \ldots P_n$ mittelst des Gleichungssystems:

$$P_\alpha' = k_{\alpha 1} P_1 + k_{\alpha 2} P_2 + \cdots + k_{\alpha n} P_n \ (\alpha = 1, 2, \ldots n),$$

so sind $P_1', P_2', \ldots P_n'$ linear abhängig, oder unabhängig von einander, je nachdem die Determinante des Coefficientensystems $[k_{\alpha\beta}] = 0$, oder von Null verschieden ist, und $P_1, P_2, \ldots P_n$ sind linear und ganzzahlig abhängig von $P_1', P_2', \ldots P_n'$, oder nicht, je nachdem diese Determinante den Werth ± 1 hat, oder nicht.

(β) Die Reihen P, welche uns im Folgenden beschäftigen sollen, sind nun Reihen besonderer Beschaffenheit, die wir als „*Cyklen*" bezeichnen und in folgender Weise definiren:

Eine Reihe P heisst ein Cyklus, wenn entweder ihre Paare sich so ordnen lassen, dass die Reihe die Gestalt erhält:

$$\text{II.} \quad a_{m_1}^{n_p} a_{m_1}^{n_1} + a_{m_2}^{n_1} a_{m_2}^{n_2} + a_{m_3}^{n_2} a_{m_3}^{n_3} + \cdots + a_{m_{p-1}}^{n_{p-2}} a_{m_{p-1}}^{n_{p-1}} + a_{m_p}^{n_{p-1}} a_{m_p}^{n_p},$$

oder wenn die Reihe eine Summe von Reihen dieser Gestalt ist.

Die Eigenschaft einer Reihe P, ein Cyklus zu sein, soll in der Folge durch $\overline{P}$ angedeutet werden.

Es ist nun klar, dass die Anzahl der Cyklen einer Reihe unendlich gross ist. Es lässt sich aber zeigen, dass sie sämmtlich von einer bestimmten Anzahl linear von einander unabhängiger Cyklen linear und ganzzahlig abhängig sind, und diese Anzahl ist gleich dem Grade des Zusammenhanges der gegebenen Reihe. Zum Nachweise dieses sollen die nächsten Sätze dienen:

1) *Jeder auf eine einfach zusammenhängende Reihe bezogene Cyklus ist gleich Null.*

Jeder Cyklus lässt sich nämlich aus Reihen von der obigen Form II zusammensetzen. Ist nun eine Reihe dieser Form auf eine einfach zusammenhängende Reihe bezogen, so muss sich in ihr, wenn nicht $n_p = n_1$ ist, ausser dem ersten Paar wenigstens noch ein Paar finden, dessen unterer Index gleich m_1 ist. Wäre dies nämlich nicht der

Fall, so würde durch Spalten des Gliedes A_{m_1} der gegebenen Reihe in die beiden Glieder A'_{m_1}, A''_{m_1}, von denen $A'_{m_1}\, a_{m_1}^{n_p}$, $A''_{m_1}\, a_{m_1}^{n_1}$ enthielte, aus der gegebenen Reihe eine Reihe entstehen, in der A'_{m_1}, A''_{m_1} zusammenhängen würden. Sei nun $a_{m_k}^{n_{k-1}}\, a_{m_k}^{n_k}$ das erste unter den auf $a_{m_1}^{n_p}\, a_{m_1}^{n_1}$ folgenden Paaren, dessen unterer Index $m_k = m_1$ ist. Alsdann muss $n_{k-1} = n_1$ sein, denn sonst wäre

$$a_{m_1}^{n_{k-1}}\, a_{m_1}^{n_1} + a_{m_2}^{n_1}\, a_{m_2}^{n_2} + a_{m_3}^{n_2}\, a_{m_3}^{n_3} + \cdots + a_{m_{k-1}}^{n_{k-2}}\, a_{m_{k-1}}^{n_{k-1}}$$

ebenfalls ein auf die gegebene Reihe bezogener Cyklus von der Gestalt II, in dem sich ausser dem ersten kein zweites Paar mit dem unteren Index m_1 fände, was, wie bewiesen, wenn n_{k-1} nicht $= n_1$ ist, unmöglich ist. Nun ist wieder

$$a_{m_1}^{n_p}\, a_{m_1}^{n_k} + a_{m_{k+1}}^{n_k}\, a_{m_{k+1}}^{n_{k+1}} + \cdots + a_{m_p}^{n_{p-1}}\, a_{m_p}^{n_p}$$

ein auf die gegebene Reihe bezogener Cyklus von der Gestalt II, für den man den ganzen Schluss wiederholen kann: Der Cyklus muss, wenn nicht $n_p = n_k$ ist, ausser dem ersten wenigstens noch ein Paar mit dem unteren Index m_1 haben, und bestimmt man das erste dieser Paare, so muss der obere Index des ersten Buchstabens desselben gleich n_k sein. Da aber die Anzahl der Paare endlich ist, so muss man, in dieser Weise weiter gehend, einmal zu einem Paare mit dem unteren Index m_1 gelangen, dessen letzter Buchstabe den obern Index n_p hat. Dann bilden die erhaltenen Paare einen Cyklus von der Gestalt II, in dem aber die sämmtlichen unteren Indices gleich m_1 sind, der also von der Form I, somit gleich Null ist. Lässt man diese Paare aus dem gegebenen Cyklus fort, so ist auch die Reihe der übrigbleibenden Paare ein Cyklus, in dem wieder irgend ein Paar mit anderen zusammen Null ergeben muss, u. s. f.

2) *Unter den auf eine gegebene Reihe bezogenen Cyklen giebt es stets eine, dem Grade des Zusammenhanges der Reihe gleiche Anzahl linear von einander unabhängiger Cyklen, von denen jeder auf die Reihe bezogene Cyklus linear und ganzzahlig abhängig ist.*

Wir beweisen zuerst, dass es eine dem Grade des Zusammenhanges gleiche Anzahl linear von einander unabhängiger Cyklen giebt. Die gegebene Reihe $A_1 A_2 \ldots A_n$ werde in der § 3 (φ) angegebenen Weise geordnet vorausgesetzt, sodass also die Glieder derselben transitiven Gruppe unmittelbar auf einander folgen und jedes Glied, die Anfangsglieder der transitiven Gruppen ausgenommen, wenigstens einen Buchstaben enthält, zu dem sich in der Reihe der vorangehenden Glieder ein gleicher findet. Die Anzahl aller dieser Buchstaben ist, unter

Beibehaltung der Bezeichnung in § 3 (φ), gleich $\Sigma_\alpha \varepsilon_\alpha = w$, da jetzt $\omega_\alpha = 0$ ist. Von diesen Buchstaben wählen wir aus jedem Gliede einen nach Belieben aus, sodass die Anzahl der ausgewählten Buchstaben gleich $n - r$ ist, und bezeichnen die übrigen $w - (n - r)$, entsprechend der jetzt angenommenen Bezeichnungsweise, durch

$$a_{m_1}^{n_1},\ a_{m_2}^{n_2} \ldots a_{m_s}^{n_s} \big(s = w - (n - r)\big),$$

wobei $m_\alpha \geqq m_\beta$ sein soll, wenn $\alpha > \beta$ ist. Zu jedem Buchstaben $a_{m_\alpha}^{n_\alpha}$ wird nun einer der ausgewählten Buchstaben, $a_{m_\alpha}^{n'_\alpha}$ gehören, der demselben Reihengliede A_{m_α} angehört. Zu diesen beiden Buchstaben $a_{m_\alpha}^{n_\alpha}$, $a_{m_\alpha}^{n'_\alpha}$ werden sich ferner in der Reihe der dem Gliede A_{m_α} vorangehenden Glieder gleiche Buchstaben finden, die im Gebiete dieser Reihe zusammenhängen (§ 2 (β)). Daraus geht hervor, dass man immer einen Cyklus mit dem Buchstabenpaare $a_{m_\alpha}^{n_\alpha}\ a_{m_\alpha}^{n'_\alpha}$ wird bilden können, der ausser diesem Buchstabenpaare nur Paare mit kleineren unteren Indices als m_α enthält. Ein solcher Cyklus wird daher auch keinen der Buchstaben $a_{m_{\alpha+1}}^{n_{\alpha+1}}$, $a_{m_{\alpha+2}}^{n_{\alpha+2}} \ldots a_{m_s}^{n_s}$ enthalten; denn obgleich zwar unter diesen Buchstaben sich noch solche finden können, deren unterer Index gleich m_α ist, so findet sich doch unter diesen letzteren keiner, dessen oberer Index gleich n_α oder n'_α ist. Wir stellen einen solchen Cyklus dar durch

$$\overline{P}\left(g_1 a_{m_1}^{n_1},\ g_2 a_{m_2}^{n_2},\ \ldots g_{\alpha-1} a_{m_{\alpha-1}}^{n_{\alpha-1}},\ a_{m_\alpha}^{n_\alpha},\ 0\, a_{m_{\alpha+1}}^{n_{\alpha+1}} \ldots 0\, a_{m_s}^{n_s}\right),$$

indem wir allgemein einen Cyklus, der den Buchstaben $a_{m_1}^{n_1}$ g_1 mal, den Buchstaben $a_{m_2}^{n_2}$ g_2 mal u. s. f. enthält, durch

$$\overline{P}\big(g_1 a_{m_1}^{n_1},\ g_2 a_{m_2}^{n_2} \ldots g_s a_{m_s}^{n_s}\big)$$

darstellen wollen. Man kann also $s = w - (n - r)$ Cyklen bilden von der Gestalt:

$$\overline{P}\big(a_{m_1}^{n_1},\ 0\, a_{m_2}^{n_2},\ 0\, a_{m_3}^{n_3} \ldots 0\, a_{m_s}^{n_s}\big),$$

$$\overline{P}\big(g_1 a_{m_1}^{n_1},\ a_{m_2}^{n_2},\ 0\, a_{m_3}^{n_3} \ldots 0\, a_{m_s}^{n_s}\big),$$

$$\overline{P}\big(g_1 a_{m_1}^{n_1},\ g_2 a_{m_2}^{n_2},\ a_{m_3}^{n_3},\ 0\, a_{m_4}^{n_4} \ldots 0\, a_{m_s}^{n_s}\big) \ldots$$

$$\overline{P}\big(g_1 a_{m_1}^{n_1},\ g_2 a_{m_2}^{n_2} \ldots g_{s-1} a_{m_{s-1}}^{n_{s-1}},\ a_{m_s}^{n_s}\big),$$

die wir kurz durch $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots \overline{P}_s$ bezeichnen. Diese Cyklen müssen nun linear von einander unabhängig sein. Denn in der Summe

$$\sum_{\alpha=1}^{s} k_\alpha \overline{P}_\alpha,$$

in der die Buchstaben k_α positive oder negative ganze Zahlen bedeuten, kommt der Buchstabe $a_{m_s}^{n_s}$ nur in $\overline{P}_s$, und zwar in dem Paare $a_{m_s}^{n_s} a_{m_s}^{n_s'}$ vor. Je nachdem daher $k_s > 0$, oder < 0 ist, ist diese Summe gleich einer Summe, die den Buchstaben $a_{m_s}^{n_s}$ in k_s Paaren $a_{m_s}^{n_s} a_{m_s}^{n_s'}$, oder in $-k_s$ Paaren $a_{m_s}^{n_s'} a_{m_s}^{n_s}$ enthält und sonst nicht. Dann ergiebt also sicher das Paar $a_{m_s}^{n_s} a_{m_s}^{n_s'}$, bez. $a_{m_s}^{n_s'} a_{m_s}^{n_s}$ nicht mit andern Paaren der Summe zusammen eine Null und die Summe kann daher keine Null und folglich auch nicht gleich Null sein*). Soll also

$$\sum_{\alpha=1}^{s} k_\alpha \overline{P}_\alpha = 0$$

sein, so muss $k_s = 0$ sein. Dann ist

$$\sum_{\alpha=1}^{s} k_\alpha \overline{P}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{s-1} k_\alpha \overline{P}_\alpha.$$

Wäre nun $k_{\alpha-1} \gtrless 0$, so folgt ebenso, dass das Paar $a_{m_{s-1}}^{n_{s-1}} a_{m_{s-1}}^{n_{s-1}'}$ bez. $a_{m_{s-1}}^{n_{s-1}'} a_{m_{s-1}}^{n_{s-1}}$ nicht mit andern Paaren der Summe

$$\sum_{\alpha=1}^{s-1} k_\alpha \overline{P}_\alpha$$

Null ergeben könnte, dass also auch $k_{s-1} = 0$ sein muss u. s. f. Die Cyklen $\overline{P}_1, \overline{P}_2 \ldots \overline{P}_s$ können daher keiner linearen Gleichung der Form

$$\sum_{\alpha=1}^{s} k_\alpha P_\alpha = 0$$

genügen, in der ein Coefficient von 0 verschieden ist, d. h. $\overline{P}_1, \overline{P}_2 \ldots \overline{P}_s$ sind linear unabhängig von einander.

Sei nun

$$\overline{P}\left(g_1 a_{m_1}^{n_1},\; g_2 a_{m_2}^{n_2} \ldots g_s a_{m_s}^{n_s}\right)$$

ein beliebiger Cyklus. $a_{m_s}^{n_s''} a_{m_s}^{n_s}$ sei eines der Buchstabenpaare desselben,

*) Dass nur dann eine Reihe $P = 0$ sein kann, wenn P mit einer Null identisch ist, gehört mit zu den Sätzen, deren Beweis dem Leser überlassen worden ist.

die den Buchstaben $a^{n_s}_{m_s}$ enthalten. Wir fügen zu diesem Cyklus hinzu die Summe

$$\overline{P}_s + a^{n_s'}_{m_s} a^{n_s}_{m_s} + a^{n_s}_{m_s} a^{n_s''}_{m_s} + a^{n_s''}_{m_s} a^{n_s'}_{m_s}$$

und lassen aus der ganzen so erhaltenen Summe

$$a^{n_s''}_{m_s} a^{n_s}_{m_s} + a^{n_s}_{m_s} a^{n_s'}_{m_s} + a^{n_s'}_{m_s} a^{n_s}_{m_s} + a^{n_s}_{m_s} a^{n_s''}_{m_s} = 0$$

fort. Die hierdurch erhaltene Summe ist, wie man leicht sieht, wieder ein Cyklus, den man sich auch aus

$$\overline{P}\left(g_1 a^{n_1}_{m_1} \ldots g_s a^{n_s}_{m_s}\right) + \overline{P}_s$$

dadurch entstanden denken kann, dass man die Summe

$$a^{n_s''}_{m_s} a^{n_s}_{m_s} + a^{n_s}_{m_s} a^{n_s'}_{m_s},$$

wo das letzte Paar als Paar von $\overline{P}_s$ zu betrachten ist, durch $a^{n_s''}_{m_s} a^{n_s'}_{m_s}$ ersetzt. Da nun $\overline{P}_s$ den Buchstaben $a^{n_s}_{m_s}$ nur einmal enthält, so wird der erhaltene Cyklus den Buchstaben $a^{n_s}_{m_s}$ nur $g_s - 1$ mal enthalten. Man erhält daher, da auch die Summe

$$a^{n_s'}_{m_s} a^{n_s}_{m_s} + a^{n_s}_{m_s} a^{n_s''}_{m_s} + a^{n_s''}_{m_s} a^{n_s'}_{m_s} = 0$$

ist:

$$\overline{P}\left(g_1 a^{n_1}_{m_1} \ldots g_s a^{n_s}_{m_s}\right) + \overline{P}_s = \overline{P}\left(g_1' a^{n_1}_{m_1} \ldots g_{s-1}' a^{n_{s-1}}_{m_{s-1}}, (g_s - 1) a^{n_s}_{m_s}\right),$$

$$\overline{P}\left(g_1 a^{n_1}_{m_1} \ldots g_s a^{n_s}_{m_s}\right) = -\overline{P}_s + \overline{P}\left(g_1' a^{n_1}_{m_1} \ldots g_{s-1}' a^{n_{s-1}}_{m_{s-1}} (g_s - 1) a^{n_s}_{m_s}\right).$$

Auf ganz ähnliche Weise ergiebt sich, wenn der Buchstabe $a^{n_s}_{m_s}$ des gegebenen Cyklus in einem Paare von der Form $a^{n_s}_{m_s} a^{n_s''}_{m_s}$ enthalten vorausgesetzt wird, dass man stets

$$\overline{P}\left(g_1 a^{n_1}_{m_1} \ldots g_s a^{n_s}_{m_s}\right) = \overline{P}_s + \overline{P}\left(g_1' a^{n_1}_{m_1} \ldots g_{s-1}' a^{n_{s-1}}_{m_{s-1}}, (g_s - 1) a^{n_s}_{m_s}\right)$$

setzen darf. Da man für

$$\overline{P}\left(g_1' a^{n_1}_{m_1} \ldots g_{s-1}' a^{n_{s-1}}_{m_{s-1}}, (g_s - 1) a^{n_s}_{m_s}\right)$$

den gleichen Schluss wiederholen kann u. s. f., so erkennt man, dass sich stets eine positive oder negative ganze Zahl k_s, die auch Null sein kann, muss bestimmen lassen, sodass

$$\overline{P}\left(g_1 a^{n_1}_{m_1} \ldots g_s a^{n_s}_{m_s}\right) = k_s \overline{P}_s + \overline{P}\left(h_1 a^{n_1}_{m_1} \ldots h_{s-1} a^{n_{s-1}}_{m_{s-1}}, 0 a^{n_s}_{m_s}\right)$$

wird, wo $h_1, h_2 \ldots h_{s-1}$ wieder positive ganze Zahlen sind.

Nun enthält aber auch der Cyklus $\overline{P}_{s-1}$ den Buchstaben $a_{m_s}^{n_s}$ nicht. Man wird daher auch folgern können, dass für eine gewisse positive oder negative ganze Zahl k_{s-1} sich

$$\overline{P}\left(h_1 a_{m_1}^{n_1} \ldots h_{s-1} a_{m_{s-1}}^{n_{s-1}},\ 0 a_{m_s}^{n_s}\right) =$$
$$k_{s-1}\overline{P}_{s-1} + \overline{P}\left(i_1 a_{m_1}^{n_1} \ldots i_{s-2} a_{m_{s-2}}^{n_{s-2}},\ 0 a_{m_{s-1}}^{n_{s-1}},\ 0 a_{m_s}^{n_s}\right)$$

muss setzen lassen. Durch Fortsetzung dieser Schlussweise gelangt man zu dem Resultat, dass es eine Reihe positiver oder negativer ganzer Zahlen $k_1, k_2, \ldots k_s$ (die auch Null sein können) geben muss, für welche

$$P\left(g_1 a_{m_1}^{n_1} \ldots g_s a_{m_s}^{n_s}\right) = \sum_{\alpha=1}^{s} k_\alpha \overline{P}_\alpha + \overline{P}\left(0 a_{m_1}^{n_1},\ 0 a_{m_2}^{n_2} \ldots 0 a_{m_s}^{n_s}\right)$$

ist. Es ist aber leicht zu sehen, dass

$$\overline{P}\left(0 a_{m_1}^{n_1},\ 0 a_{m_2}^{n_2} \ldots 0 a_{m_s}^{n_s}\right) = 0$$

ist. Denkt man sich nämlich aus der gegebenen Reihe die Buchstaben $a_{m_1}^{n_1}, a_{m_2}^{n_2} \ldots a_{m_s}^{n_s}$ fortgelassen, so kann ein Cyklus von der Form

$$\overline{P}\left(0 a_{m_1}^{n_1} \ldots 0 a_{m_s}^{n_s}\right)$$

auf die hierdurch erhaltene Reihe bezogen gedacht werden. Diese Reihe ist aber einfach zusammenhängend und der Cyklus daher nach dem vorigen Satz gleich Null. Es ergiebt sich also

$$\overline{P}\left(g_1 a_{m_1}^{n_1} \ldots g_s a_{m_s}^{n_s}\right) = \sum_{\alpha=1}^{s} k_\alpha \overline{P}_\alpha,$$

und damit ist Satz 2 bewiesen.

(γ) Eine Gruppe linear von einander unabhängiger Cyklen, die sich unter den auf eine gegebene Reihe bezogenen Cyklen angeben lassen, und von denen jeder andere auf die Reihe bezogene Cyklus linear und ganzzahlig abhängig ist, soll *„ein primitives Cyklensystem der gegebenen Reihe“* heissen. Aus dem Vorangehenden ergiebt sich nun leicht der Satz:

Die Anzahl der Cyklen eines primitiven Cyklensystems einer Reihe ist gleich dem Grade des Zusammenhanges der Reihe, und man erhält alle möglichen primitiven Cyklensysteme einer Reihe aus einem beliebigen unter ihnen $\overline{P}_1 \overline{P}_2 \ldots \overline{P}_s$, wenn man in dem Gleichungssystem

$$\overline{P}_\alpha' = \sum_{\beta=1}^{s} k_{\alpha\beta} \overline{P}_\beta \quad (\alpha = 1, 2 \ldots s)$$

den Coefficienten $k_{\alpha\beta}$ alle möglichen positiven oder negativen ganzen Zahlen beilegt, für welche die zugehörige Determinante des Coefficientensystems $[k_{\alpha\beta}] = \pm 1$ ist.

Zunächst nämlich kann die Anzahl der Cyklen in einem primitiven System nicht grösser als der Grad s des Zusammenhanges sein, weil je $s+1$ Cyklen von den s Cyklen des in (β) ermittelten primitiven Systems linear und ganzzahlig abhängig sind (β (2)), folglich je $s+1$ Cyklen linear von einander abhängig sein müssen (α (1)). Ebensowenig kann diese Anzahl kleiner als s sein, weil sonst die s Cyklen des in (β) ermittelten primitiven Systems linear von einander abhängig sein müssten. Ist nun $\overline{P_1}\,\overline{P_2}\ldots\overline{P_s}$ ein beliebiges primitives System, so hat man für je s Cyklen:

$$\overline{P_\alpha'} = \sum_{\beta=1}^{s} k_{\alpha\beta}\overline{P_\beta}, \qquad (\alpha = 1, \ldots s)$$

wo die Coefficienten $k_{\alpha\beta}$ positive oder negative ganze Zahlen sind. Hier muss (α (2)) die Determinante $[k_{\alpha\beta}] = \pm 1$ sein, wenn $\overline{P_1}\,\overline{P_2}\ldots\overline{P_s}$ linear und ganzzahlig von $\overline{P_1'}\,\overline{P_2'}\ldots\overline{P_s'}$ abhängig sein sollen, und ist $[k_{\alpha\beta}] = \pm 1$, so ist auch $\overline{P_1}\,\overline{P_2}\ldots\overline{P_s}$ und folglich jeder Cyklus linear und ganzzahlig abhängig von $\overline{P_1'}, \overline{P_2'}\ldots\overline{P_s'}$, und diese Cyklen sind linear unabhängig von einander.

Zusatz: Zu Anfang dieses Paragraphen wurde bemerkt, dass die Deutung, die der Grad des Zusammenhanges in § 3 (φ) erfahren hat — als Anzahl der successive ausführbaren Spaltungen, welche die Anzahl der transitiven Gruppen nicht ändern — implicite in der jetzt ermittelten Bedeutung enthalten ist. Man denke sich nämlich ein primitives Cyklensystem so hergestellt, dass kein Cyklus zwei Paare mit gleichem unteren Index enthält. Dann ist unmittelbar evident, dass eine Spaltung, welche zwei Buchstaben trennt, auf die ein Paar eines der Cyklen dieses Systems bezogen ist, *immer eine Spaltung der ewähnten Art ist. Andererseits wird aber auch durch jede andere Spaltung die Anzahl der transitiven Gruppen um* 1 *vermehrt,* denn das primitive Cyklensystem der gegebenen Reihe bildet in diesem Falle gleichzeitig ein primitives System der durch die Spaltung entstandenen Reihe, die somit den gleichen Grad des Zusammenhanges, wie die gegebene hat. Man kann also sagen, dass man so oft nach einander Spaltungen der ersten Art ausführen kann, als durch die Spaltungen Reihen entstehen, die primitive Cyklensysteme besitzen, also, da durch jede Spaltung mit dem Grade des Zusammenhanges zugleich die Anzahl der Cyklen in den primitiven Systemen um eine Einheit sinkt, so oft mal, wie der Grad des Zusammenhanges angiebt.

B. Ueber Substitutionen.

§ 1.

Wenn man voraussetzt, dass in zweien oder mehreren Producten cyklischer Substitutionen keine zwei Factoren desselben Products gleiche Buchstaben enthalten, oder, wie wir in Zukunft sagen wollen, dass die Producte aus „nicht zusammenhängenden“ cyklischen Factoren bestehen, so können die Producte nur dann gleichwerthig sein, wenn die Factoren des einen mit denen des andern in irgend einer Reihenfolge genommen übereinstimmen, sofern man in dem einen oder andern etwa fehlende identische cyklische Factoren hinzufügt. Lässt man aber als möglich zu, dass die Factoren eines Products Buchstaben gemeinsam haben, so können die Producte bei gleichem Werthe verschiedene Form besitzen. Die Ermittelung von Beziehungen zwischen diesen verschiedenen Formen soll uns im vorliegenden Abschnitte beschäftigen. Hierzu sollen uns die in A entwickelten Begriffsverknüpfungen dienen. Indem wir uns dieselben auf ein Product cyklischer Substitutionen angewandt denken, denken wir uns an Stelle des Products eine *Reihe*, deren Glieder die Buchstabenreihen der einzelnen cyklischen Factoren des Products sind. Dabei werden wir aber der Kürze halber die in A eingeführten Bezeichnungen einfach auf das Product übertragen, und in diesem Sinne von einfach und mehrfach zusammenhängenden Producten, den transitiven Gruppen eines Products u. s. w. reden. Da ferner keine zwei der transitiven Gruppen einer Reihe einen Buchstaben gemeinsam haben, so ist klar, dass man in einem Producte cyklischer Substitutionen, ohne den Werth desselben zu ändern, die Factoren stets so gegen einander vertauschen kann, dass die Factoren derselben transitiven Gruppe unmittelbar auf einander folgen, nur dürfen diese ihre gegenseitige Anordnung nicht ändern. In dieser Form sollen daher der Einfachheit halber die Producte vorausgesetzt werden, wenn von den transitiven Gruppen die Rede ist.

Wir wollen die Gesammtheit aller mit einem Product cyklischer Substitutionen gleichwerthigen Producte eine Gruppe*) gleichwerthiger Producte nennen. Da nun jede Gruppe gleichwerthiger Producte durch eines ihrer Individuen völlig bestimmt ist, so bietet sich zunächst die Frage nach denjenigen Verfahrungsweisen oder Operationen dar, welche es gestatten, aus einem Producte alle gleichwerthigen zu erhalten. Es lässt sich nun zeigen, dass man zwei beliebige gleichwerthige Producte durch wiederholte Anwendung dreier Operationen in

---

*) Dass hier das Wort „Gruppe“ nicht im specifisch gruppentheoretischen Sinne gebraucht ist, bedarf wohl keiner weiteren Ausführung.

einander überführen kann: 1) Versetzen von Factoren, 2) Zerlegen und Vereinigen cyklischer Substitutionen 3) Hinzufügen oder Unterdrücken identischer Producte. Von diesen Operationen werden die beiden ersten im Verlaufe dieser Abhandlung näher charakterisirt werden, die dritte ist für sich verständlich. Denkt man sich nun die Producte einer Gruppe dadurch in Classen geschieden, dass man je zwei Producte in dieselbe Classe, oder in verschiedene Classen bringt, je nachdem sie sich durch die beiden ersten Operationen allein in einander umwandeln lassen, oder nicht, so findet zwischen zwei Producten einer Classe ausserdem die Beziehung statt, dass die transitiven Gruppen derselben in den Buchstaben und im Grade des Zusammenhanges übereinstimmen, während anderseits auch diese Beziehung zwischen Producten verschiedener Classen fehlt. Es wird also durch diese der Theorie des Zusammenhanges in Reihen angehörende Beziehung die ganze Gruppe gleichwerthiger Producte in dieselben Classen geschieden, wie durch jene auf substitutionstheoretischen Principien der Umwandlung beruhende Scheidung. Wir werden dieses Resultat, welches das Schlussergebniss der vorliegenden Abhandlung bildet, indessen in einer etwas andern Form entwickeln, zu der man auf folgende Weise gelangt.

Nach A § 3 (φ) ist der Grad des Zusammenhanges einer Reihe gleich $w-(n-r)$, wenn w die Wiederholung in der Reihe, n die Anzahl ihrer Glieder und r die ihrer transitiven Gruppen bedeutet. Ist nun N' die Anzahl aller in der Reihe enthaltenen Buchstaben, N die Anzahl der verschiedenen unter ihnen, so ist

$$w-(n-r)=N'-N-(n-r)=N'-n-(N-r).$$

Stimmen die transitiven Gruppen zweier Reihen in den Buchstaben überein, so haben die Zahlen N und r für beide Reihen dieselben Werthe, und es hat somit die Differenz $w-(n-r)$ für zwei solche Reihen denselben Werth oder nicht, je nachdem dies von der Differenz $N'-n$ gilt, oder nicht. Diese Differenz aus der Anzahl aller in einer Reihe enthaltenen Buchstaben und der Anzahl der Reihenglieder soll daher mit einem besondern Worte, als „*Excess*" der Reihe (bez. des Products cyklischer Substitutionen) bezeichnet werden. Alsdann lässt sich die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass zwei gleichwerthige Producte cyklischer Substitutionen derselben Classe angehören, dahin aussprechen, dass die transitiven Gruppen des einen Products mit denen des andern in den Buchstaben und im Excess übereinstimmen müssen.

§ 2.

(α) Es sei

$$(A_1)(A_2)\ldots(A_{k-1})(A_k)(A_{k+1})\ldots(A_n) = \Pi^{*})$$

ein beliebiges Product cyklischer Substitutionen. Zu irgend einem Factor (A_k) desselben kann man immer zwei cyklische Substitutionen (A_k'), (A_k'') ermitteln von der Beschaffenheit, dass wenn

$$\Pi_1 = (A_1)(A_2)\ldots(A_{k-2})(A_k')(A_{k-1})(A_{k+1})(A_{k+2})\ldots(A_n),$$
$$\Pi_2 = (A_1)(A_2)\ldots(A_{k-1})(A_{k+1})(A_k'')(A_{k+2})\ldots(A_n)$$

gesetzt wird, alsdann $\Pi_1 = \Pi$, $\Pi_2 = \Pi$ ist. Dabei sind (A_k'), (A_k'') dadurch bestimmt, dass die Buchstabenreihe A_k'' durch die Wirkung der cyklischen Substitution (A_{k+1}) übergeführt wird in A_k, und die Buchstabenreihe A_k durch die Wirkung der cyklischen Substitution (A_{k-1}) übergeführt wird in A_k'. Diese Bildung eines neuen, dem gegebenen gleichen Products bezeichnen wir als ein Umwandeln des gegebenen Products durch Versetzen eines Factors um eine Stelle nach rechts, bez. nach links, nämlich des Factors (A_{k-1}) um eine Stelle nach rechts und des Factors (A_{k+1}) um eine Stelle nach links. Wird das gegebene Product cyklischer Substitutionen durch Versetzen eines Factors um eine Stelle in ein zweites, dieses wieder durch Versetzen eines Factors um eine Stelle in ein drittes u. s. f. umgewandelt, so nennen wir diese Bildung neuer, dem gegebenen Product gleicher Producte allgemein ein Umwandeln des gegebenen Products durch Versetzen von Factoren**). Man überzeugt sich nun aus der Bildungsweise der obigen beiden Buchstabenreihen A_k', A_k'' leicht, dass man immer im Sinne von A § 2 (α) $A_k' A_{k-1} \equiv A_{k-1} A_k$ und $A_{k+1} A_k' \equiv A_k A_{k+1}$ setzen darf. Folglich hat man auch:

$$\begin{aligned} & A_1 A_2 \ldots A_{k-1} A_k A_{k+1} \ldots A_n \\ \equiv\ & A_1 A_2 \ldots A_{k-2} A_k' A_{k-1} A_{k+1} \ldots A_n \\ \equiv\ & A_1 A_2 \ldots A_{k-1} A_{k+1} A_k'' A_{k+2} \ldots A_n. \end{aligned}$$

Ausserdem stimmen offenbar die in den Buchstaben übereinstimmenden transitiven Gruppen auch in der Anzahl der Buchstaben und Glieder, somit im Excess überein. Gilt dies aber für die Umwandlung durch Versetzen eines Factors um eine Stelle, so gilt es offenbar für die Umwandlung durch Versetzen von Factoren überhaupt, und man erhält den Satz:

---

*) Die cyklischen Substitutionen, welche die Factoren eines Products bilden, werden in der Reihenfolge von rechts nach links ausgeführt gedacht. Die cyklische Substitution $(A) = (abc\ldots ef)$ soll die Buchstabenreihe $abc\ldots ef$ in $bc\ldots efa$ überführen.

**) Es ist klar, dass das in § 1 erwähnte Vertauschen der Factoren unter den Begriff des Versetzens fällt, dieses Vertauschen also keine neue Operation bedingt.

Kann man zwei Producte cyklischer Substitutionen durch Versetzen von Factoren in einander umwandeln, so stimmen die transitiven Gruppen des einen mit denen des andern in den Buchstaben und im Excess überein.

(β) Bevor wir zur zweiten Operation übergehen, soll hier noch eines besonderen Falles der Umwandlung durch Versetzen von Factoren Erwähnung geschehen, der für einen zur Theorie der Riemann'schen Fläche gehörenden Satz von Wichtigkeit ist. Es ist klar, dass man mehrere Factoren immer so versetzen kann, indem man sie wiederholt um eine Stelle versetzt, dass sie in dem neuen Product unmittelbar auf einander folgen, sofern man nur ihre gegenseitige Anordnung unverändert lässt. Es ist aber hierbei der Fall, dass die zu versetzenden Factoren am Anfange oder Ende des neuen Products auf einander folgen sollen, insofern bemerkenswerth, als in diesem Falle das Versetzen sich so ausführen lässt, dass die übrigen Factoren des neuen Products eine besondere, allen gemeinsame Form der Abhängigkeit von den übrigen Factoren des gegebenen Products erhalten. Nennt man nämlich eine cyklische Substitution (A_k') bez. (A_k'') die links, bez. rechts adjungirte Substitution eines Factors (A_k) in einem Producte cyklischer Substitutionen, wenn

$$\begin{aligned}&(A_1)(A_2)\dots(A_{k-1})(A_k)(A_{k+1})\dots(A_n)\\ =\;&(A_k')(A_1)(A_2)\dots(A_{k-1})(A_{k+1})\dots(A_n)\\ =\;&(A_1)(A_2)\dots(A_{k-1})(A_{k+1})\dots(A_n)(A_k'')\end{aligned}$$

ist*), so kann man den folgenden Satz beweisen:

Sollen mehrere Factoren eines Products cyklischer Substitutionen so versetzt werden, dass sie am Anfange (zur Linken) oder Ende (zur Rechten) des neuen Products unmittelbar auf einander folgen, so kann dies in solcher Weise geschehen, dass an die Stelle der übrigen Factoren des gegebenen Products ihre rechts, bez. links adjungirten Substitutionen in umgekehrter Reihenfolge treten; in Formeln, wenn $(A_{k_1}).(A_{k_1+k_2})\dots(A_{k_1+k_2+\dots+k_m})$ die zu versetzenden Factoren sind, dass

$$\begin{aligned}&(A_1)(A_2)\dots(A_{k_1-1})(A_{k_1})(A_{k_1+1})\dots(A_{k_1+k_2-1})(A_{k_1+k_2})(A_{k_1+k_2+1})\dots(A_{k_1+k_2+k_3-1})\\ &\quad\dots(A_{k_1+\dots+k_{m-1}+1})\dots(A_{k_1+\dots+k_m-1})(A_{k_1+\dots+k_m})(A_{k_1+\dots+k_m+1})\dots(A_n)\\ =\;&(A_n')\dots(A'_{k_1+\dots+k_m+1})(A'_{k_1+\dots+k_m-1})\dots(A'_{k_1+\dots+k_{m-1}+1})\dots(A'_{k_1+k_2-1})\dots\\ &\quad\dots(A'_{k_1+1})(A'_{k_1-1})\dots(A_1')(A_{k_1})(A_{k_1+k_2})\dots(A_{k_1+\dots+k_m})\\ =\;&(A_{k_1})(A_{k_1+k_2})\dots(A_{k_1+\dots+k_m}).(A_n'')\dots(A''_{k_1+\dots+k_m+1})(A''_{k_1+\dots+k_m-1})\dots(A''_{k_1+\dots+k_{m-1}+1})\\ &\quad\dots(A''_{k_1+k_2-1})\dots(A''_{k_1+1})(A''_{k_1-1})\dots(A_1'')\end{aligned}$$

wird.

---

*) Der erste und letzte Factor sind dabei mit ihrer links, bez. rechts adjungirten Substitution identisch zu denken.

§ 3.

(α) Um die spätere Darstellung nicht zu unterbrechen, mögen zunächst hier zwei Formeln Platz finden, die im Folgenden zur Anwendung gelangen und sich leicht durch wiederholte Anwendung der Formel ergeben, welche ausdrückt, dass ein Product zweier cyklischen Substitutionen mit *einem* gemeinsamen Buchstaben einer einzigen cyklischen Substitution gleichwerthig ist. Diese beiden Formeln sind:

$$
\begin{aligned}
(1)\quad & (a_{n_1+n_2+\cdots+n_{r-1}+1}\, a_{n_1+n_2+\cdots+n_{r-1}+2} \cdots a_{n_1+n_2+\cdots+n_{r-1}+n_r}\, a_1\, a_2 \cdots a_{n_1}) \\
& \cdot (a_{n_1+1}\, a_{n_1+2} \cdots a_{n_1+n_2}) \cdot (a_{n_1+n_2+1}\, a_{n_1+n_2+2} \cdots a_{n_1+n_2+n_3}) \\
& \quad \cdot\ \cdot \\
& \cdot (a_{n_1+n_2+\cdots+n_{r-2}+1}\, a_{n_1+n_2+\cdots+n_{r-2}+2} \cdots a_{n_1+n_2+\cdots+n_{r-2}+n_{r-1}}) \\
& \cdot (a_{n_1}\, a_{n_1+n_2}\, a_{n_1+n_2+n_3} \cdots a_{n_1+n_2+\cdots+n_{r-1}}) \\
= & (a_1\, a_2 \cdots a_{n_1}\, a_{n_1+1} \cdots a_{n_1+n_2}\, a_{n_1+n_2+1} \cdots a_{n_1+n_2+n_3}\, a_{n_1+n_2+n_3+1} \cdots \\
& \cdots a_{n_1+n_2+\cdots+n_{r-1}}\, a_{n_1+n_2+\cdots+n_{r-1}+1} \cdots a_{n_1+n_2+\cdots+n_{r-1}+n_r}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(2)\quad & (a_{n_1}\, a_{n_1+n_2}\, a_{n_1+n_2+n_3} \cdots a_{n_1+n_2+\cdots+n_{r-1}}) \\
& \cdot (a_{n_1}\, a_{n_1+1} \cdots a_{n_1+n_2-1})\, (a_{n_1+n_2}\, a_{n_1+n_2+1} \cdots a_{n_1+n_2+n_3-1}) \\
& \quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
& \cdot (a_{n_1+n_2+\cdots+n_{r-2}}\, a_{n_1+n_2+\cdots+n_{r-2}+1} \cdots a_{n_1+n_2+\cdots+n_{r-2}+n_{v-1}-1}) \\
& \cdot (a_{n_1+n_2+\cdots+n_{r-1}}\, a_{n_1+n_2+\cdots+n_{r-1}+1} \cdots a_{n_1+n_2+\cdots+n_r}\, a_1\, a_2 \cdots a_{n_1-1}) \\
= & (a_1\, a_2 \cdots a_{n_1}\, a_{n_1+1} \cdots a_{n_1+n_2}\, a_{n_1+n_2+1} \cdots a_{n_1+n_2+n_3}\, a_{n_1+n_2+n_3+1} \cdots \\
& \cdots a_{n_1+n_2+\cdots+n_{r-1}}\, a_{n_1+n_2+\cdots+n_{r-1}+1} \cdots a_{n_1+n_2+\cdots+n_{r-1}+n_r})\text{*)}.
\end{aligned}
$$

Rückwärts gelesen (indem man beide Seiten jeder Formel gegen einander vertauscht) enthalten diese Formeln eine Darstellung einer cyklischen Substitution als einfach zusammenhängendes Product cyklischer Substitutionen.

Zusatz: In diesen Formeln ist ferner der Satz enthalten:

Fügt man einem Product nicht zusammenhängender (§ 1) cyklischer Substitutionen zur Rechten oder Linken eine cyklische Substitution als Factor hinzu, die mit jeder der Substitutionen des Products einen und nur einen Buchstaben gemeinsam hat, so ist das ganze Product einer einzigen cyklischen Substitution mit allen verschiedenen Buchstaben gleichwerthig, welche die Buchstaben einer jeden der Substitutionen in derselben cyklischen Aufeinanderfolge enthält, in der sie in der Substitution vorkommen.

---

*) Sind mehrere der Buchstaben a_{n_1}, $a_{n_1+n_2}$, ... in der cyklischen Substitution zur Rechten auf einander folgend, so enthalten die Producte zur Linken identische cyklische Factoren, die man je nach Bedürfniss fortlassen kann.

(β) Jede der transitiven Gruppen eines Productes cyklischer Substitutionen (§ 1) wird — als Product aller in ihr enthaltenen Factoren gedacht — sich im allgemeinen als Product mehrerer nicht zusammenhängender cyklischer Factoren darstellen lassen. Lässt sich daher das ganze Product als Product von ϱ nicht zusammenhängender cyklischen Factoren (die identischen mitgerechnet) und als Product von r transitiven Gruppen darstellen, so muss $\varrho \geqq r$ sein. Ist das Product einfach zusammenhängend, so ist stets $\varrho = r$. Gesetzt nämlich, dieses gelte für das Product $(A_1)(A_2)\cdots(A_{n-1})$, so folgt es auch für das Product $(A_1)(A_2)\cdots(A_{n-1})(A_n)$. Denn die Substitution (A_n) hat, da das Product einfach zusammenhängend sein soll, mit jeder der transitiven Gruppen von $(A_1)(A_2)\cdots(A_{n-1})$, mit der sie Buchstaben gemeinsam hat, einen und nur einen Buchstaben gemeinsam $\big($A § 3 (γ)$\big)$. Wird daher (A_n) mit den cyklischen Substitutionen, welche diesen transitiven Gruppen gleichwerthig sind, multiplicirt, so ist zufolge (α) Zusatz dieses Product einer einzigen cyklischen Substitution gleichwerthig, und mithin ist auch jede der transitiven Gruppen von $(A_1)(A_2)\cdots(A_{n-1})(A_n)$ gleich einer einzigen cyklischen Substitution. Da nun für den Fall $n = 1$ auch $\varrho = r = 1$ ist, so folgt, dass allgemein für das einfach zusammenhängende Product $\varrho = r$ sein muss. Bezeichnet nun weiter E den Excess des Products, N die Anzahl aller in ihm enthaltenen verschiedenen Buchstaben, so hat man, da die Differenz $E-(N-r)$ den Grad des Zusammenhanges angiebt (§ 1), für das mehrfach zusammenhängende Product $E > N - r$ folglich auch $E > N - \varrho$, für das einfach zusammenhängende Product $E = n - r = N - \varrho$. Daraus ergeben sich die Sätze:

1) *Jede der transitiven Gruppen eines einfach zusammenhängenden Products cyklischer Substitutionen ist einer einzigen cyklischen Substitution gleichwerthig, die alle verschiedenen in der Gruppe vorkommenden Buchstaben enthält.*

2) *Lässt sich ein auf N verschiedene Buchstaben bezügliches Product cyklischer Substitutionen als Product von ϱ nicht zusammenhängenden cyklischen Factoren darstellen, so ist das Product einfach, oder mehrfach zusammenhängend, je nachdem sein Excess $E = N - \varrho$, oder $> N - \varrho$ ist.*

Zusatz: Aus dem ersten dieser beiden Sätze wird man endlich leicht noch den Satz folgern:

Hängen zwei Buchstaben in einem einfach zusammenhängenden Product zusammen, so hängen sie auch in jedem gleichwerthigen Product zusammen.

(γ) Enthält ein einfach zusammenhängendes Product cyklischer Substitutionen eine einzige transitive Gruppe, ist es also selbst transitiv, so ist es zuf. (β) 1 einer einzigen cyklischen Substitution mit allen

verschiedenen Buchstaben gleichwerthig. Jedes Ersetzen einer cyklischen Substitution durch ein gleichwerthiges, einfach zusammenhängendes und transitives Product cyklischer Substitutionen soll nun ein *„Zerlegen“* der cyklischen Substitutionen in cyklische Factoren heissen, und umgekehrt soll jedes Ersetzen eines transitiven, einfach zusammenhängenden Products cyklischer Substitutionen durch die gleichwerthige cyklische Substitution ein *„Vereinigen“* der cyklischen Factoren des Products zu einer cyklischen Substitution heissen.

Zusatz: Aus dem Beweise in (β) ergiebt sich, dass man jedes Vereinigen cyklischer Factoren auf ein wiederholtes Vereinigen cyklischer Factoren mittelst der Formeln in (α) zurückführen kann. Ebenso lässt sich auch jedes Zerlegen einer cyklischen Substitution auf ein wiederholtes Zerlegen mittelst der Formeln (α) (rückwärts gelesen) zurückführen, m. a. W.: ist die cyklische Substitution (A) dem einfach zusammenhängenden Producte $(A_1)(A_2)\cdots(A_m)$ gleichwerthig, so kann man die Factoren dieses dadurch erhalten, dass man (A) mittelst einer der Formeln (α) zerlegt, einen der erhaltenen Factoren wieder zerlegt u. s. f. Zunächst nämlich enthält (A) die Buchstaben von (A_m) in derselben cyklischen Aufeinanderfolge (α Zusatz), wie (A_m), denn (A) ergiebt sich durch Multiplication von (A_m) mit den gleichwerthigen cyklischen Substitutionen der transitiven Gruppen von $(A_1)(A_2)\cdots(A_{m-1})$, mit deren jeder es *einen* Buchstaben gemeinsam hat. Dann aber kann man (A) mittelst der Formel α 1 so zerlegen, dass der erste Factor zur Rechten gleich (A_m) ist. Erhält man hierdurch $(A)=(\mathfrak{A}_1)(\mathfrak{A}_2)\ldots$ $\ldots(\mathfrak{A}_r)(A_m)$, so kann man $(A_1)(A_2)\ldots(A_{m-1})=(\mathfrak{A}_1)(\mathfrak{A}_2)\ldots(\mathfrak{A}_r)$ als eine Darstellung von $(A_1)(A_2)\cdots(A_{m-1})$ als Product nicht zusammenhängender Factoren ansehen, und jede der transitiven Gruppen von $(A_1)(A_2)\cdots(A_{m-1})$ ist daher einem der Factoren $(\mathfrak{A}_1), (\mathfrak{A}_2)\cdots(\mathfrak{A}_r)$ gleichwerthig. Ist nun diejenige unter den transitiven Gruppen von $(A_1)(A_2)\cdots(A_{m-1})$, die (A_{m-1}) enthält, mit $(\mathfrak{A}_\alpha)$ gleichwerthig, so folgt wiederum, dass man (A_{m-1}) durch Zerlegen von $(\mathfrak{A}_\alpha)$ mittelst der Formel α 1 erhalten kann, u. s. f.

(δ) Wird in einem Product cyklischer Substitutionen eine der Substitutionen in cyklische Factoren zerlegt, oder werden mehrere auf einander folgende cyklische Factoren — sofern sie ein transitives einfach zusammenhängendes Product bilden — zu einer cyklischen Substitution vereinigt, so erhält man ein neues, dem gegebenen gleichwerthiges Product cyklischer Substitutionen. Aus diesem kann man ebenso ein drittes, aus diesem ein viertes herleiten u. s. f. Dieses Bilden neuer, dem gegebenen gleichwerthiger Producte nennen wir nun ein Umwandeln des gegebenen Products durch Vereinigen, bez. Zerlegen von Factoren. Nimmt man zu dieser Operation noch die des Versetzens von Factoren hinzu, indem man sich also das gegebene

Product durch eine dieser beiden Operationen in ein zweites, dieses wiederum durch eine dieser beiden Operationen in ein drittes u. s. f. umgewandelt denkt, so soll dieses Bilden neuer, dem gegebenen gleichwerthiger Producte allgemein als „*Umwandeln*" des gegebenen Products bezeichnet werden. — Es ist klar, dass, wenn von zwei Producten cyklischer Substitutionen Π_1 und Π_2 sich das eine, Π_1 in Π_2 umwandeln lässt, sich alsdann auch Π_2 in Π_1 umwandeln lassen muss.

Wird in dem Producte cyklischer Substitutionen $(A_1)(A_2)\cdots(A_k)\cdots\cdots(A_n)$ die Substitution (A_k) zerlegt, indem man $(A_k) = (A_{k1})(A_{k2})\cdots\cdots(A_{km})$ setzt, sodass also $(A_{k1})\cdots(A_{km})$ einfach zusammenhängend und transitiv ist, so hat man im Sinne von A § 2 (α):

$$A_k \equiv A_{k1}\,A_{k2}\cdots A_{km},$$

folglich auch:

$$A_1\,A_2\cdots A_{k-1}\,A_k\,A_{k+1}\cdots A_n$$
$$\equiv A_1\,A_2\cdots A_{k-1}\,A_{k1}\,A_{k2}\cdots A_{km}\,A_{k+1}\cdots A_n.$$

Ausserdem müssen die in den Buchstaben übereinstimmenden transitiven Gruppen auch gleichen Excess haben, da der Excess einer cyklischen Substitution gleich dem jedes gleichwerthigen einfach zusammenhängenden Products ist $(\beta, 2)$. Gleiches gilt für das Vereinigen mehrerer auf einander folgender Factoren und folglich auch für jede durch wiederholtes Zerlegen resp. Vereinigen bewirkte Umwandlung überhaupt. Hieraus ergiebt sich in Verbindung mit dem Satz in § 2 α:

Lassen sich zwei Producte cyklischer Substitutionen in einander umwandeln, so stimmen die transitiven Gruppen des einen mit denen des andern in den Buchstaben und im Excess überein.

(ε) Bevor wir zum nächsten Paragraphen übergehen, soll noch eines besonderen Falles der Umwandlung Erwähnung gethan werden, desjenigen nämlich, dass die in einander umzuwandelnden Producte Producte von Transpositionen sind. Es lässt sich zeigen, dass die Umwandlung zweier Producte von Transpositionen in einander (wenn sie überhaupt möglich ist) sich stets durch Versetzen von Transpositionen allein bewirken lässt. Da nämlich jede durch Vereinigen von Transpositionen bei der Umwandlung etwa auftretende cyklische Substitution $(abc\ldots klm)$ sich in Transpositionen zerlegen lässt, indem man etwa $(abc\ldots klm) = (ab)\,(bc)\ldots(kl)\,(lm)$ setzt, und alsdann jedes Versetzen von Factoren offenbar auf ein Versetzen von Transpositionen zurückführt, so wird zum Beweise unserer Behauptung nur der Satz erforderlich sein:

Zwei gleichwerthige und einfach zusammenhängende Producte von Transpositionen kann man stets durch Versetzen von Transpositionen in einander umwandeln.

Zum Beweise dieses Satzes nehmen wir an, es seien $\Pi_1 = \Pi_2$ zwei gleichwerthige Producte von Transpositionen, von denen wir

zunächst nur Π_2 als einfach zusammenhängend voraussetzen wollen. Es sei ferner (am) die erste Transposition zur Rechten in Π_2 und Π_2' das Product der übrigen Transpositionen, sodass $\Pi_2 = \Pi_2'(am)$ ist. Alsdann hängen zuf. β Zus. a und m in Π_1 zusammen, und Π_1 enthält daher, wenn nicht die Transposition (am) selbst, so doch eine Kette von Transpositionen (ab), (bc), (cd), ... (kl), (lm), deren Glieder irgendwie in Π_1 vertheilt sind. Wird nun (ab) wiederholt um eine Stelle nach rechts oder links versetzt, so werden hierdurch die Transpositionen (cd), ... (kl), (lm) nicht verändert, da sie keinen Buchstaben mit (ab) gemeinsam haben. Dagegen wird man immer bewirken können, dass (bc) in (ac) übergeht, indem man (ab) so oft um eine Stelle versetzt, bis sie denjenigen Platz einnimmt, den (bc) in dem gegebenen Product Π_1 einnahm. Alsdann ist Π_1 in ein Product umgewandelt, das die Kette (ac), (cd), ..., (kl), (lm) enthält. Ebenso wird man dieses Product in ein solches mit der Kette (ad), ..., (kl), (lm) umwandeln können, und so fortfahrend, schliesslich Π_1 in ein Product mit der Transposition (am) umgewandelt erhalten, die man endlich durch wiederholtes Versetzen um eine Stelle nach rechts an die erste Stelle zur Rechten bringen kann. Bezeichnet nun Π_1' das Product der übrigen Factoren in dem hierdurch erhaltenen Product, so hat man $\Pi_1 = \Pi_1'(am)$, mithin $\Pi_1' = \Pi_2'$. Nun ist aber $\big($A, § 3, $(\beta)\big)$ Π_2' wieder einfach zusammenhängend, und man kann daher für die Producte Π_1', Π_2' mit Beziehung auf die erste Transposition zur Rechten in Π_2' dasselbe Verfahren wiederholen. Fährt man hiermit fort, so wird man einmal Π_1 in ein Product umgewandelt erhalten, das von rechts nach links die sämmtlichen Transpositionen von Π_2, in derselben Reihenfolge mit Π_2 enthält. Ist auch Π_1 einfach zusammenhängend, so ist damit Π_1 in Π_2 umgewandelt, denn alsdann ist zufolge (β) 2 der Excess von Π_1 dem von Π_2 gleich, nämlich gleich $N - \varrho$; der Excess ist aber bei einem Product von Transpositionen der Anzahl der letzteren gleich.

Zusatz. Es folgt hieraus, dass man die Umwandlung zweier Producte von cyklischen Substitutionen in einander, wenn dieselben keine identischen cyklischen Factoren enthalten, auch dadurch bewirken kann, dass man die Substitutionen der einen in Transpositionen zerlegt, das erhaltene Product durch Versetzen von Transpositionen in ein anderes umwandelt und schliesslich die Transpositionen wieder zu cyklischen Substitutionen vereinigt.

§ 4.

Nachdem in den beiden vorigen Paragraphen der Begriff des Umwandelns von Producten cyklischer Substitution in einander erörtert worden ist, sollen jetzt die Bedingungen für die Möglichkeit einer

Umwandlung zweier Producte in einander ermittelt werden, was (§ 1) gleichbedeutend mit den Bedingungen dafür ist, dass die Producte derselben Classe angehören. Zunächst müssen zwei Producte, wenn eine Umwandlung derselben in einander möglich sein soll, gleichwerthig sein, sodann müssen sie der in dem Satz § 3 (δ) ausgesprochenen Bedingung genügen. Umgekehrt sind aber auch, wie jetzt nachgewiesen werden soll, diese Bedingungen für die Möglichkeit der Umwandlung hinreichend. Wir werden uns bei diesem Nachweis auf die Betrachtung transitiver Producte beschränken können. Denn stimmen die transitiven Gruppen eines von zwei gleichwerthigen Producten mit denen des andern in den Buchstaben überein, so müssen offenbar auch die in den Buchstaben übereinstimmenden transitiven Gruppen gleichwerthig sein, und aus der Möglichkeit der Umwandlung dieser in einander folgt ohne Weiteres die Möglichkeit der Umwandlung der Producte in einander.

Um eine kurze Ausdrucksweise zu ermöglichen, soll in der Folge unter einem „*Absondern*“ einer oder mehrerer cyklischen Substitutionen aus einem gegebenen Producte ein Umwandeln dieses Products in ein anderes verstanden werden, das die betreffenden Substitutionen als Factoren am Anfange oder Ende enthält.*) Das Product der übrigen Factoren in dem neuen (durch die Umwandlung erhaltenen) Product soll alsdann der (bei dem Absondern verbleibende) „*Rest*“ heissen. Da ferner der Begriff des Zerlegens einer cyklischen Substitution es gestattet, die Substitution $(abc\ldots klm)$ durch das Product $(a\,b\,c\ldots klm)$ $(a)\,(b)\,(c)\ldots(k)\,(l)\,(m)$ oder $(a)\,(b)\,(c)\ldots(k)\,(l)\,(m)\,(abc\ldots klm)$ zu ersetzen, so wird man das Absondern immer so einrichten können, dass der Rest wieder alle verschiedenen Buchstaben des gegebenen Products enthält. In dieser Form wollen wir bei den folgenden Sätzen, um die Allgemeinheit der Darstellung nicht zu beeinträchtigen, den Rest uns dargestellt denken.

(α) *Wählt man unter den Buchstaben eines transitiven Products cyklischer Substitutionen beliebige aus, so kann man stets eine cyklische Substitution dieser Buchstaben angeben, die sich aus dem gegebenen Product absondern lässt.*

Zum Beweise dieses Satzes bezeichne $(A_1)\,(A_2)\ldots(A_n)$ das gegebene Product. Man denke sich die Reihe $A_1\,A_2\ldots A_n$ so geordnet, dass jedes Glied mit der Reihe aller vorangehenden wenigstens einen Buchstaben gemeinsam hat. $A_{\alpha_1}A_{\alpha_2}\ldots A_{\alpha_n}$ sei die hierdurch sich ergebende Reihe. In jedem Gliede A_{α_β} dieser Reihe denke man sich von denjenigen Buchstaben, die es mit der Reihe aller vorangehenden

*) Die abgesonderten Substitutionen brauchen in dem gegebenen Product selbst nicht enthalten zu sein.

gemeinsam hat, alle bis auf einen fortgelassen, ohne die Aufeinanderfolge der Buchstaben in $A_{\alpha\beta}$ zu ändern, und bezeichne mit $A'_{\alpha\beta}$ die übrigbleibende Buchstabenreihe. Alsdann ist die Reihe $A'_{\alpha_1} A'_{\alpha_2} \ldots A'_{\alpha_n}$, mithin auch $A_1' A_2' \ldots A_n'$ einfach zusammenhängend und transitiv. Denkt man sich nun jeden Factor (A_k) mittelst einer der Formeln in § 3 (α) rückwärts gelesen, etwa der ersten, so in Factoren zerlegt, dass der erste Factor zur Rechten gleich (A_k') wird, und erhält man hierdurch

$$(A_k) = (A_{k1})(A_{k2}) \ldots (A_{k m_k})(A_k'),$$

so wird jetzt

$$(A_1)(A_2)\ldots(A_n) = (A_{11})(A_{12})\ldots(A_{1 m_1})(A_1')(A_{21})(A_{22})\ldots(A_{2 m_2})(A_2')\ldots$$
$$\ldots(A_{n1})(A_{n2})\ldots(A_{n m_n})(A_n').$$

Die Factoren $(A_1'), (A_2'), \ldots, (A_n')$ dieses Products versetze man so, dass sie in dem neuen Product am Anfang oder Ende unmittelbar auf einander folgen $\big($§ 2 $(\beta)\big)$ und vereinige sie darauf zu einer einzigen cyklischen Substitution (A'). $\big($§ 3 $(\gamma)\big)$. Alsdann enthält (A') alle verschiedenen Buchstaben des gegebenen Products und kann wieder mittelst einer der Formeln in § 3 (α) so zerlegt werden, dass der erste Factor zur Linken oder Rechten eine cyklische Substitution mit den ausgewählten Buchstaben wird.

Zusatz: Das ganze durch das Absondern einer cyklischen Substitution aus einem transitiven Product sich ergebende Product muss zufolge § 3 (δ) wieder ein transitives Product mit allen verschiedenen Buchstaben des gegebenen Products sein. Der Rest indessen kann intransitiv sein, d. h. aus mehreren transitiven Gruppen zusammengesetzt sein. Immer aber muss jede der transitiven Gruppen des Restes wenigstens einen Buchstaben der abgesonderten Substitution enthalten, da sonst das ganze, durch die Absonderung erhaltene Product intransitiv wäre. *Wenn daher sämmtliche Buchstaben der abgesonderten Substitution einer der transitiven Gruppen des Restes angehören, so muss dieses die einzige sein, die der Rest enthält, oder der Rest bildet ein transitives Product (mit allen verschiedenen Buchstaben des gegebenen Products); entgegengesetzten Falles ist der Rest intransitiv.*

(β) *Stellt man ein transitives Product cyklischer Substitutionen als Product nicht zusammenhängender cyklischer Factoren dar, und wählt aus mehreren dieser Factoren je einen Buchstaben nach Belieben aus, so kann man jede cyklische Substitution der ausgewählten Buchstaben aus dem gegebenen Product absondern, und der Rest bildet wieder ein transitives Product; enthält die abgesonderte Substitution von jedem der nicht zusammenhängenden cyklischen Factoren einen Buchstaben, so ist der Rest ausserdem einer einzigen cyklischen Substitution mit allen verschiedenen Buchstaben gleichwerthig.*

Ist nämlich $\Pi = (\mathfrak{A}_1)(\mathfrak{A}_2)\ldots(\mathfrak{A}_\varrho)$ die Darstellung des gegebenen Products Π als Product nicht zusammenhängender cyklischer Substitution, so kann man, wenn a_1 ein beliebiger Buchstabe von $(\mathfrak{A}_1)$, a_2 ein beliebiger Buchstabe von $(\mathfrak{A}_2)$ ist, zufolge (α) jedenfalls $(a_1 a_2)$, etwa zur Linken absondern. Bezeichnet dann Π_1 den Rest, so hat man $\Pi = (a_1 a_2)\Pi_1$, $\Pi_1 = (a_2 a_1)(\mathfrak{A}_1)(\mathfrak{A}_2)\ldots(\mathfrak{A}_\varrho)$. Hier ist $(a_1 a_2)(\mathfrak{A}_1)(\mathfrak{A}_2)$ einer einzigen cyklischen Substitution $(\mathfrak{A}_{12})$ mit allen verschiedenen Buchstaben von $(\mathfrak{A}_1)$ und $(\mathfrak{A}_2)$ gleichwerthig (§ 3 α), es sind daher a_1 und a_2 in einer der transitiven Gruppen von Π_1 enthalten (§ 3, β, Zus.) und Π_1 ist folglich ein transitives Product mit allen verschiedenen Buchstaben von Π (α, Zus.). Daher kann man aus Π_1 die Transposition $(a_2 a_3)$ wieder zur Linken absondern, wenn a_3 ein beliebiger Buchstabe von $(\mathfrak{A}_3)$ ist, alsdann $(a_1 a_2)(a_2 a_3)$ zu $(a_1 a_2 a_3)$ vereinigen, und erhält, wenn Π_2 den alsdann verbleibenden Rest bezeichnet, $\Pi = (a_1 a_2 a_3)\Pi_2$, $\Pi_2 = (\mathfrak{A}_{123})(\mathfrak{A}_4)\ldots(\mathfrak{A}_\varrho)$, wo wieder $(\mathfrak{A}_{123})$ eine cyklische Substitution mit allen verschiedenen Buchstaben von $(\mathfrak{A}_1)$, $(\mathfrak{A}_2)$, $(\mathfrak{A}_3)$ bedeutet. Daraus folgt wieder, dass a_1, a_2, a_3 einer der transitiven Gruppen von Π_2 angehören müssen, dass folglich Π_2 transitiv ist u. s. f. Dabei kann die Reihenfolge der Factoren $(\mathfrak{A}_1)(\mathfrak{A}_2)\ldots(\mathfrak{A}_\varrho)$, mithin auch die der Buchstaben $a_1, a_2, \ldots$ nach Belieben gewählt werden. Wird aus jedem dieser Factoren ein Buchstabe ausgewählt, so ergiebt sich für den Rest $\Pi_{\varrho-1} = (\mathfrak{A}_{1,2\ldots\varrho})$, wo $(\mathfrak{A}_{1,2\ldots\varrho})$ eine cyklische Substitution mit allen verschiedenen in $(\mathfrak{A}_1)$, $(\mathfrak{A}_2)\ldots(\mathfrak{A}_\varrho)$ enthaltenen Buchstaben, somit mit allen verschiedenen Buchstaben des gegebenen Products ist.

Zusatz: Aus einem identischen, transitiven Product kann man jede beliebige cyklische Substitution von Buchstaben des Products absondern und der Rest ist stets wieder transitiv.

Zusatz 2: Enthält die abgesonderte Substitution von jedem der ϱ nicht zusammenhängenden cyklischen Factoren einen Buchstaben, so ist ihr Excess gleich $\varrho - 1$, der des Restes grösser oder gleich $N - 1$, wenn die N die Anzahl aller verschiedenen Buchstaben ist $\big($§ 3, (β) 2$\big)$, mithin der Excess des ganzen durch das Absondern erhaltenen Products und folglich auch der Excess des gegebenen transitiven Products $E \geq N - 1 + (\varrho - 1)$. Der kleinste Werth, den der Excess eines auf N verschiedene Buchstaben bezüglichen, transitiven Products haben kann, das einem Product von ϱ nicht zusammenhängenden Factoren gleich ist, ist somit $N + \varrho - 2$.

(γ) *Ist ein auf N verschiedene Buchstaben bezügliches Product cyklischer Substitutionen einem Producte von ϱ nicht zusammenhängenden cyklischen Factoren gleichwerthig, so kann man aus demselben $\frac{1}{2}\big(E-(N-\varrho)\big)$ Paare gleicher Transpositionen, und nicht mehr absondern, wenn E den Excess des Products bezeichnet; für $\varrho = 1$ können*

dabei die Buchstaben der Paare nach Belieben aus den Buchstaben des gegebenen Products ausgewählt werden.

Ist nämlich $E > N - \varrho$ so ist $\left(\S\, 3, (\beta)\, 2\right)$ das Product mehrfach zusammenhängend und enthält daher mehrere Substitutionen (A_{α_1}), $(A_{\alpha_2}), \ldots, (A_{\alpha_m})$, für welche die Reihe $A_{\alpha_1} A_{\alpha_2} \ldots A_{\alpha_m}$ eine Reihenkette von der in A § 3, (δ) angegebenen Beschaffenheit bildet. Ist nun (A_{α_k}) diejenige unter diesen Substitutionen, die in dem gegebenen Product am weitesten nach rechts steht, und sind $a_{\alpha_{k-1}}$, a_{α_k} diejenigen beiden Buchstaben derselben, welche auch durch die Kette $A_{\alpha_1} A_{\alpha_2} \ldots$ $\ldots A_{\alpha_{k-1}} A_{\alpha_{k+1}} \ldots A_{\alpha_m}$ zusammenhängen, so gehören $a_{\alpha_{k-1}}$, a_{α_k} einer der transitiven Gruppen an, aus denen das Product der Factoren zur Linken von' (A_{α_k}) in dem gegebenen Product zusammengesetzt ist. Somit kann man aus dem Product dieser Factoren zufolge (α) die Transposition $(a_{\alpha_{k-1}} a_{\alpha_k})$ absondern, ausserdem aber kann man diese Transposition auch aus (A_{α_k}) absondern, und kann also das gegebene Product in ein anderes umwandeln, das die beiden Transpositionen $(a_{\alpha_{k-1}} a_{\alpha_k})$, $(a_{\alpha_{k-1}} a_{\alpha_k})$ enthält, die man endlich durch wiederholtes Versetzen um eine Stelle nach links oder rechts an den Anfang oder Ende des neuen Products bringen kann. Wenn also $E > N - \varrho$, so kann man jedenfalls stets ein Paar gleicher Transpositionen absondern. Dann ist aber der Rest wieder demselben Product nicht zusammenhängender Factoren gleichwerthig, somit wiederum sein Excess $\geqq N - \varrho$. Ist der Excess des Restes $> N - \varrho$, so kann man aus dem Reste wieder ein Paar gleicher Transpositionen absondern u. s. f. Da ausserdem der Excess des beim Absondern eines Paares aus einem Product verbleibenden Restes um 2 Einheiten kleiner als der Excess des Products ist (weil der Excess des ganzen Products unverändert bleibt), so kann man erstens auch nur, wenn $E > N - \varrho$ ist, aus dem gegebenen Product ein Paar gleicher Transpositionen absondern, und ausserdem aus den Resten genau so oft mal, als für diese der Excess $> N - \varrho$ bleibt, also, da nach dem Absondern des letzten Paares der Excess des Restes gleich $N - \varrho$ sein muss, im ganzen $\frac{1}{2}\left(E - (N - \varrho)\right)$-mal.*) — Ist $\varrho = 1$, so ist der nach dem Absondern irgend eines Paares $(ab)(ab)$ verbleibende Rest wieder einer einzigen cyklischen Substitution gleichwerthig, mithin $\left(\S\, 3, (\beta) \text{ Zus.}\right)$ transitiv, und man kann folglich zufolge (α) aus ihm die Transposition (ac) absondern, wo c ein beliebiger

*) Hierin liegt zugleich ein neuer Beweis des bekannten Satzes, dass E um eine gerade Anzahl grösser als $N - \varrho$ sein muss. Als Ergänzung dieses Satzes ergiebt sich hieraus in Verbindung mit (β) Zus. 2, dass $E = N + \varrho - 2r + 2k$, $k \geqq 0$, sein muss, wenn das Product r transitive Gruppen enthält.

(von a und b verschiedener) Buchstabe des gegebenen Products ist. Erhält man nun hierdurch für dieses $\Pi = (ab)(ab)(ac)\Pi'$, sodass Π' den Rest bezeichnet, so kann man das so erhaltene Product weiter dadurch umwandeln, dass man (ac) zweimal um eine Stelle nach links versetzt, und das hierdurch erhaltene Product $(ac)(cb)(cb)\Pi'$ endlich dadurch, dass man die beiden Transpositionen (cb) nach einander um je eine Stelle nach links versetzt. Dadurch ergiebt sich nun $\Pi = (cb)(cb)(ac)\Pi'$, und es ist somit an Stelle des Paares $(ab)(ab)$ jetzt das Paar $(cb)(cb)$ aus Π abgesondert. Ebenso zeigt man, dass man an Stelle des Paares $(cb)(cb)$ ein Paar $(cd)(cd)$, also überhaupt ein Paar mit zwei beliebigen in Π enthaltenen Buchstaben absondern kann. Dasselbe gilt aber auch von jedem der nach dem Absondern eines oder mehrerer Paare erhaltenen Reste.

(δ) Es sei nun Π irgend ein transitives Product cyklischer Substitution mit N verschiedenen Buchstaben und E der Excess desselben.

Ferner sei

$$\Pi = (\mathfrak{A}_1)(\mathfrak{A}_2)\ldots(\mathfrak{A}_\varrho)$$

die Darstellung von Π als Product nicht zusammenhängender cyklischer Factoren. Wir wählen aus $(\mathfrak{A}_1)$ einen beliebigen Buchstaben a_1, aus $(\mathfrak{A}_2)$ einen beliebigen Buchstaben a_2 u. s. f. aus $(\mathfrak{A}_\varrho)$ einen beliebigen Buchstaben a_ϱ aus und sondern die cyklische Substitution $(a_1 a_2 \ldots a_\varrho)$ aus Π ab. Erhält man hierdurch $\Pi = (a_1 a_2 \ldots a_\varrho)\Pi'$, sodass Π' der Rest ist, so ist zufolge (β) Π' einer einzigen cyklischen Substitution mit allen N Buchstaben gleichwerthig, und man kann zufolge (γ) aus Π' $\frac{1}{2}\big(E' - (N-1)\big)$ Paare gleicher Transpositionen absondern, deren Buchstaben nach Belieben unter den N Buchstaben ausgewählt werden können, wenn man unter E' den Excess von Π' versteht. Wir wählen der Einfachheit halber die Buchstaben sämmtlicher Paare gleich denselben Buchstaben a, b. Nach Absondern aller $\frac{1}{2}\big(E' - (N-1)\big)$ Paare ist der Rest ein einfach zusammenhängendes und transitives (weil einer einzigen cyklischen Substitution gleichwerthiges) Product, dessen Factoren daher zu der gleichwerthigen cyklischen Substitution, sie heisse (A), vereinigt werden können. Dadurch ist nun Π in ein Product der folgenden Gestalt:

$$(a_1 a_2 \ldots a_\varrho)(ab)^{E' - (N-1)}(A)$$

umgewandelt, wobei $E' + \varrho - 1 = E$, $E' = E - (\varrho - 1)$ sein muss, weil E' der Excess von Π' ist und der Excess von Π demjenigen von $(a_1 a_2 \ldots a_\varrho)\Pi'$ gleich sein muss. Ist nun Π_1 ein zweites, Π gleichwerthiges und transitives Product mit denselben N verschiedenen Buchstaben und demselben Excess, so folgt ebenso, dass sich dieses in ein Product von der Form

$$(a_1 a_2 \ldots a_\varrho)\,(ab)^{E'-(N-1)}(A')$$

umwandeln lassen muss, wo aber offenbar auch $(A') = (A)$ sein muss, weil $\Pi_1 = \Pi$ ist. Π und Π_1 lassen sich also in dasselbe dritte Product, folglich in einander umwandeln. Daraus folgt aber, wie zu Anfang dieses Paragraphen bemerkt wurde, auch die Möglichkeit der Umwandlung zweier gleichwerthigen Producte in einander, von denen die transitiven Gruppen des einen mit denen des andern in den Buchstaben und im Excess übereinstimmen. Wir fassen dieses Resultat mit dem Satz § 3, (δ) zu dem Schlusssatz zusammen:

Damit zwei Producte cyklischer Substitutionen sich (*im Sinne von* § 3, (δ)) *in einander umwandeln lassen, ist nothwendig und hinreichend, dass die Producte gleichen Werth haben, und dass die transitiven Gruppen des einen mit denen des andern in den Buchstaben und im Excess übereinstimmen.*

Zusatz: Stellt man ein beliebiges Product cyklischer Substitutionen als Product nicht zusammenhängender cyklischer Factoren dar, so kann man zu letzterem Paare gleicher Transpositionen in solcher Weise hinzufügen, dass die transitiven Gruppen des hierdurch entstandenen Products mit denen des gegebenen Products in den Buchstaben und im Excess übereinstimmen. Dann aber lässt sich das gegebene Product in dieses Product umwandeln. Daraus geht hervor, dass man zwei beliebige gleichwerthige Producte cyklischer Substitutionen, die sich nicht mittelst der beiden Operationen des Versetzens und Zerlegens resp. Vereinigens von Factoren in einander umwandeln lassen, dadurch in einander überführen kann, dass man als dritte Operation das Hinzufügen bez. Fortlassen von Paaren gleicher Transpositionen und identischen cyklischen Factoren hinzunimmt (vergl. § 1).

Beispiel.

Als Beispiel für die Anwendung der hier entwickelten Theorie auf die Theorie der Riemann'schen Fläche möge der von Clebsch und Gordan entdeckte, in ihrem Buche über Abel'sche Functionen mitgetheilte und dort als merkwürdig bezeichnete Satz von der gesonderten Existenz der beiden Reihen von Fundamentalpunkten auf der Riemann'schen Fläche dienen. Man wird finden, dass dieser Satz, wenn man von der Anschauung der Riemann'schen Fläche abstrahirt, sich im Wesentlichen auf folgende Form bringen lässt:

Wählt man in einem identischen, transitiven Producte von Transposition mit N verschiedenen Buchstaben $N-1$ Transpositionen aus, deren Buchstabenpaare eine transitive, einfach zusammenhängende Reihe bilden, so bilden die Buchstabenpaare derjenigen Transpositionen,

welche den übrigen Transpositionen in dem gegebenen Product adjungirt sind,*) wieder eine transitive Reihe mit allen verschiedenen Buchstaben.**)

Zum Beweise dieses Satzes mittelst der obigen Theorie braucht man sich nur die ausgewählten Transpositionen abgesondert zu denken. Dies kann durch Versetzung derselben zufolge § 2 (β) so geschehen, dass der Rest von den, den übrigen Transpositionen in dem gegebenen Product adjungirten Transpositionen gebildet wird. Werden nun die abgesonderten Transpositionen zu einer cyklischen Substitution vereinigt, so gehören je zwei Buchstaben dieser verschiedenen der nicht zusammenhängenden (in diesem Falle identischen) cyklischen Factoren an, mit deren Product das gegebene gleichwerthig ist. Daher ist zufolge § 4 (β) der Rest ein transitives Product (mit allen verschiedenen Buchstaben).

Schnepfenthal, September 1892.

*) Ob rechts oder links adjungirt, ist beim identischen Product gleichgiltig.

**) Man kann daher aus diesen wieder $N-1$ eine einfach zusammenhängende Reihe bildende auswählen, die alsdann den Fundamentalpunkten zweiter Art entsprechen, wenn die zuerst ausgewählten denen erster Art entsprechend gedacht werden.

Zur Theorie der Maxima und Minima einer Function von zwei Veränderlichen.

Von

Victor v. Dantscher in Graz.

I.

Die Herren G. Peano*) und Ludwig Scheeffer**) haben darauf aufmerksam gemacht, dass die bis dahin übliche Darstellung der Theorie der Maxima und Minima einer Function von zwei oder mehreren Veränderlichen unzureichend ist. Scheeffer insbesondere hat in der genannten Abhandlung „diesen Gegenstand vollständig erledigt, soweit das durch Entwicklung der Function in eine Potenzreihe überhaupt möglich ist", wie sich Herr O. Stolz in dem Aufsatze: Maxima und Minima der Functionen von mehreren Veränderlichen, Sitz.-Ber. d. k. Akad. d. Wiss. in Wien, Juni 1890, ausdrückt, in welchem die Theorie von Scheeffer auf Functionen von mehr als zwei Veränderlichen ausgedehnt werden soll.

Wenn ich nun darangehe die Theorie der Maxima und Minima einer Function von zwei Veränderlichen noch einmal zu entwickeln, so geschieht dieses keineswegs aus dem Grunde, weil ich glaube, dass die vortreffliche Arbeit von Scheeffer irgend einer Ergänzung oder Verbesserung bedürfe, sondern lediglich in der Absicht zu zeigen, dass das von den Herren Peano und Scheeffer angeregte neue Problem seine Lösung auch auf einem Wege finden kann, der principiell von demjenigen verschieden ist, den Scheeffer eingeschlagen hat.

Der Grund, warum die ältere Theorie zu keinem befriedigenden Abschlusse gelangen konnte, findet Scheeffer darin, dass man bei der Zurückführung des Problems in das Gebiet der Functionen von *einer* Veränderlichen, die Flächenumgebung der zu untersuchenden Stelle P_0 durch die Gesammtheit der Geraden durch P_0 in der

*) A. Genocchi, Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale, pubblicato con aggiunte dal Giuseppe Peano, Torino 1884, N. 133—136, p. XXIX.

**) In der nachgelassenen Abhandlung: Theorie der Maxima und Minima einer Function von zwei Variabeln, Math. Ann. Bd. XXXV, p. 541—576.

Darstellungsebene ersetzte und sich damit begnügte zu untersuchen, ob die gegebene Function $f(x, y)$ auf jeder dieser Geraden im Punkte P_0 ein Maximum resp. Minimum habe — und gelangt zu der Ansicht, dass auf diesem Wege das Ziel überhaupt nicht zu erreichen sei.

Der erste Satz des § 3. der angeführten Abhandlung lautet nämlich:

„Nachdem wir erkannt haben, dass aus dem Stattfinden des Maximums, resp. Minimums einer Function $f(x, y)$ auf allen einzelnen durch den Nullpunkt zu legenden Geraden noch keine Schlüsse auf ein Maximum oder Minimum in der *Ebene* gezogen werden können, tritt die Frage nach erweiterten Kriterien für die Maxima und Minima der letzten Art auf.“

Ich glaube aber, dass ein so scharfsinniger Forscher wie Scheeffer diese seine Ansicht bald zu der Aussage modificirt hätte:

„Aus dem Stattfinden eines Maximums, resp. Minimums auf allen durch den Nullpunkt zu legenden Geraden kann „*nicht ohne Weiteres*“ auf ein Maximum resp. Minimum in der Ebene geschlossen werden“ wenn ihn nicht der Tod so vorzeitig seinem edlen Streben entrissen hätte.

Meines Erachtens liegt nämlich der Grund, warum die ältere Theorie zu keinem befriedigenden Abschlusse gelangen konnte, nicht darin, dass man bei der Zurückführung des Problems in das Gebiet der Functionen von einer Veränderlichen die Flächenumgebung der Stelle P_0 durch die Gesammtheit der Geraden durch P_0 in der Darstellungsebene ersetzt hat und sich begnügte zu untersuchen, ob auf jeder derselben $f(x_0, y_0)$ ein Maximum resp. Minimum sei, sondern darin, dass man dabei unterlassen hat *die Ausdehnung des Intervalles* zu berücksichtigen, in welchem auf jeder solchen Geraden, und zwar zu beiden Seiten von P_0, $f(x_0, y_0)$ grösser, resp. kleiner, als jeder Nachbarwerth ist.

Um dieses näher auszuführen denke ich mir die sämmtlichen Geraden (in der Ebene der rechtwinkligen Coordinaten x, y) durch den Punkt P_0 (mit den Coordinaten x_0, y_0) dargestellt durch die Formeln:

$$(1) \qquad x = x_0 + \lambda\varrho, \qquad y = y_0 + \mu\varrho,$$

in welchen λ und μ reelle Veränderliche bezeichnen, deren Quadratsumme gleich 1 ist, ϱ eine reelle Veränderliche bedeutet, welche sowohl positive als negative Werthe annehmen kann.

Jedem solchen Werthepaare λ, μ entspricht dann bekanntlich eine und nur eine Richtung $\mathfrak{R}_{\lambda,\mu}$ in der xy Ebene, für welche, wenn $\widehat{xy} = 90^0$ vorausgesetzt wird,

$$\cos \widehat{x\mathfrak{R}_{\lambda,\mu}} = \lambda, \quad \cos \widehat{y\mathfrak{R}_{\lambda,\mu}} = \sin \widehat{x\mathfrak{R}_{\lambda,\mu}} = \mu$$

ist. Die durch (1) dargestellte Gerade sei mit $\mathfrak{G}_{\lambda,\mu}$ bezeichnet; $\mathfrak{R}_{\lambda,\mu}$ sei ihre positive Richtung. Wenn nun $f(x_0, y_0)$ für jede solche Gerade ein Maximum resp. Minimum ist, so ist die Differenz

$$f(x_0+\lambda\varrho,\ y_0+\mu\varrho) - f(x_0, y_0) < 0 \text{ im Falle des Max.,}$$
$$> 0 \text{ im Falle des Min.}$$

für alle Werthe von ϱ eines gewissen Intervalles

$$-p_{\lambda,\mu} < \varrho < q_{\lambda,\mu},$$

welches sich zu *beiden Seiten* von P_0 ausdehnt, so dass also $p_{\lambda,\mu}$ und $q_{\lambda,\mu}$ positive von Null verschiedene Grössen sind (von welchen die kleinere mit $r_{\lambda,\mu}$ bezeichnet wird); für $\varrho = -p_{\lambda,\mu}$ und $\varrho = q_{\lambda,\mu}$ ist diese Differenz gleich Null.

Ich behaupte nun:

Wenn die untere Grenze r der positiven Veränderlichen $r_{\lambda,\mu}$ im Bereiche $\lambda^2+\mu^2=1$ von Null verschieden ist, so ist $f(x_0, y_0)$ auch für die Flächenumgebung der Stelle x_0, y_0 ein wahres Maximum, resp. Minimum; ist dagegen diese untere Grenze r gleich Null, so findet an der Stelle x_0, y_0 für die Function $f(x, y)$ weder ein Maximum noch ein Minimum statt.

Die Definition des Maximums resp. Minimums der Function $f(x, y)$ an der Stelle x_0, y_0 ist, wie bekannt, so zu stellen:

$f(x_0, y_0)$ ist ein Maximum, resp. Minimum, wenn sich positive Zahlen δ und ε so klein angeben lassen, dass für jedes (reelle) Werthepaar h, k des Bereiches $0 < h^2 < \delta^2$, $0 < k^2 < \varepsilon^2$ die Differenz

$$f(x_0+h,\ y_0+k) - f(x_0, y_0) < 0 \text{ ist (im Falle des Maximums),}$$
$$> 0 \text{ ist (im Falle des Minimums),}$$

oder (was im Wesentlichen dasselbe besagt):

wenn sich eine positive Zahl d so klein angeben lässt, dass diese Differenz für jedes (reelle) Werthepaar h, k des Bereiches $0 < h^2+k^2 < d^2$ das angegebene Verhalten zeigt.

Um die obige Behauptung zu begründen, sei Folgendes bemerkt.

Schlägt man, wenn $r > 0$ ist, mit dem Radius r den Kreis K aus dem Centrum P_0, so ist für jeden von P_0 verschiedenen Punkt P (mit den Coordinaten x, y) im Innern von K

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) < 0 \text{ (im Falle des Max. auf jeder Geraden } \mathfrak{G}_{\lambda,\mu}\text{),}$$
$$> 0 \text{ (,, ,, ,, Min. ,, ,, ,, ,,),}$$

weil dieses ja für alle Punkte des Durchmessers von K durch P der Voraussetzung zufolge stattfindet.

Also ist jede positive Zahl, welche nicht grösser ist als r, eine solche Zahl d, wie sie zum Stattfinden eines Maximums, resp. Minimums erforderlich ist.

Ist dagegen $r = 0$ und man schlägt mit einem beliebig klein anzunehmenden Radius $\mathfrak{r}$ den Kreis $\mathfrak{K}$ um P_0, so giebt es stets Gerade $\mathfrak{G}_{\lambda,\mu}$ durch P_0, für welche $r_{\lambda,\mu} < \mathfrak{r}$ ist; es existirt also keine solche Zahl d.

Dabei sind nur „eigentliche" Maxima resp. Minima — nach der Bezeichnung des Hrn. Stolz — berücksichtiget worden; will man den Begriff des Maximums, resp. Minimums etwas weiter fassen, so dass für die Differenz $f(x_0+h,\, y_0+k) - f(x_0 y_0)$ auch der Werth 0 noch zugelassen wird, so müssten die Grenzen $-p_{\lambda,\mu}$ und $q_{\lambda,\mu}$ dahin erklärt werden, dass

$$f(x_0+\lambda\varrho,\, y_0+\mu\varrho) - f(x_0,\, y_0) \begin{array}{l} \leqq 0 \text{ (im Falle des Max.),} \\ \geqq 0 \text{ (im Falle des Min.)} \end{array}$$

ist, solange $-p_{\lambda,\mu} < \varrho < q_{\lambda,\mu}$ ist, während für $\varrho = -p_{\lambda,\mu}$ und $\varrho = q_{\lambda,\mu}$ die vorstehende Differenz nicht nur verschwindet, sondern zugleich auch das Vorzeichen wechselt.

Die Entscheidung, ob für eine gegebene Function $f(x, y)$ an einer Stelle x_0, y_0, in deren Umgebung $f(x, y)$ nach ganzen positiven Potenzen von $x - x_0 = h$ und $y - y_0 = k$ entwickelt werden kann, und an welcher die ersten partiellen Ableitungen nach x und y beide verschwinden, ein Maximum, resp. Minimum stattfinde, ist somit auf die Untersuchung zurückgeführt, ob die Grösse r von Null verschieden ist oder nicht. Ist in der vorausgesetzten Entwickelung die n^{te} Dimension die erste, deren Glieder nicht sämmtlich verschwinden, so wird gesetzt:

$$(2) \qquad f(x_0+h,\, y_0+k) - f(x_0,\, y_0) = g(h, k) = (h, k)_n + (h, k)_{n+1} + \cdots \; (n \geqq 2),$$

wobei $(h, k)_n$ die Summe der Glieder n^{ter} Dimension in h und k bezeichnet u. s. w.

Führt man darin ein:

$$(3) \qquad h = \lambda\varrho, \quad k = \mu\varrho, \quad (\lambda^2 + \mu^2 = 1),$$

so ergiebt sich:

$$(4) \qquad g(h, k) = \varrho^n[(\lambda, \mu)_n + (\lambda, \mu)_{n+1}\varrho + \cdots] = \varrho^n \varphi(\varrho;\, \lambda, \mu).$$

Der Factor ϱ^n kann abgesondert werden, weil dem Werthe $\varrho = 0$ die Stelle $h = 0$, $k = 0$ selbst entspricht.

Die Grösse r ist demnach nichts Anderes als *die untere Grenze der absoluten Beträge der reellen Wurzeln der Gleichung:*

$$(5) \qquad \varphi(\varrho;\, \lambda, \mu) = (\lambda, \mu)_n + (\lambda, \mu)_{n+1}\varrho + \cdots = 0.$$

Daraus ergiebt sich sofort:

I. Ist $(h, k)_n$ eine *definite Form*, d. h. eine solche, welche den Werth Null für das einzige Werthepaar $h = 0$, $k = 0$ annimmt —

was nur eintreten kann, wenn n gerade ist — so ist $(\lambda, \mu)_n$ für alle betrachteten Werthe λ, μ von Null verschieden, $|(\lambda, \mu)_n|$ hat daher eine von Null verschiedene untere Grenze $\varkappa$.

Nimmt man dann die positive Zahl τ_0 so klein an, dass die Entwickelung von $f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)$ für das Werthepaar $h=\tau_0$, $k=\tau_0$ unbedingt convergirt, so hat

$$|(\lambda, \mu)_{n+1}\varrho + (\lambda, \mu)_{n+2}\varrho^2 + \cdots|$$

für den Bereich

$$\lambda^2 + \mu^2 = 1, \quad |\varrho| = \tau_0$$

eine endliche obere Grenze $\mathfrak{M}_0$ und ist nach dem bekannten Satze von Cauchy

$$|(\lambda, \mu)_{n+\nu}| \leq \frac{\mathfrak{M}_0}{\tau_0^{\nu}} \quad (\nu = 1,2,3\ldots),$$

folglich

$$|(\lambda, \mu)_{n+1}\varrho + (\lambda, \mu)_{n+2}\varrho^2 + \cdots| \leq \mathfrak{M}_0 \frac{|\varrho|}{\tau_0 - |\varrho|}$$

für

$$|\varrho| < \tau_0.$$

Ist somit die positive Zahl $\tau_1 < \frac{\varkappa\tau_0}{\mathfrak{M}_0 + \varkappa}$,

so ist für den Bereich $\lambda^2 + \mu^2 = 1$, $|\varrho| \leq \tau_1$

$$|(\lambda, \mu)_n| \geq \varkappa > |(\lambda, \mu)_{n+1}\varrho + (\lambda, \mu)_{n+2}\varrho^2 + \cdots|.$$

Die Gleichung (5) hat daher gewiss keine Wurzel ϱ, deren absoluter Betrag nicht grösser ist als τ_1; die Grösse r ist also von Null verschieden und *findet somit ein Maximum, resp. Minimum statt, je nachdem $(h, k)_n$ eine negative oder positive Form ist.*

II. Ist $(h, k)_n$ eine *indefinite Form*, d. h. eine solche, welche für reelle Werthepaare h, k sowohl positive als negative Functionswerthe annimmt, so ist auch $(\lambda, \mu)_n$ eine solche Form.

Es giebt nämlich dann Werthepaare

$$\bar{h} = \bar{\varrho}\,\bar{\lambda}, \quad \bar{k} = \varrho\,\bar{\mu},$$

für welche

$$(\bar{h}, \bar{k})_n = \bar{\varrho}^n(\bar{\lambda}, \bar{\mu})_n > 0$$

ist, aber auch Werthepaare

$$\bar{\bar{h}} = \bar{\bar{\varrho}}\,\bar{\bar{\lambda}}, \quad \bar{\bar{k}} = \varrho\,\bar{\bar{\mu}},$$

für welche

$$(\bar{\bar{h}}, \bar{\bar{k}})_n = \varrho^n\,(\bar{\bar{\lambda}}, \bar{\bar{\mu}})_n < 0$$

ist.

Haben $\bar{\varrho}^n$ und $\bar{\bar{\varrho}}^n$ gleiche Vorzeichen, so haben $(\bar{\lambda}, \mu)_n$ und $(\bar{\bar{\lambda}}, \bar{\bar{\mu}})_n$ entgegengesetzte; haben $\bar{\varrho}^n$ und $\bar{\bar{\varrho}}^n$ entgegengesetzte Vor-

zeichen, so ist n ungerade und haben $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})_n$ und $(\bar{\bar{\lambda}}, \bar{\bar{\mu}})_n$ gleiche Vorzeichen.

Setzt man aber dann:

$$\bar{\bar{h}} = (-\bar{\bar{\varrho}})(-\bar{\bar{\lambda}}), \quad \bar{\bar{k}} = (-\bar{\bar{\varrho}})(-\bar{\bar{\mu}}),$$

so haben $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})_n$ und $(-\bar{\bar{\lambda}}, -\mu)_n$ entgegengesetzte Vorzeichen.

Es lässt sich nun leicht zeigen, dass in diesem Falle die Gleichung

$$0 = (\lambda, \mu)_n + (\lambda, \mu)_{n+1}\varrho + \cdots$$

in jedem noch so kleinen Intervalle $-\varepsilon < \varrho < \varepsilon$ von Null verschiedene Wurzeln hat, dass also $r = 0$ ist und somit $f(x_0, y_0)$ *weder ein Maximum noch ein Minimum ist.*

Zunächst lässt sich für $|\varrho|$ eine Begrenzung τ so klein angeben, dass die Vorzeichen von

$$\varphi(\varrho; \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = (\bar{\lambda}, \bar{\mu})_n + (\bar{\lambda}, \bar{\mu})_{n+1}\varrho + \cdots$$

und

$$\varphi(\varrho; \bar{\bar{\lambda}}, \bar{\bar{\mu}}) = (\bar{\bar{\lambda}}, \bar{\bar{\mu}})_n + (\bar{\bar{\lambda}}, \bar{\bar{\mu}})_{n+1}\varrho + \cdots$$

beziehungsweise mit jenen von $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})_n$ und $(\bar{\bar{\lambda}}, \bar{\bar{\mu}})_n$ übereinstimmen, also entgegengesetzt sind, solange $|\varrho| < \tau$ ist.

Man kann daher, wie klein auch ε sein mag, stets von Null verschiedene Werthe ϱ_0 angeben, für welche

$$\varphi(\varrho_0; \lambda, \bar{\mu}) > 0, \quad \varphi(\varrho_0; \bar{\bar{\lambda}}, \bar{\bar{\mu}}) < 0, \quad -\varepsilon < \varrho_0 < \varepsilon$$

ist.

Jedem Paare reeller Zahlen λ, μ, für welche $\lambda^2 + \mu^2 = 1$ ist, entspricht im Intervalle $0 \leqq \omega < 2\pi$ ein und nur ein Werth ω, für welchen $\cos\omega = \lambda$, $\sin\omega = \mu$ ist. Bezeichnet man für den Augenblick $\varphi(\varrho; \cos\omega, \sin\omega)$ mit $\Phi(\varrho, \omega)$, so ist

$$\Phi(\varrho_0, \bar{\omega}) > 0, \quad \Phi(\varrho_0, \bar{\bar{\omega}}) < 0; \quad (\cos\bar{\omega} = \bar{\lambda}, \ \sin\bar{\omega} = \bar{\mu} \text{ u. s. w.})$$

folglich giebt es zwischen $\bar{\omega}$ und $\bar{\bar{\omega}}$ sicher einen Werth ω_0, für welchen $\Phi(\varrho_0, \omega_0) = 0$ ist.

ϱ_0 ist daher eine Wurzel der Gleichung $\varphi(\varrho; \lambda_0, \mu_0) = 0$ im Intervalle $-\varepsilon < \varrho_0 < \varepsilon$ $(\lambda_0 = \cos\omega_0, \ \mu_0 = \sin\omega_0)$.

Es kann endlich auch der von Scheeffer zuerst untersuchte Fall eintreten, dass $(h, k)_n$ eine *semidefinite* Form ist, d. h. eine solche, welche zwar für von 0, 0 verschiedene reelle Werthepaare h, k verschwindet, aber ihr Vorzeichen dabei nicht wechselt; sie enthält nothwendig reelle Linearfactoren und zwar jeden einzelnen in gerader Potenz. n ist nothwendig gerade und daher auch $(\lambda, \mu)_n$ eine Form derselben Art.

In diesem Falle kann nicht unmittelbar entschieden werden, ob $f(x_0, y_0)$ ein Maximum, resp. Minimum ist oder nicht, wenn nicht

etwa ausnahmsweise eine Zerlegung von $g(h, k)$ in zwei Factoren $g_1(h, k)$ und $g_2(h, k)$ stattfindet, welche beide mit indefiniten Formen beginnen.

Sind

$$k_1 h - h_1 k,\ k_2 h - h_2 k, \ldots, k_m h - h_m k$$

die sämmtlichen verschiedenen reellen Linearfactoren von $(h, k)_n$, so ist:

$$(h,k)_n = (k_1 h - h_1 k)^{2l_1}(k_2 h - h_2 k)^{2l_2} \ldots (k_m h - h_m k)^{2l_m}(h, k)_{n-2(l_1+l_2+\cdots+l_m)},$$

wobei $(h, k)_{n-2(l_1+l_2+\cdots+l_m)}$ eine definite Form oder eine Constante ist. Die einzelnen Paare h_1, k_1; h_2, k_2; . . , sind natürlich nur bis auf eine willkürliche multiplicative Constante bestimmt.

Jedem solchen Linearfactor $k_{\mathrm{m}} h - h_{\mathrm{m}} k\,(\mathrm{m} = 1, 2, \ldots, m)$ entspricht ein Linearfactor $\mu_{\mathrm{m}} \lambda - \lambda_{\mathrm{m}} \mu$ von $(\lambda, \mu)_n$, wobei zu setzen ist:

$$\lambda_{\mathrm{m}} = \frac{h_{\mathrm{m}}}{\sqrt{h_{\mathrm{m}}^2 + k_{\mathrm{m}}^2}}, \quad \mu_{\mathrm{m}} = \frac{k_{\mathrm{m}}}{\sqrt{h_{\mathrm{m}}^2 + k_{\mathrm{m}}^2}} \tag{6}$$

mit beliebigem Vorzeichen von $\sqrt{h_{\mathrm{m}}^2 + k_{\mathrm{m}}^2}$.

Nähern sich λ, μ einem solchen Werthepaare $\lambda_{\mathrm{m}}, \mu_{\mathrm{m}}$, für welches $(\lambda, \mu)_n$ verschwindet, so werden von den Wurzeln der Gleichung

$$\varphi(\varrho;\ \lambda, \mu) = (\lambda, \mu)_n + (\lambda, \mu)_{n+1}\varrho + \cdots = 0$$

eine oder mehrere unendlich klein. Dabei kann man offenbar den Fall ausschliessen, dass alle $(\lambda_{\mathrm{m}}, \mu_{\mathrm{m}})_{n+\nu}$ $(\nu \geqq 1)$ mit verschwinden, weil ja dann $\varphi(\varrho;\ \lambda_{\mathrm{m}}, \mu_{\mathrm{m}}) = 0$ für jeden beliebig kleinen Werth von ϱ erfüllt ist, also $f(x_0, y_0)$ weder ein Minimum noch ein Maximum ist. Es handelt sich jetzt nur darum zu untersuchen, ob unter den mit $(\lambda, \mu)_n$ zugleich unendlich klein werdenden Wurzeln der Gleichung $\varphi(\varrho;\ \lambda, \mu) = 0$ *reelle vorkommen*, oder *nicht*.

Kommen reelle Wurzeln nicht vor, so ist $r > 0$ und $f(x_0, y_0)$ ein Maximum, wenn die semidefinite Form $(h, k)_n$, soweit sie nicht verschwindet, negativ ist — was kurz durch $(h, k)_n \leqq 0$ bezeichnet werden soll —, ein Minimum, wenn $(h, k)_n \geqq 0$ ist.

Kommen aber reelle Wurzeln vor, so ist $r = 0$ und daher $f(x_0, y_0)$ weder ein Maximum noch ein Minimum.

Die Untersuchung wird nun, wie folgt, eingeleitet.

Um λ, μ in der Nähe von $\lambda_{\mathrm{m}}, \mu_{\mathrm{m}}$ zu betrachten, wird gesetzt:

$$\lambda = \lambda_{\mathrm{m}} + u, \qquad \mu = \mu_{\mathrm{m}} + v\text{*)}.$$

*) Da die Veränderliche ϱ sowohl positive als negative Werthe annehmen kann, so genügt es in den Ausdrücken (6) für λ_{m} und μ_{m} nur einen der beiden Werthe der $\sqrt{h_{\mathrm{m}}^2 + k_{\mathrm{m}}^2}$ zu berücksichtigen, wie auch die folgenden Entwickelungen leicht erkennen lassen.

Wegen $\lambda^2 + \mu^2 = 1$ und $\lambda_m^2 + \mu_m^2 = 1$ muss sein:

$$u^2 + v^2 + 2\lambda_m u + 2\mu_m v = 0. \tag{8}$$

Von den Grössen λ_m und μ_m ist sicher eine von Null verschieden; folglich kann aus (8) von den Veränderlichen u und v stets eine nach ganzen positiven Potenzen der andern entwickelt werden.

Ist $\mu_m \gtrless 0$, so ergiebt sich:

$$v = -\mu_m + \sqrt{\mu_m^2 - (2\lambda_m u + u^2)},$$

wobei, da u und v zugleich verschwinden sollen, die Quadratwurzel so zu bestimmen ist, dass sie für $u = 0$ den Werth μ_m erhält. Also ist zu setzen:

$$\sqrt{\mu_m^2 - (2\lambda_m u + u^2)} = \mu_m \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \binom{\frac{1}{2}}{\nu} \frac{(2\lambda_m u + u^2)^\nu}{\mu_m^{2\nu}}.$$

Die Entwickelung convergirt, solange $|u| < |\lambda_m \pm 1|$ ist, und kann in eine Potenzreihe von u verwandelt werden. Man erhält:

$$v = C_1 u + C_2 u^2 + \cdots + C_q u^q + \cdots, \tag{9}$$

$$C_q = \sum_{\varkappa \geq \frac{q}{2}}^{q} (-1)^\varkappa \binom{\frac{1}{2}}{\varkappa} \binom{\varkappa}{q-\varkappa} \frac{2^{2\varkappa-q} \lambda_m^{2\varkappa-q}}{\mu_m^{2\varkappa-1}}. \tag{10}$$

Die Anfangsglieder sind:

$$v = -\frac{\lambda_m}{\mu_m} u - \frac{1}{2\mu_m^3} u^2 - \frac{\lambda_m}{2\mu_m^5} u^3 - \frac{1 + 4\lambda_m^2}{8\mu_m^7} u^4 - \cdots, \tag{11}$$

Ist $\lambda_m \gtrless 0$, so ergiebt sich die Entwickelung:

$$u = -\frac{\mu_m}{\lambda_m} v - \frac{1}{2\lambda_m^3} v^2 - \frac{\mu_m}{2\lambda_m^5} v^3 - \frac{1 + 4\mu_m^2}{8\lambda_m^7} v^4 - \cdots. \tag{12}$$

Führt man nun diese Entwickelungen:

$$\lambda = \lambda_m + u, \quad \mu = \mu_m - \frac{\lambda_m}{\mu_m} u - \frac{1}{2\mu_m^3} u^2 - \cdots \quad (\mu_m \gtrless 0) \tag{13}$$

oder:

$$\lambda = \lambda_m - \frac{\mu_m}{\lambda_m} v - \frac{1}{2\lambda_m^3} v^2 - \cdots, \quad \mu = \mu_m + v \quad (\lambda_m \gtrless 0) \tag{14}$$

in $\varphi(\varrho;\, \lambda, \mu)$ ein, so ergeben sich die Potenzreihen:

$$\begin{aligned} \psi_m(u, \varrho) = {} & \left(\lambda_m + u,\, \mu_m - \frac{\lambda_m}{\mu_m} u - \cdots\right)_n \\ & + \left(\lambda_m + u,\, \mu_m - \frac{\lambda_m}{\mu_m} u - \cdots\right)_{n+1} \varrho + \cdots \end{aligned} \tag{15}$$

beziehungsweise:

$$(16)\quad \psi_m(v,\varrho) = \left(\lambda_m - \frac{\mu_m}{\lambda_m} v - \cdots,\ \mu_m + v\right)_n + \left(\lambda_m - \frac{\mu_m}{\lambda_m} v - \cdots,\ \mu_m + v\right)_{n+1} \varrho + \cdots,$$

welche für hinreichend kleine Werthe von $|u|$ und $|\varrho|$, bez. $|v|$ und $|\varrho|$ sicher convergiren und nach Dimensionen in u und ϱ, bez. v und ϱ, geordnet werden können. Da $(\lambda_m, \mu_m)_n = 0$ ist, so ist $\psi_m(0,0) = 0$; der Fall, dass $\psi_m(0,\varrho)$ identisch verschwindet, kann, wie bereits bemerkt wurde, ausgeschlossen werden. Ist ϱ^p die niedrigste Potenz in $\psi_m(0,\varrho)$, so hat die Gleichung $\psi_m = 0$ genau p*) mit u, bez. v, zugleich unendlich klein werdende Wurzeln ϱ.

Nun kommt es darauf an zu entscheiden, ob unter diesen Wurzeln reelle vorkommen, oder nicht.

Wenn die Gleichung $\psi_m = 0$ keine reelle Wurzel ϱ hat, welche mit u, bez. v, zugleich unendlich klein wird, so lässt sich nicht zu jedem beliebig kleinen positiven ε ein positives δ so klein angeben, dass im Intervalle $-\varepsilon < \varrho < \varepsilon$ eine von Null verschiedene Wurzel ϱ von $\psi_m = 0$ liegt, die zu einem Werthe u, bez. v, im Intervalle $-\delta < u$, bez. $v < \delta$ gehört; es giebt daher dann positive Zahlen δ und ε, so klein, dass die Function ψ_m, welche mit u, bez. v, und ϱ zugleich verschwindet, im Bereiche

$$-\delta < u, \text{ bez. } v < \delta, \qquad -\varepsilon < \varrho < \varepsilon$$

an jeder von $0, 0$ verschiedenen Stelle u, ϱ, bez. v, ϱ, von Null verschiedene Functionswerthe annimmt, welche nothwendig von demselben Vorzeichen sind. Wäre nämlich etwa $\psi(\varrho', u') > 0$ und $\psi(\varrho'', u'') < 0$, so müsste auf jedem stetigen Uebergange von der Stelle ϱ', u' zur Stelle ϱ'', u'', der ganz im Innern des betrachteten Bereiches liegt und nicht durch die Stelle $0, 0$ geht, eine Stelle u_0, ϱ_0 liegen, an welcher ψ_m verschwindet; solche Stellen giebt es aber eben nicht. Es ist somit $\psi_m(0,0)$ selbst ein Maximum, resp. Minimum, wenn die Gleichung $\psi_m = 0$ keine mit u, bez. v, zugleich unendlich klein werdende reelle Wurzel besitzt.

Offenbar gilt auch das Umgekehrte: wenn $\psi_m(0,0)$ ein Maximum oder Minimum ist, so hat die Gleichung $\psi_m = 0$ keine reelle mit u, bez. v, zugleich unendlich klein werdende Wurzel.

Hat dagegen die Gleichung $\psi_m = 0$ reelle mit u, bez. v, zugleich unendlich klein werdende Wurzeln, so ist $\psi_m(0,0)$ weder ein Maximum noch ein Minimum und umgekehrt; wenn $\psi_m(0,0)$ nicht ein Maximum oder Minimum ist, so giebt es in jedem noch so kleinen

*) Weierstrass, Abhandl. a. d. Functionenlehre, Berlin, 1886, p. 111.

Bereiche $-\delta < u$, bez. $v < \delta$, $-\varepsilon < \varrho < \varepsilon$ von $0, 0$ verschiedene Stellen u, ϱ, bez. v, ϱ, für welche $\psi_{\mathfrak{m}} = 0$ ist.

Durch diese Ueberlegung ist die Entscheidung, ob die Gleichung $\psi_{\mathfrak{m}} = 0$ reelle mit u, bez. v, zugleich unendlich klein werdende Wurzeln hat oder nicht, auf die Untersuchung zurückgeführt, ob $\psi_{\mathfrak{m}}(0, 0)$ ein Maximum, resp. Minimum ist, oder nicht. Es liegt daher nahe die bereits gewonnenen Kriterien I und II anzuwenden, d. h. $\psi_{\mathfrak{m}}$ nach Dimensionen in u und ϱ, bez. v und ϱ, zu ordnen und nachzusehen, ob die Glieder niedrigster Dimension eine definite oder indefinite Form bilden. Dabei hat man jeden der m von einander verschiedenen reellen Linearfactoren $\mu_{\mathfrak{m}}\lambda - \lambda_{\mathfrak{m}}\mu$ $(\mathfrak{m} = 1, 2, \ldots m)$ zu berücksichtigen, wobei es, da u und v zugleich unendlich klein werden, selbstverständlich genügt, für diejenigen Linearfactoren, in welchen $\lambda_{\mathfrak{m}}$ und $\mu_{\mathfrak{m}}$ beide von Null verschieden sind, von den Functionen $\psi_{\mathfrak{m}}(u, \varrho)$ und $\psi_{\mathfrak{m}}(v, \varrho)$ nur *eine* zu betrachten.

Es ergiebt sich somit die folgende Regel:

III. Beginnen die Entwickelungen der Functionen

$$\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_m$$

sämmtlich mit definiten Formen, so ist $f(x_0, y_0)$ *ein Maximum*, wenn die semidefinite Form $(h,k)_n \leqq 0$ ist, *ein Minimum*, wenn $(h,k)_n \geqq 0$ ist.

Beginnt aber *auch nur eine* der Functionen $\psi_{\mathfrak{m}}$ mit einer *indefiniten Form*, so ist $f(x_0, y_0)$ *weder ein Maximum noch ein Minimum.*

Unentschieden bleibt der Fall, wenn von den sämmtlichen Functionen $\psi_{\mathfrak{m}}$ zwar keine mit einer indefiniten, wohl aber eine oder mehrere mit einer semidefiniten Form beginnt.

Dann ist eben auf jede solche Function $\psi_{\mathfrak{m}}$ das angegebene Verfahren abermals anzuwenden, womit übrigens nicht gesagt sein soll, dass man auf diesem Wege die Entscheidung unter allen Umständen erzwingen kann.

Zunächst mögen einige Beispiele durchgeführt werden.

1. Beispiel.

(Peano, l. c., auch von Scheeffer behandelt.)

$$g(h, k) = k^2 - (p^2 + q^2)\, h^2 k + p^2 q^2 h^4,$$

$$\varphi(\varrho;\, \lambda, \mu) = \mu^2 - (p^2 + q^2)\, \lambda^2 \mu \varrho + p^2 q^2 \lambda^4 \varrho^2.$$

Die semidefinite Form μ^2 hat nur den einzigen Linearfactor μ, folglich ist:

$$\lambda_1 = 1,\ \mu_1 = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda_1 = -1,\ \mu_1 = 0.$$

Nach (14) hat man daher zu setzen:

$$\lambda = 1 - \frac{1}{2} v^2 - \cdots, \quad u = v$$

und erhält:

$$\psi_1(v, \varrho) = v^2 - (p^2 + q^2)\, v\varrho + p^2 q^2 \varrho^2 + (v, \varrho)_3 + \cdots.$$

Die Glieder 2. Dim. in v und ϱ bilden eine indefinite quadratische Form, folglich ist $g(0, 0)$ weder ein Maximum noch ein Minimum.

2. Beispiel.

(5. Beispiel von Scheeffer, auch von Stolz behandelt, l. c. pag. 9.)

$$g(h, k) = h^2 k^4 - 3h^4 k^3 + h^6 k^2 - 3hk^7 + k^8 - 10h^{10}k + 5h^{12},$$

$$\varphi(\varrho : \lambda, \mu) = \lambda^2\mu^4 - 3\lambda^4\mu^3\varrho + (\lambda^6\mu^2 - 3\lambda\mu^7 + \mu^8)\varrho^2 - 10\lambda^{10}\mu\varrho^5 + 5\lambda^{12}\varrho^6.$$

Die semidefinite Form $\lambda^2\mu^4$ enthält die Linearfactoren λ und μ; man hat also:

$$\lambda_1 = 0,\quad \mu_1 = 1;\quad \lambda_2 = 1,\quad \mu_2 = 0;$$

für den Linearfactor λ ist daher zu setzen:

$$\lambda = u,\qquad u = 1 - \frac{1}{2}u^2 - \cdots,$$

für den Linearfactor μ:

$$\lambda = 1 - \frac{1}{2}v^2 - \cdots,\qquad \mu = v.$$

Somit ist:

$$\begin{aligned}\psi_1(u, \varrho) = {} & u^2(1 - 2u^2 \ldots) - 3u^4\left(1 - \frac{3}{2}u^2 \ldots\right)\varrho \\ & + \left[u^6(1 - u^2 \ldots) - 3u\left(1 - \frac{7}{2}u^2 \ldots\right) + (1 - 4u^2 \ldots)\right]\varrho^2 \\ & - 10u^{10}\left(1 - \frac{1}{2}u^2 \ldots\right)\varrho^5 + 5u^{12}\varrho^6.\end{aligned}$$

Die Glieder niedrigster Dimension, $u^2 + \varrho^2$, bilden eine definite quadratische Form.

Ferner ist:

$$\begin{aligned}\psi_2(v, \varrho) = {} & v^4(1 - v^2 \ldots) - 3v^3(1 - 2v^2 \ldots)\varrho \\ & + \left[v^2(1 - 3v^2 \ldots) - 3v^7\left(1 - \frac{1}{2}v^2 \ldots\right) + v^8\right]\varrho^2 \\ & - 10v(1 - 5v^2 \ldots)\varrho^5 + 5(1 - 6v^2 \ldots)\varrho^6.\end{aligned}$$

Die Glieder niedrigster Dimension sind:

$$v^4 - 3v^3\varrho + v^2\varrho^2 = v^2(v^2 - 3v\varrho + \varrho^2) = v^2\left(v - \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\varrho\right)\left(v - \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\varrho\right),$$

bilden somit eine indefinite Form; folglich ist $g(0, 0)$ weder ein Maximum noch ein Minimum.

Zugleich ersieht man, dass die Glieder $-3hk^7$, $-10h^{10}k$ und $5h^{12}$ ohne Einfluss sind.

3. Beispiel.

$$g(h,k) = -h^2k^2(h-k)^2 + 2hk^6 - 5h^2k^5 + 3h^3k^4 + h^4k^3$$
$$- 7h^5k^2 + 6h^6k - 10h^8 + h^2k^6 + 3h^4k^4 - 4k^8 + \cdots,$$
$$\varphi(\varrho;\lambda,\mu) = -\lambda^2\mu^2(\lambda-\mu)^2$$
$$+ [2\lambda\mu^6 - 5\lambda^2\mu^5 + 3\lambda^3\mu^4 + \lambda^4\mu^3 - 7\lambda^5\mu^2 + 6\lambda^6\mu]\,\varrho$$
$$+ [-10\lambda^8 + \lambda^2\mu^6 + 3\lambda^4\mu^4 - 4\mu^8]\,\varrho^2 + \cdots.$$

Hier sind 3 Linearfactoren zu berücksichtigen:

$$\mu_1\lambda - \lambda_1\mu = \lambda, \qquad \mu_2\lambda - \lambda_2\mu = \mu, \qquad \mu_3\lambda - \lambda_3\mu = \lambda - \mu.$$

Also ist:

$$\lambda_1 = 0, \quad \mu_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \mu_2 = 0, \quad \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \mu_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Dem entsprechend wird man setzen:

$$\lambda = u, \qquad \lambda = -1 + \frac{1}{2}v^2 + \cdots, \qquad \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} + u,$$
$$\mu = 1 - \frac{1}{2}u^2 - \cdots, \qquad \mu = v, \qquad \mu = \frac{1}{\sqrt{2}} - u - \cdots$$

und erhält:

$$\psi_1(u,\varrho) = -u^2 + 2u\varrho - 4\varrho^2 + \cdots,$$
$$\psi_2(v,\varrho) = -v^2 + 6v\varrho - 10\varrho^2 + \cdots,$$
$$\psi_3(u,\varrho) = -u^2 + \frac{3}{2}u\varrho - \frac{5}{8}\varrho^2 + \cdots,$$

Es beginnen somit alle drei Functionen ψ mit definiten quadratischen Formen; die semidefinite Anfangsform ist, soweit sie nicht verschwindet, negativ: $g(0,0)$ ist demnach ein Maximum.

II.

Das angegebene Verfahren lässt sich noch leicht so modificiren, dass zur Durchführung desselben *keinerlei Reihenentwicklung* erforderlich ist.

Um zu untersuchen, wie sich die Function $g(h,k)$ verhält, wenn sich h, k einer Stelle $h_m = \lambda_m\varrho$, $k_m = \mu_m\varrho$ nähert, an welcher die semidefinite Anfangsform $(h,k)_n$ verschwindet, wurde gesetzt:

$$h = (\lambda_m + u)\,\varrho, \qquad k = (\mu_m + v)\,\varrho.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{k}{h} = \frac{\mu_m + v}{\lambda_m + u}.$$

Ist $\lambda_m \gtrless 0$, so besteht die Entwickelung:

$$u = -\frac{\mu_m}{\lambda_m}v - \frac{1}{2\lambda_m^3}v^2 - \cdots,$$

folglich lässt sich auch $\frac{k}{h}$ nach ganzen positiven Potenzen von v entwickeln in der Form:

$$\frac{k}{h} = \frac{\mu_{\mathrm{m}}}{\lambda_{\mathrm{m}}} + \frac{1}{\lambda_{\mathrm{m}}^3} v + \frac{3\mu_{\mathrm{m}}}{2\lambda_{\mathrm{m}}^5} v^2 + \cdots.$$

Setzt man also:

(17) $$\frac{k}{h} = \frac{\mu_{\mathrm{m}}}{\lambda_{\mathrm{m}}} + k',$$

so ist:

(18) $$k' = \frac{1}{\lambda_{\mathrm{m}}^3} v + \frac{3\mu_{\mathrm{m}}}{2\lambda_{\mathrm{m}}^5} v^2 + \cdots$$

eine mit v zugleich reelle und unendlich kleinwerdende Veränderliche.

Führt man nun für k den Ausdruck $\left(\frac{\mu_{\mathrm{m}}}{\lambda_{\mathrm{m}}} + k'\right) h$ in $g(h, k)$ ein, so ergiebt sich:

(19) $$g(h, k) = h^n \chi_{\mathrm{m}}(h, k')$$

für

(20) $$\chi_{\mathrm{m}}(h, k') = \left(1, \frac{\mu_{\mathrm{m}}}{\lambda_{\mathrm{m}}} + k'\right)_n + \left(1, \frac{\mu_{\mathrm{m}}}{\lambda_{\mathrm{m}}} + k'\right)_{n+1} h + \cdots,$$

wobei zu bemerken ist, dass $\left(1, \frac{\mu_{\mathrm{m}}}{\lambda_{\mathrm{m}}}\right)_n = 0$ ist, so dass die Function χ_{m} kein von h und k' unabhängiges Glied enthält.

Andrerseits ist $g(h, k) = \varrho^n \psi_{\mathrm{m}}(v, \varrho)$; wenn somit die Gleichung $\psi_{\mathrm{m}} = 0$ eine mit v zugleich unendlich klein werdende reelle Wurzel ϱ hat, so hat auch die Gleichung $\chi_{\mathrm{m}} = 0$ eine mit k' zugleich unendlich klein werdende reelle Wurzel h. Denn mit v zugleich wird auch k' reell unendlich klein und einer reellen mit v unendlich klein werdenden Wurzel ϱ entspricht zufolge der Relation $h = (\lambda_{\mathrm{m}} + u)\,\varrho$ eine reelle unendlich klein werdende Wurzel h der Gleichung $\chi_{\mathrm{m}} = 0$. Offenbar gilt auch das Umgekehrte: wenn die Gleichung $\chi_{\mathrm{m}} = 0$ eine mit k' unendlich klein werdende reelle Wurzel h besitzt, so wird mit k' auch v reell unendlich klein, und mit h, zufolge der Relation $h = (\lambda_{\mathrm{m}} + u)\,\varrho$, da $\lambda_{\mathrm{m}} \gtrless 0$ ist, auch ϱ.

Ist $\mu_{\mathrm{m}} \gtrless 0$, so lässt sich eine völlig analoge Betrachtung anstellen; es findet dann die Entwickelung statt:

$$\frac{h}{k} = \frac{\lambda_{\mathrm{m}} + u}{\mu_{\mathrm{m}} + v} = \frac{\lambda_{\mathrm{m}}}{\mu_{\mathrm{m}}} = \frac{1}{\mu_{\mathrm{m}}^3} u + \frac{3\lambda_m}{2\mu_{\mathrm{m}}^5} u^2 + \cdots.$$

Setzt man

$$\frac{h}{k} = \frac{\lambda_{\mathrm{m}}}{\mu_{\mathrm{m}}} + h',$$

so ist

$$h' = \frac{1}{\mu_m^3} u + \frac{3\lambda_m}{2\mu_m^5} u^2 + \cdots$$

eine mit u zugleich reelle und unendlich klein werdende Veränderliche.

Führt man in $g(h, k)$ ein:

$$h = \left(\frac{\lambda_m}{\mu_m} + h'\right) k$$

und bezeichnet das Resultat mit $k^n \chi_m(h', k)$, so kann die Function $\psi_m(u, \varrho)$ für den vorliegenden Zweck durch $\chi_m(h', k)$ ersetzt werden.

Damit ist die folgende Regel begründet:

IV. *Beginnen die Functionen* $\chi_1, \chi_2, \ldots \chi_m$ *sämmtlich mit definiten Formen, so ist* $f(x_0, y_0)$ *ein Maximum, wenn* $(h, k)_n \leqq 0$ *ist, ein Minimum, wenn* $(h, k)_n \geqq 0$ *ist. Beginnt aber auch nur eine der Functionen* $\chi_1, \chi_2 \ldots \chi_m$ *mit einer indefiniten Form, so ist* $f(x_0, y_0)$ *weder ein Maximum noch ein Minimum.*

Beginnt zwar keine der Functionen $\chi_1, \chi_2, \ldots \chi_m$ *mit einer indefiniten Form, wohl aber eine oder mehrere — sie seien durch* χ_s *charakterisirt — mit einer semidefiniten Form, so ist für jede dieser Functionen* χ_s *weiter zu untersuchen, ob* $\chi_s(0, 0)$ *ein Maximum, resp. Minimum ist oder nicht.*

Hat jede Function χ_s *an der Stelle* 0, 0 *ein Maximum oder ein Minimum, so ist* $f(x_0, y_0)$ *selbst ein Maximum, wenn* $(h, k)_n \leqq 0$ *ist, ein Minimum, wenn* $(h, k)_n \geqq 0$ *ist. Hat aber auch nur eine der Functionen* χ_s *an der Stelle* 0, 0 *weder ein Maximum noch ein Minimum, so ist auch* $f(x_0, y_0)$ *weder ein Maximum noch ein Minimum.*

Bei dieser Untersuchung der Functionen χ_s kann es aber ebenfalls geschehen, dass semidefinite Anfangsformen auftreten; tritt diess fortgesetzt ein, so führt das Verfahren eben nicht zum Ziele.

Dieses zweite Verfahren lässt sich auch *unabhängig von dem ersten* rechtfertigen; hierzu sei Folgendes bemerkt.

Beschränkt man die reellen Veränderlichen s und t durch die Bedingungen:

$$s^2 \leqq 1, \qquad t^2 \leqq 1,$$

so ist für jedes reelle Werthepaar h, k entweder $h = sk$, oder $k = th$.

Setzt man nun:

$$g(sk, k) = k^n[(s, 1)_n + (s, 1)_{n+1} k + \cdots] = k^n\, U(s, k),$$

$$g(h, th) = h^n[(1, t)_n + (1, t)_{n+1} h + \cdots] = h^n\, V(h, t),$$

so wird die Frage, ob es Zahlen δ und ε giebt, so klein, dass im Bereiche $0 < h^2 < \delta^2$, $0 < k^2 < \varepsilon^2$, $g(h, k)$ nicht verschwindet, darauf

zurückgeführt, zu untersuchen, ob die Gleichung $U(s, k) = 0$ reelle mit $(s, 1)_n$ zugleich unendlich klein werdende Wurzeln k hat, und ob die Gleichung $V(h, t) = 0$ reelle mit $(1, t)_n$ zugleich unendlich klein werdende Wurzeln h hat. (Die Factoren k^n und h^n kommen dabei nicht in Betracht, weil zufolge $h = sk$ mit k auch h verschwindet und zufolge $k = th$ mit h auch k).

Ersteres kann offenbar nur eintreten, wenn sich s einer reellen Wurzel der Gleichung $(y, 1)_n = 0$ nähert, letzteres, wenn sich t einer reellen Wurzel der Gleichung $(1, z)_n = 0$ nähert.

Jedem reellen Linearfactor $k^{(\nu)}h - h^{(\nu)}k$ von $(h, k)_n$ entspricht, wenn $k^{(\nu)} \gtrless 0$ ist, eine reelle Wurzel $\frac{h^{(\nu)}}{k^{(\nu)}}$ der Gleichung $(y, 1)_n = 0$; falls $h^{(\nu)} \gtrless 0$ ist, eine reelle Wurzel $\frac{k^{(\nu)}}{h^{(\nu)}}$ der Gleichung $(1, z)_n = 0$.

Ist somit $(h, k)_n$ eine *definite* Form, so haben die Gleichungen $(y, 1)_n = 0$ und $(1, z)_n = 0$ überhaupt keine reellen Wurzeln und können positive Zahlen δ und ε angegeben werden, so dass $g(h, k)$ im Bereiche $0 < h^2 < \delta^2$, $0 < k^2 < \varepsilon^2$ nicht verschwindet.

Die unteren Grenzen $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}'$ der absoluten Beträge von $(s, 1)_n$ und $(1, t)_n$ für reelle Werthe von s und t sind nämlich in diesem Falle von Null verschiedene positive Zahlen, folglich giebt es auch für die absoluten Beträge von h und k Begrenzungen δ und ε so klein, dass

$$\mathfrak{g} > |(s, 1)_{n+1}\, k + \cdots|, \quad \text{wenn } k^2 < \varepsilon^2 \text{ ist, und}$$
$$\mathfrak{g}' > |(1, t)_{n+1}\, h + \cdots|, \quad \text{wenn } h^2 < \delta^2 \text{ ist;}$$

also ist $g(h, k)$ im Bereiche $0 < h^2 < \delta^2$, $0 < k^2 < \varepsilon^2$ von Null verschieden und hat das Vorzeichen von $(h, k)_n$.

Ist dagegen $(h, k)_n$ eine *indefinite* Form, so giebt es in jedem noch so kleinen Bereiche $0 < h^2 < \delta^2$, $0 < k^2 < \varepsilon^2$ Stellen h_0, k_0, an welchen $g(h, k)$ verschwindet.

Unter den reellen Linearfactoren von $(h, k)_n$ muss nämlich dann mindestens einer, $k^{(\nu)}h - h^{(\nu)}k$, in ungerader Potenz $q^{(\nu)}$ vorkommen.

Ist nun $h^{(\nu)} \gtrless 0$, $\mathfrak{h}, \mathfrak{k}$ ein Werthepaar, für welches $k^{(\nu)}\mathfrak{h} - h^{(\nu)}\mathfrak{k} = 0$ ist, so ist:

$$k^{(\nu)}(\mathfrak{h} + \alpha) - h^{(\nu)}(\mathfrak{k} + \beta) = k^{(\nu)}\alpha - h^{(\nu)}\beta.$$

Für hinreichend kleine Werthe von α und β hängt das Vorzeichen von $(\mathfrak{h} + \alpha, \mathfrak{k} + \beta)_n$ von dem der Potenz $(k^{(\nu)}\alpha - h^{(\nu)}\beta)^{q^{(\nu)}}$ ab. Macht man also $\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| > \left|\frac{k^{(\nu)}}{h^{(\nu)}}\right|$, so wechselt $k^{(\nu)}\alpha - h^{(\nu)}\beta$ mit β zugleich sein Vorzeichen, und somit auch $(k^{(\nu)}\alpha - h^{(\nu)}\beta)^{q^{(\nu)}}$.

Es giebt daher Werthepaare $\bar{h}, \bar{k} = \bar{t}\bar{h}$; $\bar{\bar{h}}, \bar{\bar{k}} = \bar{\bar{t}}\bar{\bar{h}}$, so beschaffen, dass $\bar{h}$ und $\bar{\bar{h}}$ gleiche Vorzeichen haben, $(\bar{h}, \bar{k})_n$ und $(\bar{\bar{h}}, \bar{\bar{k}})_n$ aber ent-

gegengesetzte; folglich haben auch $(1,\bar{t})_n$ und $(1,\bar{\bar{t}})_n$ entgegengesetzte Vorzeichen.

Nun kann die positive Zahl τ so klein angenommen werden, dass

$$|(1,\bar{t})_n| > |(1,\bar{t})_{n+1}h + \cdots|,$$
$$|(1,\bar{\bar{t}})_n| > |(1,\bar{\bar{t}})_{n+1}h + \cdots|$$

ist, für $|h| < \tau$.

Für solche Werthe von h haben daher $V(h,\bar{t})$ und $V(h,\bar{\bar{t}})$ verschiedene Vorzeichen.

Sind nun δ und ε beliebig kleine positive Zahlen, so kann man doch h_0 so klein wählen, dass nicht nur $|h_0| < \tau$ und δ ist, sondern auch $|\bar{t}h_0| < \varepsilon$ und $|\bar{\bar{t}}h_0| < \varepsilon$ ist; dann giebt es aber — wenn etwa $\bar{t} < \bar{\bar{t}}$ ist — im Intervalle $\bar{t} < t < \bar{\bar{t}}$ gewiss einen Werth t_0, für welchen $V(h_0, t_0) = 0$ ist; folglich ist für das Werthepaar $h_0, k_0 = t_0 h_0$

$$g(h_0, k_0) = 0, \quad 0 < h_0^2 < \delta^2 \quad \text{und} \quad 0 < k_0^2 < \varepsilon^2.$$

Analoges gilt, wenn $k^{(\nu)} \gtrless 0$ ist. Dann giebt es Werthepaare $\bar{h}, \bar{k}$ und $\bar{\bar{h}}, \bar{\bar{k}}$, für welche $\bar{k}$ und $\bar{\bar{k}}$ gleiche Vorzeichen, $(\bar{s}, 1)_n$ und $(\bar{\bar{s}}, 1)_n$ dagegen entgegengesetzte haben.

Ist endlich $(h, k)_n$ eine *semidefinite* Form, so ist für jeden ihrer reellen Linearfactoren $k_m h - h_m k$, deren jeder nothwendig in gerader Potenz vorkommt, besonders zu untersuchen, ob bei der Annäherung von $\frac{k}{h}$ an $\frac{k_m}{h_m}$ (wenn $k_m \gtrless 0$ ist) oder von $\frac{h}{k}$ an $\frac{h_m}{k_m}$ (wenn $k_m \gtrless 0$ ist) es reelle Werthepaare h, k giebt, welche die Gleichung $g(h,k) = 0$ erfüllen und einem beliebig kleinern Bereiche $0 < h^2 < \delta$, $0 < k^2 < \varepsilon$ angehören, oder nicht.

Um diess zu entscheiden setze man, wenn $h_m \gtrless 0$ ist,

$$\frac{k}{h} = \frac{k_m}{h_m} + k', \quad \text{also} \quad k = \left(\frac{k_m}{h_m} + k'\right) h\text{*)};$$

dann wird:

$$g(h,k) = h^n\left[\left(1, \frac{k_m}{h_m} + k'\right)_n + \left(1, \frac{k_m}{h_m} + k'\right)_{n+1} h + \cdots\right]$$
$$= h^n \chi_m(h, k');$$

wenn $k_m \gtrless 0$ ist,

$$\frac{h}{k} = \frac{h_m}{k_m} + h', \quad \text{also} \quad h = \left(\frac{h_m}{k_m} + h'\right) k;$$

*) Solche Substitutionen hat **Weierstrass** in der Theorie der algebraischen Functionen von einer Veränderlichen angewendet.

dann wird:

$$g(h, k) = k^n \left[\left(\frac{h_m}{k_m} + h', 1\right)_n + \left(\frac{h_m}{k_m} + h', 1\right)_{n+1} k + \cdots\right]$$
$$= k^n \chi_m(h', k).$$

Nun weiss man: beginnt $\chi_m(h, k')$ mit einer *definiten* Form, so giebt es positive Zahlen δ_m und ε_m', so klein, dass $\chi_m(h, k')$ im Bereiche:

$$0 \leqq h^2 \leqq \delta_m^2, \quad 0 \leqq k'^2 \leqq \varepsilon_m'^2 \quad (0 < h^2 + k'^2)$$

von Null verschieden ist; folglich ist auch $g(h, k)$ im Bereiche:

$$0 \leqq h^2 \leqq \delta_m^2, \quad \frac{k_m}{h_m} - \varepsilon_m' \leqq \frac{k}{h} \leqq \frac{k_m}{h_m} + \varepsilon_m' \quad (0 < h^2 + k^2)$$

von Null verschieden; a fortiori daher auch für alle Werthepaare h, k dieses Bereiches, für welche $0 \leqq h^2 + k^2 \leqq \delta_m^2$ ist. Beginnt $\chi_m(h', k)$ mit einer *definiten* Form, so giebt es positive Zahlen δ_m' und ε_m, so klein, dass $\chi_m(h', k)$ im Bereiche:

$$0 \leqq h'^2 \leqq \delta_m'^2, \quad 0 \leqq k^2 \leqq \varepsilon_m^2 \quad (0 < h'^2 + k^2)$$

von Null verschieden ist, folglich ist auch $g(h, k)$ im Bereiche:

$$\frac{h_m}{k_m} - \delta_m' \leqq \frac{h}{k} \leqq \frac{h_m}{k_m} + \delta_m', \quad 0 \leqq k^2 \leqq \varepsilon_m^2 \quad (0 < h^2 + k^2)$$

von Null verschieden; a fortiori daher auch für alle Werthepaare h, k dieses Bereiches, für welche $0 < h^2 + k^2 \leqq \varepsilon_m^2$ ist.

Beginnen daher *alle Functionen* χ_m (wenn h_m und k_m beide von Null verschieden sind, genügt es selbstverständlich nur eine der beiden Functionen $\chi_m(h, k')$ und $\chi_m(h', k)$ zu berücksichtigen) mit *definiten* Formen, so gilt Folgendes: $(h, k)_n$ verhält sich nach Ausschluss der m Theilbereiche:

$$\frac{k_m}{h_m} - \varepsilon_m' < \frac{k}{h} < \frac{k_m}{h_m} + \varepsilon_m' \quad (m = 1, 2, \ldots m, \text{ wenn alle } h_m \text{ von Null verschieden sind}),$$

oder der m Theilbereiche:

$$\frac{k_m}{h_m} - \varepsilon_m' < \frac{k}{h} < \frac{k_m}{h_m} + \varepsilon_m' \; (m = 2 \ldots m), \quad -\delta_1' < \frac{h}{k} < \delta_1'$$

(wenn eine der Grössen h_m, also etwa $h_1 = 0$ ist),

im übrig bleibenden Bereiche h, k, der für den Augenblick mit $\mathfrak{R}$ bezeichnet sein mag, wie eine *definite* Form; es giebt daher eine positive Zahl δ_0, so klein, dass $g(h, k)$ für alle Werthepaare h, k in $\mathfrak{R}$, für welche $0 < h^2 + k^2 < \delta_0^2$ ist, von Null verschieden ist.

Macht man also die positive Zahl d kleiner als jede der Zahlen $\delta_0, \delta_1, \ldots \delta_m$ (wenn alle h_m von Null verschieden sind), beziehungsweise kleiner als jede der Zahlen $\delta_0, \varepsilon_1, \delta_2, \ldots \delta_m$ (wenn $h_1 = 0$ ist), so ist $g(h, k)$ im Bereiche:

$$0 < h^2 + k^2 < d^2$$

von Null verschieden, somit $f(x_0, y_0)$ oder $g(0, 0)$ ein *Maximum*, wenn $(h, k)_n \leqq 0$ ist, ein *Minimum*, wenn $(h, k)_n \geqq 0$ ist.

Beginnt aber auch nur *eine* der Functionen χ_m, z. B. $\chi_i(h, k')$ mit einer *indefiniten* Form, so giebt es in jedem noch so kleinen Bereiche $0 < h^2 < \delta^2$, $0 \leqq k'^2 < \varepsilon'^2$ Stellen h, k', für welche $\chi_i(h, k') = 0$ ist; also, wegen $k = \left(\frac{k_i}{h_i} + k'\right) h$, auch in jedem noch so kleinen Bereiche $0 < h^2 < \delta^2$, $0 < k^2 < \varepsilon^2$ Stellen h, k, für welche $g(h, k) = 0$ ist, wenn nämlich $\left(\left|\frac{k_i}{h_i}\right| + \varepsilon'\right) \delta < \varepsilon$ gemacht wird.

Somit ist in diesem Falle $f(x_0, y_0)$ oder $g(0, 0)$ *weder ein Maximum noch ein Minimum.*

Beginnt von den Functionen $\chi, \ldots \chi_m$ zwar *keine* mit einer *indefiniten*, wohl aber *eine* oder *mehrere* — sie seien durch χ_s charakterisirt — mit *semidefiniten* Formen, so erhält man unmittelbar keine Entscheidung, wenn nicht etwa ausnahmsweise eine solche Function χ_s in zwei Factoren zerfällt, deren jeder mit einer *indefiniten* Form beginnt, in welchem Falle weder ein Maximum noch ein Minimum stattfindet.

Es muss dann für jede dieser Functionen besonders untersucht werden, ob $\chi_s(0, 0)$ ein Maximum resp. Minimum ist, oder nicht; ist *jedes* $\chi_s(0,0)$ ein Maximum, resp. Minimum, so ist $f(x_0, y_0)$ ein Maximum, resp. Minimum, je nachdem $(h, k)_n \leqq 0$, resp. $\geqq 0$ ist.

Ist aber auch nur eine der Grössen $\chi_s(0, 0)$ *kein* Maximum, resp. Minimum, so gilt dasselbe auch von $f(x_0, y_0)$.

Als Beispiel will ich das schon nach dem ersten Verfahren behandelte Beispiel Nr. 5 von Scheeffer, aber etwas verallgemeinert, betrachten. Es soll nämlich untersucht werden unter welchen Umständen die Function

$$g(h, k) = h^2k^4 + 2Ah^4k^3 + Bh^6k^2 + Chk^7 + Dk^8 + Eh^{10}k + Fh^{12}$$

$(A, B, \ldots F$ reelle Zahlen) an der Stelle $h = 0$, $k = 0$ ein Minimum habe oder nicht.

Für den ersten Linearfactor h der semidefiniten Form h^2k^4 setze ich $h = h'k$ und sondere k^6 ab; für den zweiten Linearfactor k setze ich $k = hk'$ und sondere h^6 ab.

Dann ergiebt sich:

$$\chi_1(h', k) = h'^2 + Dk^2 + Ch'k^2 + 2Ah'^4k + Bh'^6k^2 + Eh'^{10}k^5 + Fh'^{12}k^6,$$
$$\chi_2(h, k') = k'^2(Bh^2 + 2Ahk' + k'^2) + Fh^6 + Eh^5k' + Ch^2k'^7 + Dh^2k'^8.$$

χ_1 beginnt demnach mit einer definiten Form, wenn $D > 0$ ist; mit

einer indefiniten, wenn $D < 0$ ist; mit einer semidefiniten, wenn $D = 0$ ist.

χ_2 beginnt mit einer indefiniten Form, wenn $A^2 - B > 0$ ist; mit einer semidefiniten, wenn $A^2 - B \leqq 0$ ist.

$g(0, 0)$ kann also nur ein Minimum sein, wenn:

(I) $D > 0,\ A^2 - B < 0$ ist; (II) $D > 0,\ A^2 - B = 0$ ist;

(III) $D = 0,\ A^2 - B \leqq 0$ ist.

Im Falle (III) zeigt sich aber sofort, dass χ_1 den Factor k' enthält; folglich ist $\chi_1(0, 0)$ und daher auch $g(0, 0)$ weder ein Maximum noch ein Minimum.

Im Falle (I) ist zu untersuchen, ob $\chi_2(0, 0)$ ein Minimum ist, oder nicht. Setzt man $k' = hk''$ und sondert h^4 ab, so ergiebt sich:

$$\chi_{2,1} = k''^2(B + 2Ak'' + k''^2) + Fh^2 + \cdots = Fh^2 + Bk''^2 + \cdots.$$

Ist daher $BF > 0$, was wegen $B > A^2$ erfordert, dass $F > 0$ ist, so beginnt $\chi_{2,1}$ mit einer positiven quadratischen Form und ist $g(0, 0)$ ein Minimum. Ist $BF = 0$, also $F = 0$, so enthält χ_2 den Factor k', ist also $\chi_2(0, 0)$ und $g(0, 0)$ kein Minimum; dasselbe gilt, wenn $F < 0$ ist, wobei $\chi_{2,1}$ mit einer indefiniten Form beginnt.

Im Falle (II) ist zu untersuchen, ob die Function

$$\chi_2(h, k) = k'^2(Ah + k')^2 + Fh^6 + Eh^5k' + Ch^2k'^7 + Dh^2k'^8$$

an der Stelle $h = 0,\ k' = 0$ ein Minimum hat oder nicht.

Für den Linearfactor k' der semidefiniten Form $k'^2(Ah + k')^2$ setze ich $k' = hk''$ und sondere h^4 ab; für den Linearfactor $Ah + k'$ setze ich $k' = (-A + k'')h$ und sondere h^4 ab. Dann ergiebt sich:

$$\chi_{2,1}(h, k'') = Fh^2 + A^2k''^2 + Eh^2k'' + 2Ak''^3 + k''^4 + Ch^5k''^7 + Dh^6k''^8,$$

$$\chi_{2,2}(h, k'') = (F - AE)h^2 + A^2k''^2 + Eh^2k'' - 2Ak''^3 + k''^4 + Ch^5(-A + k'')^7 + Dh^6(-A + k'')^8.$$

Daraus ersieht man: wenn $A^2F > 0$ und zugleich $A^2(F - AE) > 0$ ist, so beginnen $\chi_{2,1}$ und $\chi_{2,2}$ mit definiten Formen und ist somit $g(0, 0)$ ein Minimum. Ist entweder $A^2F < 0$ oder $A^2(F - AE) < 0$, so beginnt eine der beiden Functionen $\chi_{2,1}$, $\chi_{2,2}$ mit einer indefiniten Form und ist $g(0, 0)$ kein Minimum.

Ist $A^2F > 0,\ A^2(F - AE) = 0$, also $F = AE$, so beginnt $\chi_{2,2}$ mit einer semidefiniten Form und ist nachzusehen, ob die Function

$$\chi_{2,2}(h, k'') = A^2k''^2 + Eh^2k'' - 2Ak''^3 + k''^4 + Eh^5(-A + k'')^7 + Dh^6(-A + k'')^8$$

an der Stelle $h = 0,\ k'' = 0$ ein Minimum hat, oder nicht. Dazu setzt man $k'' = hk'''$, sondert h^2 ab und erhält:

$$\chi_{2,2,1}(h, k''') = k'''(A^2k''' + Eh) + \cdots.$$

Wegen $A^2F > 0$ ist auch $AE > 0$, folglich $E \gtrless 0$; $\chi_{2,2,1}$ beginnt daher mit einer indefiniten Form; $\chi_{2,2}(0, 0)$ ist also kein Minimum.

Ist $A^2F = 0$, $A^2(F - AE) > 0$, so ist $F = 0$,

$$\chi_{2,1}(h, k'') = A^2k''^2 + \cdots$$

enthält den Factor k'', also ist $\chi_{2,1}(0, 0)$ kein Minimum.

Ist endlich

$$A^2F = 0 \quad \text{und} \quad A^2(F - AE) = 0,$$

so sind noch folgende vier Unterfälle zu unterscheiden:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} & A^2 = 0, & F \gtrless 0, & \\ \text{b)} & A^2 = 0, & F = 0, & E \gtrless 0, \\ \text{c)} & A^2 = 0, & F = 0, & E = 0, \\ \text{d)} & A^2 > 0, & F = 0, & E = 0. \end{array}$$

Im Falle a) ist:

$$\chi_{2,1} = Fh^2 + Eh^2k'' + k''^4 + Ch^5k''^7 + Dh^6k''^8 = \chi_{2,2}.$$

Setzt man $h = h'k''$ und sondert k''^2 ab, so ergiebt sich:

$$\chi_{2,1,1} = \chi_{2,2,1} = Fh'^2 + k''^2 + Eh'^2k'' + \cdots.$$

Ist somit $F > 0$, so beginnen beide Functionen mit einer definiten Form, also ist $g(0, 0)$ ein Minimum. Ist $F < 0$, so beginnen beide Functionen mit einer indefiniten Form, $g(0, 0)$ ist kein Minimum.

Ist $F = 0$, wie in den Fällen b) und c), so haben $\chi_{2,1}$ und $\chi_{2,2}$ (da auch $A = 0$ ist) den Factor k'', folglich ist $g(0, 0)$ kein Minimum.

Im Falle d) endlich enthält $\chi_{2,1}$ den Factor k''^2, folglich ist $g(0, 0)$ kein Minimum.

Die betrachtete Function $g(h, k)$ hat somit an der Stelle $h = 0$, $k = 0$ dann und nur dann ein Minimum,

wenn: $D > 0$, $A^2 - B < 0$, $F > 0$ ist,
oder: $D > 0$, $A^2 - B = 0$, $A^2F > 0$, $F - AE > 0$ ist,
oder: $D > 0$, $A^2 = B = 0$, $F > 0$ ist.

Das Glied Chk^7 ist ohne Einfluss.

III.

Es ist jetzt noch zu untersuchen, unter welchen Umständen dieses Verfahren *nicht* zum Ziele führt, und zwar deswegen, weil *unbeschränkt oft* Entwickelungen mit *semidefiniten* Anfangsformen auftreten. Dabei kann man sich auf den Fall beschränken, dass eine Function χ, wie sie das Verfahren liefert, mit der l^{ten} Potenz (l eine gerade Zahl)

eines einzigen (reellen) Linearfactors beginnt und alle aus ihr abgeleiteten Functionen dasselbe Verhalten zeigen.

Enthält nämlich die semidefinite Anfangsform einer Function χ mehr als einen reellen Linearfactor, ist sie also von der Form $L_1^{2\lambda_1} L_2^{2\lambda_2} \ldots$, wobei $L_1, L_2, \ldots$ verschiedene Linearfactoren bezeichnen, so sind die Dimensionen der Anfangsformen der den Linearfactoren $L_1, L_2, \ldots$ entsprechenden Functionen $\chi_1, \chi_2, \ldots$ gewiss nicht grösser als $2\lambda_1, 2\lambda_2, \ldots$; es tritt somit eine Erniedrigung der Dimensionen der Anfangsformen ein.

Diese Erniedrigung kann aber, soweit semidefinite Anfangsformen in Betracht kommen, nicht unter die Zahl 2 herabgehen; wenn sich somit bei der Fortsetzung des Verfahrens unbeschränkt oft Functionen mit semidefiniten Anfangsformen ergeben, so muss diess schliesslich in der Weise geschehen, dass Functionen χ auftreten, die mit einer geraden Potenz eines einzigen reellen Linearfactors beginnen und durch das angegebene Verfahren fortwährend Functionen derselben Art liefern.

Es sollen nun die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen aufgesucht werden, unter welchen eine Function χ ein derartiges Verhalten zeigt. Um mehrfach accentuirte Veränderliche zu vermeiden, will ich die Untersuchung zunächst für eine Function

$$(21) \qquad g(h, k) = (ah + bk)^l + \varphi_{l+1} + \varphi_{l+2} + \cdots$$

selbst durchführen.

Dabei sind a und b reelle Zahlen, welche nicht beide gleich Null sind — ich nehme insbesondere an, dass b von Null verschieden ist —, l ist eine gerade Zahl, $\varphi_{l+1}, \varphi_{l+2}, \ldots$ sind binäre Formen in h, k von den Dimensionen $l+1,\ l+2, \ldots$.

Jede Function $g(h, k)$, welche mit einer geraden Potenz eines einzigen reellen Linearfactors beginnt, kann — eventuell durch Aenderung ihres Vorzeichens — auf die Form in (21) gebracht werden.

Das Resultat der Substitution

$$(22) \qquad k = -\frac{a}{b} h + hk'$$

in g*), wird nach Absonderung des Factors h^l, — nur für den Zweck

*) Wenn $g(h, k)$ convergirt, solange $|h| < \delta$, $|k| < \delta$ ist, so lässt sich eine positive Zahl $\vartheta \leqq \delta$ so klein angeben, dass

$$\left|\frac{a}{b}\right| \vartheta + \vartheta^2 < \delta$$

ist; also convergirt Vg sicher im Bereiche

$$|h| < \vartheta, \quad |k'| < \vartheta.$$

Analoges gilt für $\overline{V}g$.

dieser speciellen Untersuchung — mit $Vg(h, k)$ oder Vg bezeichnet, so dass also

(23) $$Vg(h, k) = \frac{1}{h^l}\, g\left(h,\ -\frac{a}{b}h + hk'\right) \text{ ist.}$$

Das Resultat der Substitution $(a \gtrless 0)$

(24) $$h = -\frac{a}{b}k + h'k$$

in g, wird nach Absonderung des Factors k^l, mit $\overline{V}g(h, k)$ oder $\overline{V}g$ bezeichnet, so dass also

(25) $$\overline{V}g(h, k) = \frac{1}{k^l}\, g\left(-\frac{b}{a}k + h'k,\ k\right) \text{ ist.}$$

Die Zeichen V und $\overline{V}$ werden aber bequem auch noch in einem etwas weiteren Sinne gebraucht. Ist z. B.

$$Vg = (a'h + bk')^l + \cdots$$

und man setzt

$$k' = -\frac{a'}{b}h + hk'',$$

so wird das Resultat dieser Substitution nach Absonderung des Factors h^l, als $VVg = V^2g$ bezeichnet, u. s. w.

Ich bezeichne ferner, wenn $\psi_p(h, k)$ eine ganze homogene Function p. Dimension in h, k ist,

(26) $$\psi_p\left(h, -\frac{a}{b}h + hk'\right) = h^p[\psi_{p,0} + \psi_{p,1}k' + \psi_{p,2}k'^2 + \cdots + \psi_{p,p}k'^p].$$

Die Frage kann dann so ausgedrückt werden:

Wie muss die Potenzreihe $g(h, k)$, welche selbst mit der l^{ten} Potenz eines einzigen reellen Linearfactors beginnt, beschaffen sein, damit die aus ihr durch beliebige Wiederholung der Operationen V und $\overline{V}$ abzuleitenden Functionen

$$Vg,\ \overline{V}g,\ V^2g,\ \overline{V}Vg,\ V\overline{V}g,\ \overline{V}^2g,\ \ldots \text{ in inf.}$$

sämmtlich mit der l^{ten} Potenz eines einzigen (reellen) Linearfactors beginnen.

Zunächst sollen einmal die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür ermittelt werden, dass mit g zugleich auch Vg mit der l^{ten} Potenz eines Linearfactors beginne.

Aus (21) folgt:

(27) $$Vg = b^l k'^l + h[\varphi_{l+1,0} + \varphi_{l+1,1}k' + \cdots] + \cdots$$
$$+ h^\lambda[\varphi_{l+\lambda,0} + \varphi_{l+\lambda,1}k' + \cdots] + \cdots.$$

Damit keine Glieder unter der l^{ten} Dimension auftreten, muss sein:

$$\varphi_{l+\lambda,\mu} = 0 \quad \text{für} \quad \lambda + \mu \leqq l - 1.$$

Daraus folgt, dass $\varphi_{l+\lambda}$ den Factor $(ah + bk)^{l-\lambda}$ enthalten muss.

Bezeichnet man die Linearform $ah + bk$ durch $\mathfrak{f}_1$, so muss also sein:

(28) $$\varphi_{l+\lambda} = \mathfrak{f}_1^{l-\lambda}\gamma_{2\lambda} \quad (\lambda = 1, 2, \ldots l-1),$$

wobei $\gamma_{2\lambda}$ eine binäre Form in h, k von der Dimension 2λ bedeutet.

Dann ist

$$\varphi_{l+\lambda, l-\lambda+\nu} = b^{l-\lambda}\gamma_{2\lambda,\nu} \quad (\nu = 0, 1, 2 \ldots 2\lambda),$$

also

(29) $$Vg = b^l k'^l + b^{l-1}hk'^{l-1}(\gamma_{2,0} + \cdots) + b^{l-2}h^2k'^{l-2}(\gamma_{4,0} + \cdots) + \cdots$$
$$+ b^{l-\lambda}h^\lambda k'^{l-\lambda}(\gamma_{2\lambda,0} + \cdots) + \cdots + bh^{l-1}k'(\gamma_{2l-2,0} + \cdots)$$
$$+ h^l(\varphi_{2l,0} + \cdots) + \cdots.$$

Nun sind die Bedingungen leicht anzugeben, unter welchen Vg mit der l^{ten} Potenz eines Linearfactors beginnt.

Setzt man

$$\gamma_2 = l\mathfrak{f}_2,$$

unter $\mathfrak{f}_2$ eine quadratische Form in h, k verstehend, so muss sein:

$$\gamma_{2\lambda,0} = \binom{l}{\lambda}\mathfrak{f}_{2,0}^\lambda \quad (\lambda = 2, 3, \ldots l-1), \qquad \varphi_{2l,0} = \mathfrak{f}_{2,0}^l.$$

Hieraus folgt:

(30) $$\gamma_{2\lambda} = \binom{l}{\lambda}\mathfrak{f}_2^\lambda + \mathfrak{f}_1\mathfrak{g}_{2\lambda-1}, \qquad \varphi_{2l} = \mathfrak{f}_2^l + \mathfrak{f}_1\mathfrak{g}_{2l-1},$$

wobei $\mathfrak{g}_3, \ldots \mathfrak{g}_{2l-1}$ binäre Formen in h, k von der Dimension ihrer Zeiger sind.

Also muss sein:

(31) $$\varphi_{l+1} = l\mathfrak{f}_1^{l-1}\mathfrak{f}_2,$$
$$\varphi_{l+\lambda} = \binom{l}{\lambda}\mathfrak{f}_1^{l-\lambda}\mathfrak{f}_2^\lambda + \mathfrak{f}_1^{l-\lambda+1}\mathfrak{g}_{2\lambda-1} \quad (\lambda = 2, \ldots l).$$

Das erste Ergebniss ist somit folgendes.

Damit g und Vg mit der l^{ten} Potenz eines Linearfactors beginnen, muss g die Form haben:

(32) $$g = [\mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_2]^l + \mathfrak{f}_1^{l-1}\mathfrak{g}_3 + \mathfrak{f}_1^{l-2}\mathfrak{g}_5 + \cdots + \mathfrak{f}_1\mathfrak{g}_{2l-1} + \varphi_{2l+1} + \cdots,$$

und zwar ist dann:

(33) $$Vg = (\mathfrak{f}_{2,0}h + bk')^l + (h, k')_{l+1} + \cdots.$$

Zur Abkürzung wird gesetzt:

(34) $$\mathfrak{f}_{2,0}h + bk' = \mathfrak{f}_{2,0}h + \mathfrak{f}_{1,1}k' = \mathfrak{f}_1^{(1)}.$$

Dieselbe Form für g würde sich ergeben, wenn — unter der Voraussetzung dass $a \gtrless 0$ ist — verlangt wird, dass auch $\overline{V}g$ mit der l^{ten} Potenz eines Linearfactors beginnen soll.

Damit ferner auch V^2g (eventuell $V\overline{V}g$, $\overline{V}Vg$, $\overline{V}^2g$) mit der l^{ten} Potenz eines Linearfactors beginne, ist offenbar nothwendig und hinreichend, dass Vg (eventuell $\overline{V}g$) selbst die Form von g in (32)

habe; d. h., wenn $\mathfrak{f}_2^{(1)}$ eine quadratische Form in h, k' bedeutet, die Form habe:

$$(35) \qquad Vg = [\mathfrak{f}_1^{(1)} + \mathfrak{f}_2^{(1)}]^l + \cdots.$$

Aus (32) folgt aber:

$$(36) \quad Vg = [\mathfrak{f}_1^{(1)} + \mathfrak{f}_{2,1} hk' + \mathfrak{f}_{2,2} hk'^2]^l + \sum_{\lambda=1}^{l-1} b^{l-\lambda} h^{\lambda+1} k'^{l-\lambda} (\mathfrak{g}_{2\lambda+1,0} + \cdots)$$
$$+ h^{l+1} (\varphi_{2l+1,0} + \cdots) + \cdots.$$

Hierin haben die Glieder der l^{ten} Dimension bereits die nothwendige Form, nicht aber die von den Dimensionen $l+1$, $l+2$, $\ldots$ $2l$, wie nach (32) erforderlich ist, indem dort erst die Glieder von der Dimension $2l+1$ ab unbeschränkt sind.

Um zunächst den Gliedern der Dimension $l+1$ die nothwendige Form zu geben, muss gemacht werden:

$$(37) \qquad l \mathfrak{f}_1^{(1)^{l-1}} \mathfrak{f}_{2,1} hk' + \sum_{\lambda=1}^{l-1} b^{l-\lambda} \mathfrak{g}_{2\lambda+1,0} h^{\lambda+1} k'^{l-\lambda} + \varphi_{2l+1,0} h^{l+1}$$
$$= l \mathfrak{f}_1^{(1)^{l-1}} \mathfrak{f}_2^{(1)}.$$

Die Grössen $\mathfrak{g}_{3,0}, \ldots \mathfrak{g}_{2l-1,0}$ und $\varphi_{2l+1,0}$ müssen also so bestimmt werden, dass die Function (nach Absonderung des Factors h^2)

$$\varphi_{2l+1,0} h^{l-1} + b \mathfrak{g}_{2l-1,0} h^{l-2} k' + \cdots + b^{l-\lambda} \mathfrak{g}_{2\lambda+1,0} h^{\lambda-1} k'^{l-\lambda} + \cdots$$
$$+ b^{l-1} \mathfrak{g}_{3,0} k'^{l-1}$$

theilbar wird durch $(\mathfrak{f}_{2,0} h + bk')^{l-1}$, d. h. also geradezu gleich wird $\mathfrak{g}_{3,0} (\mathfrak{f}_{2,0} h + bk')^{l-1}$.

Also muss sein:

$$\mathfrak{g}_{2\lambda+1,0} = \binom{l-1}{\lambda-1} \mathfrak{f}_{2,0}^{\lambda-1} \mathfrak{g}_{3,0} \quad (\lambda = 2, \ldots l-1),$$
$$\varphi_{2l+1,0} = \mathfrak{f}_{2,0}^{l-1} \mathfrak{g}_{3,0},$$

während $\mathfrak{g}_{3,0}$ willkürlich bleibt.

Setzt man also $\mathfrak{g}_3 = l \mathfrak{f}_3$, unter $\mathfrak{f}_3$ eine beliebige cubische Form in h, k verstehend, so ergiebt sich:

$$\mathfrak{g}_{2\lambda+1,0} = l \binom{l-1}{\lambda-1} \mathfrak{f}_{2,0}^{\lambda-1} \mathfrak{f}_{3,0} \quad (\lambda = 2, \ldots l-1),$$
$$\varphi_{2l+1,0} = l \mathfrak{f}_{2,0}^{l-1} \mathfrak{f}_{3,0}$$

und daraus weiter:

$$(38) \quad \begin{aligned} \mathfrak{g}_{2\lambda+1} &= l \binom{l-1}{\lambda-1} \mathfrak{f}_2^{\lambda-1} \mathfrak{f}_3 + \mathfrak{f}_1 \mathfrak{g}'_{2\lambda} \quad (\lambda = 2, \ldots l-1), \\ \varphi_{2l+1} &= l \mathfrak{f}_2^{l-1} \mathfrak{f}_3 + \mathfrak{f}_1 \mathfrak{g}'_{2l}, \end{aligned}$$

wobei die $\mathfrak{g}_4' \ldots \mathfrak{g}'_{2l}$ binäre Formen in h, k von der Dimension ihrer Zeiger sind.

Aus (37) folgt dann:

(39) $$\mathfrak{f}_2^{(1)} = \mathfrak{f}_{3,0}\,h^2 + \mathfrak{f}_{2,1}\,hk',$$

$\mathfrak{f}_2^{(1)}$ ist also durch $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_2$ und $\mathfrak{f}_3$ bestimmt.

Führt man die Ausdrücke (38) in (32) ein, so ergiebt sich:

(40) $$\mathfrak{g} = [\mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_2]^l + \sum_{\lambda=1}^{l} l\binom{l-1}{\lambda-1}\mathfrak{f}_1^{l-\lambda}\mathfrak{f}_2^{\lambda-1}\mathfrak{f}_3 + \sum_{\lambda=1}^{l-1}\mathfrak{f}_1^{l-\lambda}\mathfrak{g}'_{2\lambda+2} + \varphi_{2l+2} + \cdots,$$

und daraus:

(41) $$Vg = \mathfrak{f}_1^{(1)l} + l\mathfrak{f}_1^{(1)l-1}\mathfrak{f}_2^{(1)} + l\mathfrak{f}_1^{(1)l-1}\mathfrak{f}_{2,2}hk'^2 + \binom{l}{2}\mathfrak{f}_1^{(1)l-2}\mathfrak{f}_{2,1}^2h^2k'^2$$
$$+\sum_{\lambda=1}^{l} l\binom{l-1}{\lambda-1} b^{l-\lambda}\left[\mathfrak{f}_{2,0}^{\lambda-1}\mathfrak{f}_{3,1} + (\lambda-1)\,\mathfrak{f}_{2,0}^{\lambda-2}\,\mathfrak{f}_{2,1}\,\mathfrak{f}_{3,0}\right] h^{\lambda+1}k'^{\,l-\lambda+1}$$
$$+\sum_{\lambda=1}^{l-1} b^{l-\lambda}\,\mathfrak{g}'_{2\lambda+2,0}\,h^{\lambda+2}k'^{\,l-\lambda} + \varphi_{2l+2,0}\,h^{l+2} + (h,k')_{l+3} + \cdots.$$

Damit nun ferner auch die Glieder der Dimension $l+2$ in Vg die Form der Glieder gleicher Dimension in g bekommen, müssen die Functionen $\mathfrak{g}'_{2\lambda+2}$ und φ_{2l+2} so bestimmt werden, dass

(42) $$l\mathfrak{f}_1^{(1)l-1}\mathfrak{f}_{2,2}\,hk'^2 + \binom{l}{2}\mathfrak{f}_1^{(1)l-2}\mathfrak{f}_{2,1}^2\,h^2k'^2$$
$$+\sum_{\lambda=1}^{l} l\binom{l-1}{\lambda-1} b^{l-\lambda}\left[\mathfrak{f}_{2,0}^{\lambda-1}\mathfrak{f}_{3,1} + (\lambda-1)\,\mathfrak{f}_{2,0}^{\lambda-2}\,\mathfrak{f}_{2,1}\,\mathfrak{f}_{3,0}\right] h^{\lambda+1}k'^{\,l-\lambda+1}$$
$$+\sum_{\lambda=1}^{l-1} b^{l-\lambda}\,\mathfrak{g}'_{2\lambda+2,0}\,h^{\lambda+2}k'^{\,l-\lambda} + \varphi_{2l+2,0}\,h^{l+2} = \binom{l}{2}\mathfrak{f}_1^{(1)l-2}\mathfrak{f}_2^{(1)2} + l\mathfrak{f}_1^{(1)l-1}\mathfrak{f}_3^{(1)}$$

wird, wobei $\mathfrak{f}_3^{(1)}$ eine vorläufig noch unbestimmte cubische Form in h, k' ist.

Die Function (nach Absonderung des Factors h^2)

$$\varphi_{2l+2,0}h^l + \sum_{\lambda=1}^{l-1} b^{l-\lambda}\mathfrak{g}'_{2\lambda+2,0}h^\lambda k'^{\,l-\lambda}$$
$$+\sum_{\lambda=1}^{l} l\binom{l-1}{\lambda-1} b^{l-\lambda}[\mathfrak{f}_{2,0}^{\lambda-1}\mathfrak{f}_{3,1} + (\lambda-1)\,\mathfrak{f}_{2,0}^{\lambda-2}\,\mathfrak{f}_{2,1}\,\mathfrak{f}_{3,0}]\,h^{\lambda-1}k'^{\,l-\lambda+1}$$

muss daher theilbar werden durch $\mathfrak{f}_1^{(1)l-2}$, also gleich werden einem Producte:

$$(C_0h^2 + C_1hk' + C_2k'^2)\,(\mathfrak{f}_{2,0}h + bk')^{l-2}$$

Durch Vergleichung der Coefficienten von k'^l, hk'^{l-1} und $h^2k'^{l-2}$ ergiebt sich:

$$(43)\quad \begin{aligned} C_2 = lb\mathfrak{f}_{3,1},\quad C_1 &= l\left(\mathfrak{f}_{2,0}\mathfrak{f}_{3,1} + (l-1)\mathfrak{f}_{2,1}\mathfrak{f}_{3,0}\right) + b\,\mathfrak{g}'_{4,0},\\ C_0 &= \mathfrak{g}'_{6,0} - (l-2)\,\mathfrak{f}_{2,0}\,\mathfrak{g}'_{4,0}. \end{aligned}$$

Vergleicht man ferner die Coefficienten von $h^\lambda k'^{l-\lambda}$, so erhält man für $\lambda = 3, 4, \ldots, l-1$

$$(44)\quad \mathfrak{g}'_{2\lambda+2,0} = \binom{l-2}{\lambda-2}\mathfrak{f}_{2,0}^{\lambda-2}\mathfrak{g}'_{6,0} + \left(\binom{l-2}{\lambda-1} - (l-2)\binom{l-2}{\lambda-2}\right)\mathfrak{f}_{2,0}^{\lambda-1}\mathfrak{g}'_{4,0}$$

und für $\lambda = l$

$$(44')\quad \varphi_{2l+2,0} = \mathfrak{f}_{2,0}^{l-2}\left(\mathfrak{g}'_{6,0} - (l-2)\,\mathfrak{f}_{2,0}\,\mathfrak{g}'_{4,0}\right).$$

Aus (42) folgt nun nach Absonderung des Factors $\mathfrak{f}_1^{(1)^{l-2}}$:

$$(45)\quad \begin{aligned} l\,\mathfrak{f}_1^{(1)}\mathfrak{f}_{2,2}hk'^2 + \binom{l}{2}\mathfrak{f}_{2,1}^2h^2k'^2 + h^2(C_0h^2 + C_1hk' + C_2k'^2)\\ = \binom{l}{2}\mathfrak{f}_2^{(1)^2} + l\,\mathfrak{f}_1^{(1)}\mathfrak{f}_3^{(1)}. \end{aligned}$$

Damit, wie sich hieraus als nothwendig erweist,

$$\binom{l}{2}\mathfrak{f}_{2,1}^2h^2k'^2 + h^2(C_0h^2 + C_1hk' + C_2k'^2) - \binom{l}{2}\mathfrak{f}_2^{(1)^2}$$

theilbar wird durch $\mathfrak{f}_1^{(1)}$, also gleich einem Producte

$$h^2(D_0h + D_1k')f_1^{(1)},$$

in welchem $D_0 = \mathfrak{g}'_{4,0}$, $D_1 = l\,\mathfrak{f}_{3,1}$ sein muss, ist, wie die Vergleichung der Coefficienten von h^4 ergiebt, erforderlich:

$$(46)\quad \mathfrak{g}'_{6,0} = \binom{l}{2}\mathfrak{f}_{3,0}^2 + (l-1)\,\mathfrak{f}_{2,0}\,\mathfrak{g}'_{4,0}.$$

Führt man diesen Ausdruck in (44) ein, so folgt:

$$(47)\quad \begin{aligned} \mathfrak{g}'_{2\lambda+2,0} = \binom{l}{2}\binom{l-2}{\lambda-2}\mathfrak{f}_{2,0}^{\lambda-2}\mathfrak{f}_{3,0}^2 + \binom{l-1}{\lambda-1}\mathfrak{f}_{2,0}^{\lambda-1}\mathfrak{g}'_{4,0},\\ (\lambda = 2, \ldots, l-1), \end{aligned}$$

während die Grösse $\mathfrak{g}'_{4,0}$ willkürlich bleibt.

Setzt man $\mathfrak{g}_4' = l\mathfrak{f}_4$, wobei $\mathfrak{f}_4$ eine biquadratische Form in h, k bedeutet, so hat man aus (47), (46) und (44'):

$$\mathfrak{g}'_{2\lambda+2,0} = \binom{l}{2}\binom{l-2}{\lambda-2}\mathfrak{f}_{2,0}^{\lambda-2}\mathfrak{f}_{3,0}^2 + l\binom{l-1}{\lambda-1}\mathfrak{f}_{2,0}^{\lambda-1}\mathfrak{f}_{4,0},\quad (\lambda = 2, \ldots, l-1)$$

$$\varphi_{2l+2,0} = \binom{l}{2}\mathfrak{f}_{2,0}^{l-2}\mathfrak{f}_{3,0}^2 + l\,\mathfrak{f}_{2,0}^{l-1}\mathfrak{f}_{4,0}$$

und daraus:

$$(48)\quad \begin{cases} \mathfrak{g}'_{2\lambda+2} = \binom{l}{2}\binom{l-2}{\lambda-2}\mathfrak{f}_2^{\lambda-2}\mathfrak{f}_3^2 + l\binom{l-1}{\lambda-1}\mathfrak{f}_2^{\lambda-1}\mathfrak{f}_4 + \mathfrak{f}_1\mathfrak{g}''_{2\lambda+1}, \\ \qquad (\lambda = 2, \ldots, l-1), \\ \varphi_{2l+2} = \binom{l}{2}\mathfrak{f}_2^{l-2}\mathfrak{f}_3^2 + l\mathfrak{f}_2^{l-1}\mathfrak{f}_4 + \mathfrak{f}_1\mathfrak{g}''_{2l+1}, \end{cases}$$

wobei die $\mathfrak{g}''$ binäre Formen in h, k von der Dimension ihrer Zeiger sind.

Führt man diese Ausdrücke (48) in (40) ein, so erhält man für g die Formel:

$$(49)\quad g = \sum_{\lambda=0}^{l}\binom{l}{\lambda}\mathfrak{f}_1^{l-\lambda}\mathfrak{f}_2^{\lambda} + \sum_{\lambda=1}^{l} l\binom{l-1}{\lambda-1}\mathfrak{f}_1^{l-\lambda}\mathfrak{f}_2^{\lambda-1}\mathfrak{f}_3$$
$$+ \sum_{\lambda=1}^{l-1}\binom{l}{2}\binom{l-2}{\lambda-1}\mathfrak{f}_1^{l-\lambda-1}\mathfrak{f}_2^{\lambda-1}\mathfrak{f}_3^2 + \sum_{\lambda=1}^{l} l\binom{l-1}{\lambda-1}\mathfrak{f}_1^{l-\lambda}\mathfrak{f}_2^{\lambda-1}\mathfrak{f}_4$$
$$+ \sum_{\lambda=1}^{l-1}\mathfrak{f}_1^{l-\lambda}\mathfrak{g}''_{2\lambda+3} + \varphi_{2l+3} + \cdots$$

als nothwendig und hinreichend dafür, dass in Vg die Glieder bis zur Dimension $l+2$ einschliesslich dieselbe Form haben wie in g selbst.

Für die in (42) eingeführte Function $\mathfrak{f}_3^{(1)}$ ergiebt sich aus (45) nach Absonderung des Factors $l\mathfrak{f}_1^{(1)}$

$$(50)\qquad \mathfrak{f}_3^{(1)} = \mathfrak{f}_{4,0}h^3 + \mathfrak{f}_{3,1}h^2k' + \mathfrak{f}_{2,2}hk'^2.$$

Um nun diese Rechnungsresultate zu verallgemeinern und zur Kenntniss der nothwendigen Form von g zu gelangen, wenn auch Vg und V^2g mit der l^{ten} Potenz eines Linearfactors beginnen sollen, wird folgende Ueberlegung angestellt.

Bildet man mit den bisher eingeführten Functionen $\mathfrak{f}_1$ (welche nicht identisch verschwinden darf), $\mathfrak{f}_2$, $\mathfrak{f}_3$, $\mathfrak{f}_4$ und den weiter noch einzuführenden Functionen $\mathfrak{f}_5$, $\mathfrak{f}_6$, ..., die nur die eine Bedingung zu erfüllen haben, dass die Reihe $\mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_2 + \mathfrak{f}_3 + \cdots$ in inf. für hinreichend kleine $|h|$, $|k|$ convergirt, die Function

$$(51)\qquad G = [\mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_2 + \mathfrak{f}_3 + \cdots \text{ in inf.}]^l,$$

so ist sofort zu ersehen, dass das Resultat beliebig vieler Operationen V oder $\overline{V}$ (soweit dieselben überhaupt anwendbar sind) stets eine Function ist, welche mit der l^{ten} Potenz eines Linearfactors beginnt. Insbesondere ist:

$$(52)\qquad VG = \left[bk' + h\sum_{\varrho_2=0}^{2}\mathfrak{f}_{2,\varrho_2}k'^{\varrho_2} + h^2\sum_{\varrho_3=0}^{3}\mathfrak{f}_{3,\varrho_3}k'^{\varrho_3} + \cdots\right]^l$$
$$= [\mathfrak{f}_1^1 + \mathfrak{f}_2^1 + \mathfrak{f}_3^1 + \cdots]^l,$$

wenn gesetzt wird:

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{f}_1{}^1 = \mathfrak{f}_{2,0}\, h + \mathfrak{f}_{1,1}\, k' = \mathfrak{f}_{2,0}\, h + b k',\\
&\mathfrak{f}_2{}^1 = \mathfrak{f}_{3,0}\, h^2 + \mathfrak{f}_{2,1}\, h k',\\
&\mathfrak{f}_3{}^1 = \mathfrak{f}_{4,0}\, h^3 + \mathfrak{f}_{3,1}\, h^2 k' + \mathfrak{f}_{2,2}\, h k'^2,\\
(53)\quad &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&\mathfrak{f}_\nu{}^1 = \mathfrak{f}_{\nu+1,0}\, h^\nu + \mathfrak{f}_{\nu,1}\, h^{\nu-1} k' + \cdots + \mathfrak{f}_{\overline{\frac{\nu+1}{2}},\, \underline{\frac{\nu+1}{2}}}\, h^{\overline{\frac{\nu+1}{2}}-1}\, k'^{\underline{\frac{\nu+1}{2}}},
\end{aligned}
$$

wobei $\overline{\frac{\nu+1}{2}}$ die kleinste ganze Zahl bezeichnet, welche nicht kleiner ist als $\frac{\nu+1}{2}$, $\underline{\frac{\nu+1}{2}}$ die grösste ganze Zahl, welche nicht grösser ist als $\frac{\nu+1}{2}$, so dass für ein gerades ν

$$\overline{\frac{\nu+1}{2}} = \frac{\nu}{2} + 1, \qquad \underline{\frac{\nu+1}{2}} = \frac{\nu}{2},$$

und für ein ungerades ν

$$\overline{\frac{\nu+1}{2}} = \frac{\nu+1}{2}, \qquad \underline{\frac{\nu+1}{2}} = \frac{\nu+1}{2}$$

ist.

Wenn in $\mathfrak{f}_1$ der Coefficient von k von Null verschieden ist, so gilt dies auch vom Coefficienten von k' in $\mathfrak{f}_1{}^1$; also existirt auch $V^2 G$ und beginnt mit der l^{ten} Potenz eines Linearfactors, u. s. w.

Zur Abkürzung bezeichne ich die nach Dimensionen in h, k geordnete Entwickelung von G durch:

$$G = \Phi_l + \Phi_{l+1} + \Phi_{l+2} + \cdots = \sum_{m=l}^{\infty} \Phi_m. \tag{54}$$

Φ_m ist eine ganze ganzzahlige Function von $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots, \mathfrak{f}_{m-l+1}$, deren Form aus dem polynomischen Lehrsatze wohl bekannt ist:

$$\Phi_m = \sum \frac{l!}{\nu_1!\, \nu_2! \ldots \nu_{m-l+1}!}\, \mathfrak{f}_{\varkappa_1}^{\nu_1}\, \mathfrak{f}_{\varkappa_2}^{\nu_2} \ldots \mathfrak{f}_{\varkappa_{m-l+1}}^{\nu_{m-l+1}} \tag{55}$$

$$(\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_{m-l+1} = l,$$

$$\varkappa_1 \nu_1 + \varkappa_2 \nu_2 + \cdots + \varkappa_{m-l+1} \nu_{m-l+1} = m \quad \varkappa_1 < \varkappa_2 < \cdots < \varkappa_{m-l+1}).$$

Die Summe derjenigen Glieder von Φ_m, welche den Factor $\mathfrak{f}_1$ *nicht* enthalten, wird durch $\Phi_m^{[1]}$ bezeichnet, die Summe derjenigen Glieder, welche $\mathfrak{f}_1{}^2$ nicht enthalten, durch $\Phi_m^{[2]}$, u. s. w.

Man kann somit die bisherigen Ergebnisse auch so ausdrücken:

Damit g und Vg mit der l^{ten} Potenz eines Linearfactors beginnen, muss nach (32) sein:

$$(56)\quad \begin{aligned} g = {} & \Phi_l + \Phi_{l+1} + \Phi_{l+2}^{[l-1]} + \Phi_{l+3}^{[l-2]} + \cdots + \Phi_{2l}^{[1]} \\ & + \mathfrak{f}_1^{l-1}\mathfrak{g}_3 + \mathfrak{f}_1^{l-2}\mathfrak{g}_5 + \cdots + \mathfrak{f}_1\mathfrak{g}_{2l-1} + \varphi_{2l+1} + \cdots. \end{aligned}$$

Es ist dann:

$$Vg = \mathfrak{f}_1^{(1)^l} + \cdots \text{ und } \mathfrak{f}_1^{(1)} = \mathfrak{f}_{2,0}h + \mathfrak{f}_{1,1}k' = \mathfrak{f}_1^{1}.$$

Soll auch Vg^2 mit der l^{ten} Potenz eines Linearfactors beginnen, so muss Vg die Form (56) haben, d. h. wenn $\Phi_m(\mathfrak{f}_1^{(1)}, \ldots, \mathfrak{f}_{m-l+1}^{(1)})$ kurz mit $\overset{(1)}{\Phi}_m$ bezeichnet wird — so muss sein:

$$(57)\qquad Vg = \overset{(1)}{\Phi}_l + \overset{(1)}{\Phi}_{l+1} + \cdots.$$

Damit also in Vg die Glieder der Dimension $l + 1$ die nothwendige Form haben, muss nach (40) sein:

$$\begin{aligned} g = {} & \Phi_l + \Phi_{l+1} + \Phi_{l+2}^{[l-1]} + l\mathfrak{f}_1^{l-1}\mathfrak{f}_3 + \cdots + \Phi_{l+\lambda}^{[l-\lambda+1]} \\ & + l\binom{l-1}{\lambda-2}\mathfrak{f}_1^{l-\lambda+1}\mathfrak{f}_2^{\lambda-2}\mathfrak{f}_3 + \cdots \\ & + \Phi_{2l}^{[1]} + l(l-1)\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_2^{l-2}\mathfrak{f}_3 + l\mathfrak{f}_2^{l-1}\mathfrak{f}_3 \\ & + \sum_{\lambda=1}^{l-1}\mathfrak{f}_1^{l-\lambda}\mathfrak{g}'_{2\lambda+2} + \varphi_{2\lambda+2} + \cdots. \end{aligned}$$

Nun ist aber:

$$\Phi_{l+\lambda}^{[l-\lambda+1]} + l\binom{l-1}{\lambda-2}\mathfrak{f}_1^{l-\lambda+1}\mathfrak{f}_2^{\lambda-2}\mathfrak{f}_3 = \Phi_{l+\lambda}^{[l-\lambda+2]} \quad (\lambda = 2, \ldots, l),$$

$\Phi_{l+2}^{[l]} = \Phi_{l+2}$ und $l\mathfrak{f}_2^{l-1}\mathfrak{f}_3 = \Phi_{2l+1}^{[1]}$, also

$$(58)\quad g = \Phi_l + \Phi_{l+1} + \Phi_{l+2} + \sum_{\lambda=3}^{l+1}\Phi_{l+\lambda}^{[l-\lambda+2]} + \sum_{\lambda=1}^{l-1}\mathfrak{f}_1^{l-\lambda}\mathfrak{g}'_{2\lambda+2} + \varphi_{2\lambda+2} + \cdots.$$

Dann ist in der That:

$$Vg = \mathfrak{f}_1^{(1)^l} + l\mathfrak{f}_1^{(1)^{l-1}}\mathfrak{f}_2^{(1)} + \cdots = \overset{(1)}{\Phi}_l + \overset{(1)}{\Phi}_{l+1} \cdots \text{ und}$$

$$\mathfrak{f}_2^{(1)} = \mathfrak{f}_{3,0}h^2 + \mathfrak{f}_{2,1}hk' = \mathfrak{f}_2^{1}.$$

Damit ferner auch die Glieder von der Dimension $l + 2$ in Vg die jetzt nach (58) nothwendige Form $\overset{(1)}{\Phi}_{l+2}$ haben, muss nach (58) und (48) sein:

$$\begin{aligned} g = {} & \sum_{\lambda=0}^{2}\Phi_{l+\lambda} + \sum_{\lambda=3}^{l+1}\Phi_{l+\lambda}^{[l-\lambda+2]} + l\mathfrak{f}_1^{l-1}\mathfrak{f}_4 \\ & + \sum_{\lambda=2}^{l}\left[\binom{l}{2}\binom{l-2}{\lambda-2}\mathfrak{f}_1^{l-\lambda}\mathfrak{f}_2^{\lambda-2}\mathfrak{f}_3^{2} + l\binom{l-1}{\lambda-1}\mathfrak{f}_1^{l-\lambda}\mathfrak{f}_2^{\lambda-1}\mathfrak{f}_4\right] \\ & + \sum_{\lambda=1}^{l-1}\mathfrak{f}_1^{l-\lambda}\mathfrak{g}''_{2\lambda+3} + \varphi_{2l+3} + \cdots. \end{aligned}$$

Es ist aber:

$$\Phi_{l+3}^{[l-1]} + l\mathfrak{f}_1^{(l-1)}\mathfrak{f}_4 = \Phi_{l+3},$$

$$\Phi_{l+\lambda}^{[l-\lambda+2]} + \binom{l}{2}\binom{l-2}{\lambda-4}\mathfrak{f}_1^{l-\lambda+2}\mathfrak{f}_2^{\lambda-4}\mathfrak{f}_3^{2} + l\binom{l-1}{\lambda-3}\mathfrak{f}_1^{l-\lambda+2}\mathfrak{f}_2^{\lambda-3}\mathfrak{f}_4$$
$$= \Phi_{l+\lambda}^{[l-\lambda+3]} \quad (\lambda = 4, \ldots, l+1),$$

$$\text{und} \quad \binom{l}{2}\mathfrak{f}_2^{l-2}\mathfrak{f}_3^{2} + l\mathfrak{f}_2^{l-1}\mathfrak{f}_4 = \Phi_{2l+2}^{[1]},$$

somit:

$$(59) \quad g = \sum_{\lambda=0}^{3}\Phi_{l+\lambda} + \sum_{\lambda=4}^{l+2}\Phi_{l+\lambda}^{[l-\lambda+3[} + \sum_{\lambda=1}^{l-1}\mathfrak{f}_1^{l-\lambda}\mathfrak{g}''_{2\lambda+3} + \varphi_{2l+3} + \cdots.$$

Dann ist in der That:

$$Vg = \mathfrak{f}_1^{(1)^l} + l\,\mathfrak{f}_1^{(1)^{l-1}}\mathfrak{f}_2^{(1)} + \binom{l}{2}\mathfrak{f}_1^{(1)^{l-2}}\mathfrak{f}_2^{(1)^2} + l\,\mathfrak{f}_1^{(1)^{l-1}}\mathfrak{f}_3^{(1)} + \cdots$$
$$= \overset{(1)}{\Phi}_l + \overset{(1)}{\Phi}_{l+1} + \overset{(1)}{\Phi}_{l+2} + \cdots$$

und

$$\mathfrak{f}_3^{(1)} = \mathfrak{f}_{4,0}h^3 + \mathfrak{f}_{3,1}h^2k' + \mathfrak{f}_{2,2}hk'^2 = \mathfrak{f}_3^{1}.$$

Für $i = 0, 1, 2$ ist somit in Erfahrung gebracht:

Damit in Vg die Glieder bis zur Dimension $l + i$ einschliesslich die nothwendige Form haben, muss sein:

$$(60) \quad g = \sum_{\lambda=0}^{i+1}\Phi_{l+\lambda} + \sum_{\lambda=2+i}^{l+i}\Phi_{l+\lambda}^{[l-\lambda+i+1]} + \sum_{l=!}^{l-1}\mathfrak{f}_1^{l-\lambda}\mathfrak{g}_{2\lambda+i+1}^{(i)} + \varphi_{2l+i+1} + \cdots,$$

und zwar ist dann:

$$Vg = \sum_{\lambda=0}^{i}\overset{(1)}{\Phi}_{l+\lambda} + \cdots$$

und für die Functionen $\mathfrak{f}_1^{(1)}, \mathfrak{f}_2^{(1)}, \ldots, \mathfrak{f}_{i+1}^{(1)}$ die Form

$$(60\text{a}) \quad \mathfrak{f}_\nu^{(1)} = \mathfrak{f}_{\nu+1,0}h^\nu + \mathfrak{f}_{\nu,1}h^{\nu-1}k' + \cdots + \mathfrak{f}_{\overline{\frac{\nu+1}{2}},\,\underline{\frac{\nu+1}{2}}}\,h^{\overline{\frac{\nu+1}{2}}-1}k'^{\frac{\nu+1}{1}}$$

constatirt, d. h. ihre Identität mit den Functionen $\mathfrak{f}_1^1, \ldots, \mathfrak{f}_{i+1}^1$.

In den $\Phi_{l+\lambda}$ und $\Phi_{l+\lambda}^{[l-\lambda+i+1]}$ welche in (60) vorkommen, treten die Functionen $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots, \mathfrak{f}_{i+2}$ auf.

Nun ist zu untersuchen, ob diese Bedingungen auch für die Glieder der Dimension $l + i + 1$ in Vg gelten.

Die nothwendige Form dieser Glieder ist:

$$\overset{(1)}{\Phi}_{l+i+1} = l\,\mathfrak{f}_1^{(1)^{l-1}}\mathfrak{f}_{i+2}^{(1)} + (\mathfrak{f}_1^{(1)}, \ldots, \mathfrak{f}_{i+1}^{(1)})_{l+i+1}.$$

Andererseits ist aus (60):

$$Vg = V\left\{\sum_{\lambda=0}^{i+1}\Phi_{l+\lambda} + \sum_{\lambda=2+i}^{l+i}\Phi_{l+\lambda}^{[l-\lambda+i+1]}\right\}$$
$$+\sum_{\lambda=1}^{l-1} b^{l-\lambda}\, h^{\lambda+i+1}\, k'^{\,l-\lambda}(\mathfrak{g}^{(i)}_{2\lambda+i+1,0} + \cdots) + \varphi_{2l+i+1,0}\, h^{l+i+1} + \cdots.$$

Also muss gemacht werden:

$$\text{(61)} \qquad \varphi_{2l+i+1,0}\, h^{l+i+1} + \sum_{\lambda=1}^{l-1} b^{l-\lambda}\, \mathfrak{g}^{(i)}_{2\lambda+i+1,0}\, h^{\lambda+i+1}\, k'^{\,l-\lambda}$$
$$+\left[V\left\{\sum_{\lambda=0}^{i+1}\Phi_{l+\lambda} + \sum_{\lambda=2+i}^{l+i}\Phi_{l+\lambda}^{[l-\lambda+i+]}\right\}\right]_{(l+i+1)}$$
$$= l\, \mathfrak{f}_1^{(1)^{l-1}}\, \mathfrak{f}^{(1)}_{i+2} + (\mathfrak{f}_1^{(1)}, \ldots, \mathfrak{f}^{(1)}_{i+1})_{l+i+1},$$

wobei die Glieder der Dimension $l + i + 1$ aus $V\{\,\}$ durch $[V\{\,\}]_{(l+i+1)}$ angedeutet werden.

Vergleicht man nun die $l + i + 2$ Coefficienten von $h^{l+i+1}, \ldots k'^{\,l+i+1}$ der rechten und linken Seite, so ergeben sich ebensoviele lineare Gleichungen für die $l - 1$ Grössen $\mathfrak{g}^{(i)}_{2\lambda+i+1,0}$, die Grösse $\varphi_{2\lambda+i+1,0}$ und die $i + 3$ Coefficienten $a^{(1)}_{i+2-\tau,\tau}$ $(\tau = 0, 1, \ldots, i + 2)$ der Function $\mathfrak{f}^{(1)}_{i+2}$; diese Anzahl $l + i + 3$ ist also um eine Einheit grösser als die Anzahl der Gleichungen.

Betrachtet man aber $\mathfrak{g}^{(i)}_{i+3,0}$ als eine willkürliche Grösse, so werden dann diese linearen Gleichungen, welche mit (Σ) bezeichnet sein mögen, die übrigen der eben genannten Grössen als lineare Functionen von $\mathfrak{g}^{(i)}_{i+3,0}$ eindeutig bestimmen, vorausgesetzt, dass ihre Determinante nicht Null ist.

Vergleicht man die Coefficienten in der Aufeinanderfolge der Glieder mit

$$h^{i+3} k'^{\,l-2},\ h^{i+4} k'^{\,l-3}, \ldots, h^{l+i+1},\ h^{i+2} k'^{\,l-1},\ h^{i+1} k'^{\,l}, \ldots, k'^{\,l+i+1},$$

und schreibt die zu bestimmenden Grössen in der Anordnung

$$\mathfrak{g}^{(i)}_{i+5,0},\ \mathfrak{g}^{(i)}_{i+7,0}, \ldots, \mathfrak{g}^{(i)}_{2l+i-1,0},\ \varphi^{(1)}_{2l+i+1,0},\ a^{(1)}_{i+2,0},\ a_{i+1,1}, \ldots, a^{(1)}_{0,i+2},$$

so bemerkt man sofort, dass in der Determinante dann alle Elemente links von der Hauptdiagonale gleich Null sind; in der Hauptdiagonale selbst ist der Coefficient von $\mathfrak{g}^{(i)}_{2\lambda+i+1}$ $(\lambda = 2, 3, \ldots l - 1)$ $b^{l-\lambda}$, der von φ_{2l+i+1} ist 1, der von $a^{(1)}_{i+2-\tau,\tau}$ $(\tau = 0, 1, \ldots i + 2)$ ist $l b^{l-1}$.

Die Determinante ist daher, abgesehen von dem Factor l^{i+3}, selbst nur eine Potenz von b, nämlich $b^{\frac{(l-1)(l+2i+4)}{2}}$, und als solche der Voraussetzung zufolge von Null verschieden.

Es giebt somit ein und nur ein System linearer Functionen von $\mathfrak{g}^{(i)}_{i+3,0}$, welches die Gleichungen (Σ), oder die Gleichung (61) erfüllt; dasselbe kann nun aber ohne alle Rechnung aus der Function G entnommen werden.

Bringt man nämlich G auf die Form (60) von g, setzt also:

$$(62)\quad G = \sum_{\lambda=0}^{i+1} \Phi_{i+\lambda} + \sum_{\lambda=2+i}^{l+i} \Phi_{i+\lambda}^{[l-\lambda+i+1]} + \sum_{\lambda=1}^{l-1} \mathfrak{f}_1^{\,l-\lambda} \overset{(i)}{\mathfrak{G}}_{2\lambda+i+1} + \Phi_{2l+i+1} + \cdots,$$

so sind die $\overset{(i)}{\mathfrak{G}}_{2\lambda+i+1}$ natürlich bekannt; $\mathfrak{f}_1^{\,l-\lambda} \overset{(i)}{\mathfrak{G}}_{2\lambda+i+1}$ ist nämlich die Summe derjenigen Glieder von $\Phi_{l+\lambda+i+1}$, welche den Factor $\mathfrak{f}_1^{\,l-\lambda}$ enthalten.

Die nothwendige Bedingung dafür, dass in VG die Glieder der Dimension $l+i+1$ die erforderliche Form haben, ist eine Gleichung, welche sich von (61) nur dadurch unterscheidet, dass an die Stelle von $\mathfrak{g}^{(i)}_{2\lambda+i+1,0}$, $\overset{(i)}{\mathfrak{G}}_{2\lambda+i+1,0}$ tritt, $(\lambda = 1, \ldots, l-1)$, an die Stelle von $\varphi_{2l+i+1,0}$, $\Phi_{2l+i+1,0}$, und an die Stelle der Coefficienten $a^{(1)}_{i+2-\tau,\tau}$ die Coefficienten $a^{1}_{i+2-\tau,\tau}$ der Function $\mathfrak{f}^{1}_{i+2}$ treten. Von VG weiss man aber, dass die Glieder der Dimension $l+i+1$ sicher die nothwendige Form haben; also müssen die Grössen $\overset{(i)}{\mathfrak{G}}_{2\lambda+i+1,0}$, $\Phi_{2l+i+1,0}$ und die Coefficienten der Function

$$\mathfrak{f}^{1}_{i+2} = \mathfrak{f}_{i+3,0}\, h^{i+2} + \mathfrak{f}_{i+2,1}\, h^{i+1} k' + \cdots + \mathfrak{f}_{\overline{\frac{i+3}{2}},\,\underline{\frac{i+3}{2}}}\, h^{\overline{\frac{i+3}{2}}-1} k'^{\underline{\frac{i+3}{2}}}$$

die Gleichungen (Σ) erfüllen, wenn man $\mathfrak{g}^{(i)}_{i+3,0} = \overset{(i)}{\mathfrak{G}}_{i+3,0}$ setzt.

$\Phi_{l+\lambda+i+1}$ enthält das Glied $l\binom{l-1}{\lambda-1}\mathfrak{f}_1^{\,l-\lambda}\,\mathfrak{f}_2^{\,\lambda-1}\,\mathfrak{f}_{i+3}$,

$\mathfrak{G}^{(i)}_{2\lambda+i+1}$ enthält daher das Glied $l\binom{l-1}{\lambda-1}\mathfrak{f}_2^{\,\lambda-1}\,\mathfrak{f}_{i+3}$;

Φ_{l+i+2} insbesondere $(\lambda = 1)$ enthält das Glied $l\,\mathfrak{f}_1^{\,l-1}\mathfrak{f}_{i+3}$, also ist $\overset{(i)}{\mathfrak{G}}_{i+3} = l\,\mathfrak{f}_{i+3}$.

Die Grössen $\overset{(i)}{\mathfrak{G}}_{2\lambda+i+1,0}$ $(\lambda=2,\ldots,l-1)$ sind also in der That lineare Functionen von $\overset{(i)}{\mathfrak{G}}_{i+3,0} = l\,\mathfrak{f}_{i+3,0}$.

Wählt man also für die willkürlich bleibende Function $\mathfrak{g}^{(i)}_{i+3}$ die Bezeichnung $l\,\mathfrak{f}_{i+3}$, so muss sein:

$$\mathfrak{g}^{(i)}_{2\lambda+i+1,0} = \overset{(i)}{\mathfrak{G}}_{2\lambda+i+1,0}\ (\lambda=2,\ldots,l-1), \quad \varphi_{2l+i+1,0} = \Phi_{2l+i+1,0}.$$

Hieraus folgt:

$$\mathfrak{g}^{(i)}_{2\lambda+i+1} = \overset{(i)}{\mathfrak{G}}{}^{[1]}_{2\lambda+i+1}{}^{*)} + \mathfrak{f}_1\, \mathfrak{g}^{(i+1)}_{2\lambda+i}\ (\lambda=2,\ldots,l-1),$$

$$\varphi_{2l+i+1} = \Phi^{[1]}_{2l+i+1} + \mathfrak{f}_1\, \mathfrak{g}^{(i+1)}_{2l+i}.$$

---

*) $\overset{(i)}{\mathfrak{G}}{}^{[1]}_{2\lambda+i+1}$ ist die Summe derjenigen Glieder von $\overset{(i)}{\mathfrak{G}}_{2\lambda+i+1}$, welche den Factor $\mathfrak{f}_1$ *nicht* enthalten.

Führt man diese Ausdrücke in (60) ein, so ergiebt sich:

$$
\begin{aligned}
g = & \sum_{\lambda=0}^{i+1} \Phi_{l+\lambda} + \Phi_{l+i+2}^{[l-1]} + l\,\mathfrak{f}_1^{l-1}\,\mathfrak{f}_{i+3} \\
& + \sum_{\lambda=3+i}^{l+i} \Big[\Phi_{l+\lambda}^{[l-\lambda+i+1]} + \mathfrak{f}_1^{l-\lambda+i+1}\,\overset{(i)}{\mathfrak{G}}{}_{2\lambda-i-1}^{[1]}\Big] + \Phi_{2l+i+1}^{[1]} \\
& + \sum_{\lambda=2}^{l} \mathfrak{f}_1^{l-\lambda+1}\,\mathfrak{g}_{2\lambda+i}^{(i+1)} + \varphi_{2l+i+2} + \cdots,
\end{aligned}
$$

oder wegen

$$\Phi_{l+i+2}^{[l-1]} + l\,\mathfrak{f}_1^{l-1}\,\mathfrak{f}_{i+3} = \Phi_{l+i+2}$$

und

$$\Phi_{l+\lambda}^{[l-\lambda+i+1]} + \mathfrak{f}_1^{l-\lambda+i+1}\,\overset{(i)}{\mathfrak{G}}{}_{2\lambda-i-1}^{[1]} = \Phi_{l+\lambda}^{[l-\lambda+i+2]},$$

$$(63)\quad g = \sum_{\lambda=0}^{i+2} \Phi_{l+\lambda} + \sum_{\lambda=i+3}^{l+i+1} \Phi_{l+\lambda}^{[l-\lambda+i+2]} + \sum_{\lambda=1}^{l-1} \mathfrak{f}_1^{l-\lambda}\,\mathfrak{g}_{2\lambda+i+2}^{(i+1)} + \varphi_{2l+i+2} + \cdots.$$

Das ist aber genau der Ausdruck für g, der aus (60) hervorgeht, wenn man $i+1$ an die Stelle von i setzt. Zugleich ist:

$$Vg = \sum_{\lambda=0}^{i+1} \overset{(1)}{\Phi}_{l+\lambda} + \cdots$$

und für die Function $\mathfrak{f}_{i+2}^{(1)}$ die für die Functionen $\mathfrak{f}_1^{(1)}$ bis $\mathfrak{f}_{i+1}^{(1)}$ beobachtete Form constatirt, oder ihre Identität mit $\mathfrak{f}_{i+2}^{1}$.

In den Ausdrücken $\Phi_{l+\lambda}$ und $\Phi_{l+\lambda}^{[l-\lambda+i+2]}$ kommen vor die Functionen $\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_{i+3}$.

Der Ausdruck (60) giebt daher für jede Anzahl i die Form an, welche g haben muss, damit in Vg die Glieder bis zur Dimension $l+i$ einschliesslich dieselbe Form haben wie in g selbst; für $i=l$ insbesondere giebt er die Form an, welche g haben muss, wenn Vg und auch V^2g mit der l^{ten} Potenz eines einzigen Linearfactors beginnen sollen, nämlich:

$$(64)\quad g = \sum_{\lambda=0}^{l+1} \Phi_{l+\lambda} + \sum_{l=}^{l} \Phi_{2\,l+\lambda}^{[l-\lambda+1]} + \sum_{\lambda=1}^{l-1} \mathfrak{f}_1^{l-\lambda}\,\mathfrak{g}_{l+2\lambda+1}^{(l)} + \varphi_{3l+1} + \cdots.$$

Eine ganz analoge Betrachtung zeigt, dass der Ausdruck (60) ebenso auch die Form angiebt, welche g haben muss, damit — vorausgesetzt, dass $a \gtrless 0$ ist — in $\overline{V}g$ die Glieder bis zur Dimension $l+i$ einschliesslich dieselbe Form haben wie in $\mathfrak{g}$ selbst.

In dieser Art kann nun die vollständige Induction durchgeführt und die Form angegeben werden, welche die Function g haben muss,

wenn sie selbst und das Resultat von beliebig vielen Operationen V oder $\overline{V}$, in beliebiger Aufeinanderfolge ausgeführt (soweit diese Operationen überhaupt anwendbar sind) mit der l^{ten} Potenz eines Linearfactors beginnen soll.

Angenommen nämlich es sei constatirt:

Wenn g und die Resultate von n Operationen V oder $\overline{V}$ mit der l^{ten} Potenz eines Linearfactors beginnen sollen, muss sein:

$$(65)\quad g = \sum_{\lambda=0}^{(n-1)l+1} \Phi_{l+\lambda} + \sum_{\lambda=2}^{l} \Phi_{nl+\lambda}^{[l-\lambda+1]} + \sum_{\lambda=1}^{l-1} f_1^{l-\lambda} \mathfrak{g}_{(n-1)l+2\lambda+1}^{(\overline{n-1}\,l)} + \varphi_{(n+1)l+1} + \cdots$$

und es haben in Vg die Glieder bis zur Dimension nl einschliesslich dieselbe Form wie in g, nur dass an die Stelle von $f_1 \ldots f_{(n-1)l+1}$ die Functionen $f_1^{(1)}, \ldots f_{(n-1)l+1}^{(1)}$ treten, für welche das Bildungsgesetz (60a) gilt; und analog in $\overline{V}g$.

Damit nun auch das Resultat von $n+1$ Operationen V oder $\overline{V}$ mit der l^{ten} Potenz eines Linearfactors beginne, ist offenbar nothwendig und hinreichend, dass Vg, beziehungsweise $\overline{V}g$, ebenfalls die Form von g in (65) haben, in welcher erst die Glieder von der Dimension $(n+1)\,l+1$ ab willkürlich sind; es sind also in Vg, beziehungsweise $\overline{V}g$, die Glieder von der Dimension $nl+1$ ab bis zur Dimension $(n+1)\,l$ gehörig zu bestimmen.

Um nun die entsprechenden Formen von g zu erhalten, hat man nur in (60) der Reihe nach $i = (n-1)\,l+1,\ (n-1)\,l+2, \ldots nl$ zu setzen und erhält als nothwendige Form von g, damit auch das Resultat von $n+1$ Operationen V oder $\overline{V}$ mit der l^{ten} Potenz eines Linearfactors beginne, die folgende:

$$\begin{aligned} g &= \sum_{\lambda=0}^{nl+1} \Phi_{l+\lambda} + \sum_{\lambda=2+nl}^{(n+1)l} \Phi_{l+\lambda}^{[l-\lambda+nl+1]} + \sum_{\lambda=1}^{l-1} \mathfrak{f}_1^{l-\lambda} \mathfrak{g}_{nl+2\lambda+1}^{(nl)} + \varphi_{(n+2)l+1} + \cdots \\ &= \sum_{\lambda=0}^{nl+1} \Phi_{l+\lambda} + \sum_{\lambda=2}^{l} \Phi_{(n+1)l+\lambda}^{[l-\lambda+1]} + \sum_{\lambda=1}^{l-1} \mathfrak{f}_1^{l-\lambda} \mathfrak{g}_{nl+2\lambda+1}^{(nl)} + \varphi_{(n+2)l+1} + \cdots . \end{aligned}$$

Das ist aber genau der Ausdruck, der aus (65) hervorgeht, wenn man an die Stelle von n $n+1$ setzt.

Damit ist gezeigt, dass der Ausdruck (65) die Form angiebt, welche g haben muss, wenn n aufeinander folgende Operationen V oder $\overline{V}$ durchaus Functionen liefern sollen, welche, wie g selbst, mit der l^{ten} Potenz eines einzigen Linearfactors beginnen. Hieraus folgt:

Wenn g selbst und alle aus g durch beliebige Wiederholung der Operation V oder $\overline{V}$ abzuleitenden Functionen mit der l^{ten} Potenz eines einzigen Linearfactors beginnen sollen, so muss g bis zu Gliedern jeder

beliebigen Dimension hin mit G übereinstimmen, *muss also selbst die l^{te} Potenz einer Potenzreihe* $\mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_2 + \mathfrak{f}_3 + \cdots$ *sein*, welche für hinreichend kleine $|h|$, $|k|$ convergirt und mit nicht identisch verschwindenden Gliedern erster Dimension beginnt.

Dabei ist noch etwas zu erwähnen. Bei der Bildung der Function G wurde die Convergenz der Reihe $\mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_2 + \mathfrak{f}_3 + \cdots$, welche als Potenzreihe in h, k durch

$$\mathfrak{f}_1(h,k) + \mathfrak{f}_2(h,k) + \cdots = \sum a_{\alpha\beta}\, h^\alpha k^\beta \quad (\alpha + \beta \geqq 1)$$

bezeichnet werden mag, vorausgesetzt.

Es hätte aber auch genügt nur anzunehmen, dass die Potenzreihe G, welche als solche durch

$$G(h,k) = \Phi_l(h,k) + \Phi_{l+1}(h,k) + \cdots = \sum A_{\lambda\mu}\, h^\lambda k^\mu \quad (\lambda + \mu \geq l)$$

bezeichnet werden soll, für hinreichend kleine $|h|$, $|k|$ convergirt, indem daraus die Convergenz der Potenzreihe $\sum a_{\alpha\beta}\, h^\alpha k^\beta$ erschlossen werden kann.

Für Potenzreihen von einer Veränderlichen, welche mit einem Gliede beginnen, dessen Exponent durch l theilbar ist, ergiebt sich der Satz unmittelbar aus dem polynomischen Lehrsatze.

Für Potenzreihen von zwei Veränderlichen scheint mir der Satz aber eines besonderen Beweises zu bedürfen.

Angenommen es sei bekannt, dass die Potenzreihe $\sum A_{\lambda\mu}\, h^\lambda k^\mu$, welche *formal* die l^{te} Potenz der Potenzreihe $\sum a_{\alpha\beta}\, h^\alpha k^\beta$ ist, convergirt, wenn $|h| < \delta$ und $|k| < \delta$ ist, wobei δ eine positive Zahl bezeichnet, welche beliebig klein sein kann. In $\mathfrak{f}_1 = ah + bk$ $(a_{10} = a,\ a_{01} = b)$ sind der Voraussetzung zufolge a und b nicht beide gleich Null; es sei also etwa $b \gtrless 0$.

Dann lassen sich zwei reelle positive Zahlen h_0 und k_0 in mannigfacher Weise so bestimmen, dass

$$0 < h_0 < \delta, \quad 0 < k_0 < \delta \quad \text{und} \quad \frac{k_0}{h_0} > \left|\frac{a}{b}\right| \quad \text{ist.}$$

Ist t eine complexe Veränderliche, $\eta = e^{\vartheta i}$ $(0 \leqq \vartheta < 2\pi)$ und setzt man:

$$h = h_0 t, \quad k = \eta k_0 t,$$

so convergirt die Reihe $\sum A_{\lambda\mu}\, h_0^\lambda (\eta k_0)^\mu\, t^{\lambda+\mu}$ für alle betrachteten Werthe von η, solange $|t| \leqq 1$ ist und kann in eine Potenzreihe von t verwandelt werden;

$$\sum |A_{\lambda\mu}|\, h_0^\lambda k_0^\mu = M_0$$

ist eine bestimmte positive Zahl.

Bezeichnet man:

$$\mathfrak{f}_\nu(k_0 t, \eta k_0 t) = t^\nu \psi_\nu(\eta), \quad \Phi_m(h_0 t, \eta k_0 t) = t^m \Psi_m(\eta),$$

so ist:

$$\sum A_{\lambda\mu}\, h_0^\lambda (\eta k_0)^\mu\, t^{\lambda+\mu} = \psi_1(\eta)^l\, t^l + \Psi_{l+1}(\eta)\, t^{l+1} + \Psi_{l+2}(\eta)\, t^{l+2} + \cdots;$$

für alle betrachteten Werthe von η ist $\psi_1(\eta)$ von Null verschieden, $|\psi_1(\eta)|$ hat eine von Null verschiedene untere Grenze

$$\mathfrak{m}_0 = -|a|\, h_0 + |b|\, k_0;$$

und es ist

$$|\Psi_{l+\lambda}(\eta)| < M_0 \quad (\lambda = 0, 1, 2 \ldots).$$

Man kann daher setzen:

$$G(h_0 t, \eta k_0 t) = \psi_1(\eta)^l\, t^l \left\{ 1 + \frac{\Psi_{l+1}(\eta)}{\psi_1(\eta)^l}\, t + \frac{\Psi_{l+2}(\eta)}{\psi_1(\eta)^l}\, t^2 + \cdots \right\}$$

und es ist, wenn die positive Zahl ϱ nur kleiner als $\dfrac{\mathfrak{m}_0^l}{M_0 + \mathfrak{m}_0^l}$ gewählt wird, für alle betrachteten Werthe von η:

$$\left| \frac{\Psi_{l+1}(\eta)}{\psi_1(\eta)^l}\, t + \frac{\Psi_{l+2}(\eta)}{\psi_1(\eta)^l}\, t^2 + \cdots \right| < 1,$$

wenn $|t| \leqq \varrho$ ist.

Es convergirt daher, wie bekannt, die Entwickelung

$$\left\{ 1 + \frac{\Psi_{l+1}(\eta)}{\psi_1(\eta)^l}\, t + \frac{\Psi_{l+2}(\eta)}{\psi_1(\eta)^l}\, t^2 + \cdots \right\}^{\frac{1}{l}} = 1 + \frac{\psi_2(\eta)}{\psi_1(\eta)}\, t + \cdots$$

für die eben genannten Werthe von η und t.

Für die Coefficienten von $t, t^2, \ldots$ findet man durch Ausführung der Rechnung die Ausdrücke $\frac{\psi_2(\eta)}{\psi_1(\eta)}, \frac{\psi_3(\eta)}{\psi_1(\eta)}, \ldots$ Dass der Coefficient von t^n, $\frac{\psi_{n+1}(\eta)}{\psi_1(\eta)}$ ist, lässt sich, wie folgt, erkennen.

Macht man die vorstehende Entwickelung unter der Annahme, dass die Potenzreihe $\mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_2 + \mathfrak{f}_3 + \cdots$ für hinreichend kleine $|h|, |k|$ convergirt, so ist der Coefficient von t^n gewiss $\frac{\psi_{n+1}(\eta)}{\psi_1(\eta)}$; diess muss aber offenbar auch der Fall sein, wenn die Convergenz der Reihe $\mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_2 + \mathfrak{f}_3 + \cdots$ nicht bekannt ist, indem ja die $n+1$ ersten Functionen $\mathfrak{f}_1 \ldots \mathfrak{f}_{n+1}$ auf die Convergenz keinen Einfluss haben.

Damit ist bewiesen, dass die Potenzreihe

$$\psi_1(\eta)\, t + \psi_2(\eta)\, t^2 + \cdots$$

für alle betrachteten Werthe von η convergirt, solange $|t| \leqq \varrho$ ist. Lässt man also die Veränderliche t den Kreis vom Radius ϱ um den Nullpunkt durchlaufen, so giebt es für

$$|\psi_1(\eta)\, t + \psi_2(\eta)\, t^2 + \cdots|$$

eine endliche obere Grenze M, so dass für alle betrachteten Werthe von η

$$|\psi_1(\eta)\, \varrho + \psi_2(\eta)\, \varrho^2 + \cdots| \leqq M \quad \text{ist.}$$

Hieraus folgt nach einem bekannten Satze von Cauchy:

$$|\psi_n(\eta)| = \left|\sum_{\nu=0}^{n} a_{n-\nu,\nu}\, h_0^{n-\nu}(\eta k_0)^\nu\right| \leqq \frac{M}{\varrho^n}.$$

Also ist

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n} a_{n-\nu,\nu}\left(\eta \frac{k_0}{h_0}\right)^\nu\right| \leqq \frac{M}{\varrho^n h_0^n},$$

d. h.: der absolute Betrag der ganzen Function n^{ten} Grades

$$a_{0n} z^n + a_{1,n-1} z^{n-1} + \cdots + a_{n,0}$$

ist für alle Werthe von z, deren absoluter Betrag gleich $\frac{k_0}{h_0}$ ist, nicht grösser als $\frac{M}{\varrho^n h_0^n}$.

Nach demselben Satze von Cauchy ist somit:

$$|a_{n-\nu,\nu}| \leqq \frac{M}{\varrho^n h_0^{n-\nu} k_0^\nu} = \frac{M}{(\varrho h_0)^{n-\nu}(\varrho k_0)^\nu},$$

folglich convergirt die Potenzreihe $\sum a_{\alpha\beta} h^\alpha k^\beta$ sicher solange $|h| < \varrho h_0$, $|k| < \varrho k_0$ ist.

Ist $b = 0$, so ist $a \gtrless 0$ und kann dieselbe Betrachtung mit evidenten Modificationen durchgeführt werden. Die Frage, ob die Convergenzbereiche einer Potenzreihe und ihrer l^{ten} Potenz nothwendig identisch sind oder nicht, braucht hier nicht erörtert zu werden.

Ich kehre nun wieder zu dem eigentlichen Thema zurück.

Es mag vielleicht befremden, dass sich für g nicht die anscheinend allgemeinere Form

$$\bar{g} = [\mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_2 + \mathfrak{f}_3 + \cdots]^l\, [1 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots]$$

ergiebt, in welcher die u_ν binäre Formen in h, k von der Dimension ihrer Zeiger sind und die Potenzreihe $1 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ für hinreichend kleine $|h|$, $|k|$ convergirt.

Die Function $\bar{g}$ hat offenbar auch die Eigenschaft, dass beliebig viele Operationen V oder $\bar{V}$ stets Potenzreihen liefern, welche mit der l^{ten} Potenz eines Linearfactors beginnen; es ist aber leicht zu sehen, dass sie nicht allgemeiner ist als g, indem ja die Potenzreihe

$$1 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

stets als die l^{te} Potenz der Entwickelung von

$$[1 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots]^{\frac{1}{l}}$$
$$= 1 + \frac{1}{l} u_1 + \frac{1}{2l^2}\left((1 - l)\, u_1^2 + 2 l u_2\right) + \cdots$$

dargestellt werden kann.

Nachdem diese Einsicht gewonnen ist, lassen sich nunmehr die Fälle genau charakterisiren, in welchen das angegebene Verfahren um zu untersuchen, ob eine gegebene Function $g(h, k)$, deren Entwickelung mit einer semidefiniten Form beginnt, an der Stelle 0, 0 ein Maximum, resp. Minimum hat oder nicht, versagt, und zwar deswegen, weil sich unbeschränkt oft Functionen χ ergeben, welche mit einer semidefiniten Form beginnen.

Wie bereits erwähnt wurde, müssen sich in einem solchen Falle nach einer endlichen Anzahl von Operationen V oder $\overline{V}$ solche Functionen $\overset{(\nu)}{\chi}$ ergeben, welche selbst mit der l^{ten} Potenz eines einzigen Linearfactors beginnen und bei der Fortsetzung des Verfahrens fortwährend Functionen von derselben Beschaffenheit liefern.

Eine solche Function $\overset{(\nu)}{\chi}$ ist aber, wie jetzt behauptet werden kann — eventuell abgesehen vom Vorzeichen — nothwendig *die l^{te} Potenz einer Potenzreihe von zwei Veränderlichen $h^{(\alpha)}$, $k^{(\beta)}$ $(\alpha+\beta=\nu)$, welche mit nicht identisch verschwindenden Gliedern erster Dimension beginnt und für hinreichend kleine $|h^{(\alpha)}|$, $|k^{(\beta)}|$ convergirt;* also von der Form:

$$\overset{(\nu)}{\chi}(h^{(\alpha)}, k^{(\beta)}) = \zeta[c_{10}h^{(\alpha)} + c_{01}k^{(\beta)} + \cdots]^l, \tag{66}$$

wobei ζ entweder gleich $+1$ oder -1 ist, und c_{10} und c_{01} nicht beide zugleich den Werth Null haben.

Nun ist aber unmittelbar zu ersehen, dass $\overset{(\nu)}{\chi}(0, 0)$ weder ein Maximum noch ein Minimum ist, weil die Gleichung

$$0 = c_{10}h^{(\alpha)} + c_{01}k^{(\beta)} + \cdots$$

in jedem noch so kleinen Bereiche $0 < |h^{(\alpha)}| + |k^{(\beta)}| < \delta$ durch reelle Werthepaare $h^{(\alpha)}$, $k^{(\beta)}$ erfüllt wird.

Daraus folgt, dass in diesem Falle auch $g(0, 0)$ weder ein Maximum noch ein Minimum ist.

Das Verfahren versagt also nur in solchen Fällen, in welchen die Entscheidung, ob $g(0, 0)$ ein Maximum, resp. Minimum ist, oder nicht, schon feststeht.

Man wird noch verlangen das Eintreten eines derartigen Falles an der zu untersuchenden Function $g(h, k)$ selbst beurtheilen zu können.

Dazu ist die Frage zu beantworten:

Wie muss die Function $g(h, k)$ beschaffen sein, damit aus ihr durch eine endliche Anzahl von Operationen V, $\overline{V}$ eine Function $\overset{(\nu)}{\chi}$ von der Form (66) entspringt.

Zur Beantwortung derselben führt folgende Betrachtung, welche sich auf das Theorem stützt, das Weierstrass als „Vorbereitungs-

satz" in der bereits citirten Abhandlung „Einige auf die analytischen Functionen mehrerer Veränderlichen sich beziehende Sätze" bewiesen hat.

Zur Vereinfachung der Darstellung werden statt der mehrfach accentuirten Veränderlichen $h^{(\alpha)}$, $k^{(\beta)}$ wieder die Buchstaben h, k benutzt und für $\overset{(\nu)}{\chi}$ wieder χ geschrieben.

Es sei:

(67) $$\chi(h, k) = (\mathfrak{a}\, h + \mathfrak{b} k)^{\varkappa}\, (h, k)_{m-\varkappa} + (h, k)_{m+1} + \cdots.$$

Die Glieder der m^{ten} Dimension, mit welchen die Entwickelung beginnt, sollen den Linearfactor $\mathfrak{a}h + \mathfrak{b}k$ genau $\varkappa$ mal enthalten, so dass $(\mathfrak{b}, -\mathfrak{a})_{m-\varkappa} \gtrless 0$ ist; $(\varkappa > 0)$. $\chi(h, k)$ soll keine Potenz von h oder k als Factor enthalten, die Entwickelung von $\chi(0, k)$ soll mit dem Gliede der q^{ten} Ordnung beginnen; offenbar ist $q \geqq m \geqq \varkappa$.

Die Gleichung $\chi(h, k) = 0$ hat dann genau q mit h zugleich unendlich klein werdende Wurzeln $k_1, k_2, \ldots k_q$ (jede so oft gezählt, als die zugehörige Ordnungszahl anzeigt); dieselben sind die Wurzeln einer algebraischen Gleichung q^{ten} Grades:

(68) $$f(h, k) = k^q + f_1(h)\, k^{q-1} + f_2(h)\, k^{q-2} + \cdots + f_q(h) = 0,$$

deren Coefficienten $f_1(h)$, $f_2(h)$, $\ldots$ $f_q(h)$ gewöhnliche mit h zugleich verschwindende Potenzreihen sind.*)

Nach dem Weierstrass'schen Theoreme besteht eine Darstellung der Function $\chi(h, k)$ von der Form

(69) $$\chi(h, k) = f(h, k)\; \mathfrak{f}(h, k),$$

in welcher $\mathfrak{f}(h, k)$ eine gewöhnliche Potenzreihe von h, k ist, die aber *nicht* mit h und k zugleich verschwindet.

Unter der Voraussetzung $\mathfrak{b} \gtrless 0$ ergiebt sich durch die Substitution:

(70) $$k = -\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}\, h + hk'$$

und Absonderung des Factors h^m:

(71) $$V\chi = k'^{\varkappa}(1, -\mathfrak{c} + k')_{m-\varkappa} + h[h, k'] = \chi_1(h, k'),$$

wobei $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} = \mathfrak{c}$ gesetzt ist, und $[h, k']$ eine gewöhnliche Potenzreihe in h, k' bezeichnet.

Zwischen χ und χ_1 besteht die Relation:

(72) $$\chi(h, -\mathfrak{c}h + hk') = h^m\; \chi_1(h, k').$$

Die Gleichung $\chi_1(h, k') = 0$ hat genau $\varkappa$ mit h zugleich unendlich klein werdende Wurzeln $k_1', k_2', \ldots k_\varkappa'$; dieselben sind die Wurzeln einer algebraischen Gleichung $\varkappa^{\text{ten}}$ Grades:

---

*) Von diesen Potenzreihen sowie von den später auftretenden Potenzreihen $\mathfrak{f}(h, k)$, $\varphi_1(h)$, $\varphi_2(h)$, $\ldots$ $\varphi_\varkappa(h)$, $\Omega(h, k')$, $\ldots$ ist aus der Weierstrass'schen Untersuchung bekannt, dass sie für hinreichend kleine absolute Beträge ihrer Veränderlichen convergiren.

(73) $\varphi(h, k') = k'^{\varkappa} + \varphi_1(h)\, k'^{\varkappa-1} + \varphi_2(h)\, k'^{\varkappa-2} + \cdots + \varphi_\varkappa(h) = 0$, deren Coefficienten $\varphi_1(h)$, $\varphi_2(h)$, ... $\varphi_\varkappa(h)$ mit h zugleich verschwindende gewöhnliche Potenzreihen sind.

Nun ist wichtig zu bemerken:

Nach (70) und (72) entspricht jeder mit h zugleich unendlich klein werdenden Wurzel k' der Gleichung $\chi_1 = 0$ eine mit h zugleich unendlich klein werdende Wurzel k der Gleichung $\chi = 0$ — aber nicht nothwendig umgekehrt.

Entsprechen in diesem Sinne den Wurzeln $k_1', k_2', \ldots k_\varkappa'$ beziehungsweise die Wurzeln $k_1, k_2, \ldots k_\varkappa$, so ist das Product:

$$(k - k_1)(k - k_2) \ldots (k - k_\varkappa)$$
$$= (k + \mathfrak{c}h - hk_1')(k + \mathfrak{c}h - hk_2') \ldots (k + \mathfrak{c}h - hk_\varkappa')$$
$$= k^\varkappa + h\left[\binom{\varkappa}{1}\mathfrak{c} + \varphi_1(h)\right]k^{\varkappa-1}$$
$$+ h^2\left[\binom{\varkappa}{2}\mathfrak{c}^2 + \binom{\varkappa-1}{1}\mathfrak{c}\varphi_1(h) + \varphi_2(h)\right]k^{\varkappa-2}$$
$$+ \cdots + h^\varkappa[\mathfrak{c}^\varkappa + \mathfrak{c}^{\varkappa-1}\varphi_1(h) + \mathfrak{c}^{\varkappa-2}\varphi_2(h) + \cdots + \varphi_\varkappa(h)],$$

welches mit

$$e(h, k) = k^\varkappa + e_1(h)\, k^{\varkappa-1} + e_2(h)\, k^{\varkappa-2} + \cdots + e_\varkappa(h)$$

bezeichnet sein mag, (eine ganze Function $\varkappa^{\text{ten}}$ Grades in k, deren Coefficienten mit h zugleich verschwindende gewöhnliche Potenzreihen sind) ein Factor von $f(h, k)$ und daher nach (69) auch Factor von $\chi(h, k)$. Der Quotient $\frac{f(h, k)}{e(h, k)}$ ist eine ganze Function $q - \varkappa^{\text{ten}}$ Grades von k, deren Coefficienten mit h zugleich verschwindende gewöhnliche Potenzreihen sind. Diese Coefficienten sind nämlich rational aus den Potenzreihen $f_1(h), f_2(h), \ldots f_q(h)$; $e_1(h), e_2(h), \ldots e_\varkappa(h)$ zusammengesetzt, lassen sich daher nach ganzen Potenzen von h entwickeln, wobei aber negative Potenzen nicht auftreten können und auch keine constanten Anfangsglieder, weil die Coefficienten ja symmetrische Functionen der mit h zugleich unendlich klein werdenden Wurzeln $k_{\varkappa+1}, k_{\varkappa+2}, \ldots k_q$ sind. Ist $\mathfrak{c}$ reell, so entspricht jeder reellen Wurzel k_ι' $(\iota = 1, 2, \ldots \varkappa)$ eine reelle Wurzel k_ι; kommen unter den Wurzeln $k_1', k_2', \ldots k_\varkappa'$ Gruppen von gleichen vor, so zerfallen die entsprechenden Wurzeln $k_1, k_2, \ldots k_\varkappa$ in ebensoviele Gruppen von je ebensovielen gleichen Wurzeln.

Von dem letzteren Umstande kann man sich auf folgende Weise auch noch direct überzeugen.

Sind $k_1', k_2', \ldots k_\nu'$ die von einander verschiedenen Wurzeln der Gleichung $\chi_1 = 0$, solange der Veränderlichen h nicht specielle Zahlenwerthe ertheilt werden, $n_1, n_2, \ldots n_\nu$ ihre Ordnungszahlen, so ist

$$\varphi(h, k') = (k' - k_1')^{n_1}(k' - k_2')^{n_2} \ldots (k' - k_\nu')^{n_\nu}.$$

Der gemeinsame Theiler höchsten Grades der Functionen $\varphi(h, k')$ und $\frac{\partial}{\partial k'}\varphi(h, k')$ ist:

$$\vartheta(h, k') = (k' - k_1')^{n_1-1}(k' - k_2')^{n_2-1} \dots (k' - k_v')^{n_v-1}.$$

Nun ist:

$$\frac{\varphi(h, k')}{\vartheta(h, k')} = (k' - k_1')(k' - k_2') \dots (k' - k_v') = \psi(h, k')$$

eine ganze Function v^{ten} Grades, deren Coefficienten mit h zugleich verschwindende gewöhnliche Potenzreihen sind. (Begründung wie für die Coefficienten von $\frac{f(h, k)}{e(h, k)}$).

Die Gleichung $\psi(h, k') = 0$ enthält jede Wurzel von $\varphi(h, k') = 0$, aber jede nur einmal und es ist

$$\varphi(h, k') = \psi(h, k')\,\vartheta(h, k').$$

Jeder der v verschiedenen Wurzeln $k_1', \dots k_v'$ entspricht nun eine Wurzel der Gleichung $f(h, k) = 0$; $f(h, k)$ muss daher den Factor

$$j(h, k) = (k + \mathfrak{c}h - hk_1') \dots (k + \mathfrak{c}h - hk_v')$$

enthalten, der eine ganze Function v^{ten} Grades in k ist, deren Coefficienten mit h zugleich verschwindende gewöhnliche Potenzreihen sind.

Man kann also setzen:

$$f(h, k) = j(h, k)\,\bar{f}(h, k),$$

wobei auch $\bar{f}(h, k)$ eine ganze Function in k ist, vom Grade $q - v$, deren Coefficienten mit h zugleich verschwindende gewöhnliche Potenzreihen sind.

Aus

$$\chi(h, k) = j(h, k)\,\bar{f}(h, k)\,\mathfrak{f}(h, k)$$

entspringt durch die Substitution (70) und Absonderung des Factors h^m die Function $\chi_1(h, k')$, welche dargestellt werden kann in der Form:

$$\chi_1(h, k') = \varphi(h, k')\,\Omega(h, k') = \psi(h, k')\,\vartheta(h, k')\,\Omega(h, k'),$$

wobei $\Omega(h, k')$ eine gewöhnliche Potenzreihe ist, welche aber *nicht* mit h und k' zugleich verschwindet. Nun ist aber:

$$j(h, -\mathfrak{c}h + hk') = h^v\psi(h, k');$$

folglich entspringt aus $\bar{f}(h, k)\,\mathfrak{f}(h, k)$ durch die Substitution (70) und Absonderung des Factors h^{m-v} die Function $\vartheta(h, k')\,\Omega(h, k')$ und lässt sich daher für die Functionen $\bar{f}(h, k)$ und $\vartheta(h, k')$ dieselbe Betrachtung wiederholen, die soeben bezüglich $f(h, k)$ und $\varphi(h, k')$ durchgeführt wurde — wenn die Zahlen $n_1, n_2, \dots n_v$ nicht sämmtlich gleich 1 sind.

Sind etwa $k_1', k_2', \dots k_{v_1}'$ die sämmtlichen von einander verschiedenen Wurzeln der Gleichung $\vartheta(h, k') = 0$ oder mit anderen Worten, sind die Zahlen $n_1, n_2, \dots n_{v_1}$ sämmtlich grösser als 1, dagegen $n_{v_1+1}, \dots n_v$ sämmtlich gleich 1, (specielle Werthe von h aus-

genommen), so entsprechen den Wurzeln $k_1', k_2', \dots k_{\nu_1}'$ ebensoviele von einander verschiedene Wurzeln $k_1, k_2, \dots k_{\nu_1}$ der Gleichung $\bar{f}(h,k) = 0$.

Es entspricht daher jeder zweifachen Wurzel der Gleichung $\varphi(h,k') = 0$ eine mindestens auch zweifache Wurzel der Gleichung $f(h,k) = 0$, u. s. w.

Man kann also behaupten:

Enthält $V\chi = \chi_1(h,k')$ die l^{te} Potenz einer Potenzreihe $\mathsf{T}(h,k')$, und hat die Gleichung $\mathsf{T}(h,k') = 0$ reelle mit h zugleich unendlich klein werdende Wurzeln k', so enthält auch $\chi(h,k)$ die l^{te} Potenz einer Potenzreihe $T(h,k)$, und hat die Gleichung $T(h,k) = 0$ reelle mit h zugleich unendlich klein werdende Wurzeln k.

Beginnt nämlich die Entwickelung von $\mathsf{T}(0,k')$ mit der $\mathfrak{q}^{\text{ten}}$ Potenz von k', so hat die Gleichung $\mathsf{T}(h,k') = 0$ genau $\mathfrak{q}$ mit h zugleich unendlich klein werdende Wurzeln $\overset{1}{k}{}', \overset{2}{k}{}', \dots \overset{\mathfrak{q}}{k}{}'$, welche selbst Wurzeln einer algebraischen Gleichung $\mathfrak{q}^{\text{ten}}$ Grades

$$\tau(h,k') = k'^{\mathfrak{q}} + \tau_1(h)\,k'^{\mathfrak{q}-1} + \cdots + \tau_{\mathfrak{q}}(h) = 0$$

sind, deren Coefficienten $\tau_1(h), \dots \tau_{\mathfrak{q}}(h)$ mit h zugleich verschwindende gewöhnliche Potenzreihen sind.

Die Function $\varphi(h,k')$ enthält daher den Factor $\tau(h,k')^l$, und ist von der Form:

$$\varphi(h,k') = \tau(h,k')^l\,\sigma(h,k'),$$

wobei $\sigma(h,k')$ eine ganze Function in k' vom Grade $\varkappa - l\mathfrak{q}$ ist, deren Coefficienten mit h zugleich verschwindende gewöhnliche Potenzreihen sind, wenn $\varkappa - l\mathfrak{q} > 0$ ist.

Die Function $f(h,k)$, und damit auch $\chi(h,k)$, enthält also nach Früherem den Factor $t(h,k)^l$, wenn

$$(k + \mathfrak{c}h - h\overset{1}{k}{}')\,(k + \mathfrak{c}h - h\overset{2}{k}{}') \dots (k + \mathfrak{c}h - h\overset{\mathfrak{q}}{k}{}') =$$
$$t(h,k) = k^{\mathfrak{q}} + t_1(h)\,k^{\mathfrak{q}-1} + t_2(h)\,k^{\mathfrak{q}-2} + \cdots + t_{\mathfrak{q}}(h)$$

gesetzt wird.

Die Coefficienten $t_1(h), t_2(h), \dots t_{\mathfrak{q}}(h)$ sind mit h zugleich verschwindende gewöhnliche Potenzreihen. Die Gleichung $t(h,k) = 0$ hat ebensoviele mit h zugleich unendlich klein werdende reelle Wurzeln k als die Gleichung $\tau(h,k') = 0$ solche Wurzeln k' enthält, denn im betrachteten Falle sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ reelle Zahlen.

Setzt man, unter $\mathfrak{t}(h,k)$ eine Potenzreihe verstehend, welche nicht mit h und k zugleich verschwindet und für hinreichend kleine $|h|, |k|$ convergirt, $T(h,k) = t(h,k)\,\mathfrak{t}(h,k)$, so ist auch $\dfrac{\chi(h,k)}{T(h,k)^l}$ eine nach ganzen positiven Potenzen von h und k entwickelbare Function; man kann also auch sagen, dass $\chi(h,k)$ den Factor $T(h,k)^l$ enthält.

Ist $\mathfrak{a} \gtrless 0$, so gilt Analoges für eine Function $\overline{V}\chi = \bar{\chi}_1(h', k)$, welche aus $\chi(h, k)$ durch die Substitution $h = -\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} k + h'k$ und Absonderung des Factors k^m hervorgeht.

Damit kann nun die auf Seite 126 gestellte Frage so beantwortet werden:

Entspringt $\overset{(\nu)}{\chi}(h^{(\alpha)}, k^{(\beta)})$ durch eine Operation V aus einer Function $\overset{(\nu-1)}{\chi}(h^{(\alpha)}, k^{(\beta-1)})$, so muss diese die l^{te} Potenz einer Potenzreihe $\overset{(\nu-1)}{\mathfrak{P}}(h^{(\alpha)}, k^{(\beta-1)})$ enthalten, welche in jedem noch so kleinen Bereiche $0 < |h^{(\alpha)}| + |k^{(\beta-1)}| < \delta$ für reelle Werthepaare $h^{(\alpha)}, k^{(\beta-1)}$ verschwindet; entspringt $\overset{(\nu)}{\chi}(h^{(\alpha)}, k^{(\beta)})$ durch eine Operation $\overline{V}$ aus einer Function $\overset{(\nu-1)}{\chi}(h^{(\alpha-1)}, k^{(\beta)})$, so muss diese ebenso die l^{te} Potenz einer Potenzreihe $\overset{(\nu-1)}{\mathfrak{Q}}(h^{(\alpha-1)}, k^{(\beta)})$ enthalten, welche in jedem noch so kleinen Bereiche $0 < |h^{(\alpha-1)}| + |k^{(\beta)}| < \delta$ für reelle Werthepaare $h^{(\alpha-1)}, k^{(\beta)}$ verschwindet.

Dieser Schluss kann nun offenbar solange fortgesetzt werden, bis man bei der vorgelegten Function $g(h, k)$ selbst angelangt ist.

Das Resultat dieser Betrachtung ist daher:

Wenn das Verfahren, welches entwickelt wurde um zu untersuchen, ob eine mit einer semidefiniten Form beginnende Potenzreihe $g(h, k)$ an der Stelle $h = 0$, $k = 0$ ein Maximum, resp. Minimum, habe, oder nicht, versagt, so enthält die Function $g(h, k)$ eine gerade Potenz einer Potenzreihe $\mathfrak{P}(h, k)$), welche in jedem noch so kleinen Bereiche $0 < |h| + |k| < \delta$ für reelle Werthepaare h, k verschwindet; dann ist aber $g(0, 0)$ gewiss weder ein Maximum noch ein Minimum.*

Die Schwierigkeit besteht also nur darin zu constatiren, dass das Verfahren versagt; ist diess gelungen, so ist damit auch schon entschieden, dass $g(0, 0)$ weder ein Maximum noch ein Minimum ist.

Ich muss mich vorläufig damit begnügen, die Untersuchung so weit geführt zu haben.

Graz, am 29. Februar 1892.

---

*) Ist $\mathfrak{R}(h, k)$ eine Potenzreihe, welche für hinreichend kleine $|h|, |k|$ convergirt und nicht mit h und k zugleich verschwindet, so enthält $g(h, k)$ auch dieselbe Potenz der Potenzreihe $\overline{\mathfrak{P}}(h, k) = \mathfrak{P}(h, k)\, \mathfrak{R}(h, k)$.

Ueber einen Satz von Hilbert.

Von

P. Gordan in Erlangen.

Vorrede.

Das System einer Form:

$$f = \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=\varrho} \alpha_\varrho x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots$$

besteht aus Invarianten:

$$\varphi_1, \ \varphi_2, \ \dots$$

aus welchen sich die übrigen ganz und rational darstellen lassen

Herr Hilbert hat im Bd. 36 der Math. Annalen gezeigt, dass es für jede Form f Systeme giebt, welche eine *endliche* Anzahl von Invarianten umfassen.

Seine Untersuchung zerfällt in 2 Theile.

Im ersten Theile wird für die Invarianten Φ von f eine Formel aufgestellt:

$$(1) \qquad \Phi = A_1 \varphi_1 + A_2 \varphi_2, \ \dots$$

in welcher die A ganze rationale Functionen der Coefficienten $a_\varkappa$ bedeuten, und im 2ten Theile wird hieraus eine Formel:

$$(2) \qquad \Phi = B_1 \varphi_1 + B_2 \varphi_2 \ \dots$$

abgeleitet, in welcher die B Invarianten von f sind.

Aus F. (2) folgt unmittelbar, dass die Invarianten φ das System von f bilden.

Der wesentlichste Theil seiner Untersuchung beruht meines Erachtens in F. (1); ich will sie deshalb den Hilbert'schen Satz nennen. Der Beweis, welchen Herr Hilbert gegeben hat, ist materiell ganz richtig; jedoch empfand ich in seinen Ausführungen insofern eine Lücke, als er sich damit begnügte die Existenz der φ nachzuweisen und darauf verzichtete, ihre Eigenschaften zu erörtern.

Um diese Lücke auszufüllen, gebe ich im Folgenden einen etwas andern Beweis, von dem ich ausdrücklich bemerke, dass er mir nicht

gelungen wäre, wenn nicht Herr Hilbert einige Begriffe in der Invariantentheorie verwerthet hätte, welche von den Herren Dedekind, Kronecker und Weber in andern Theilen der Algebra entwickelt worden sind.

Mein Beweis besteht darin, dass ich Normalformen für die Invarianten aufstelle, deren Charaktere:

$$h_1,\ h_2\ \ldots\ h_m$$

ganze positive Zahlen (0 inbegriffen) sind, welche folgende Eigenschaften besitzen:

1. $m \leqq \varrho$.

2. Zwei verschiedene Normalformen können nicht in den Charakteren:

$$h_1,\ h_2\ \ldots\ h_{m-1}$$

übereinstimmen.

3. Hat eine Normalform ϑ_ν die Charaktere:

$$\varkappa_1,\ \varkappa_2\ \ldots\ \varkappa_{m+1},$$

so giebt es eine andere Normalform ϑ_μ, deren Charaktere:

$$h_1,\ h_2\ \ldots\ h_m$$

die Relationen befriedigen:

$$h_1 = \varkappa_1,\quad h_2 = \varkappa_2\ \ldots\ h_{m-1} = \varkappa_{m-1},$$
$$\varkappa_m < h_m \leqq \varkappa_m + \varkappa_{m+1}.$$

Diese Eigenschaften genügen, um eine obere Grenze für die Anzahl v_ϱ der Normalformen ϑ_ν festzustellen.

Berechnet man nämlich aus ihren Graden:

$$p_1,\ p_2$$

mittelst der Formeln

$$p_{\nu 1} = p_1;\quad p_{\varrho\nu} = p_\nu;\quad u_1 = p_1,$$

$$p_{\nu,s} = p_{\nu-1,t} \quad \text{wo} \quad t = s + \sum_{\nu=1}^{\nu=s-1} p_{\nu,\varkappa},$$

$$u_\nu = 1 + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=u_{\nu-1}} p_{\varrho-\nu+1,\varkappa}$$

Zahlen $p_{\nu,s}$ und u, so ist:

$$u_\varrho = v_\varrho.$$

Aus denjenigen Invarianten φ_ν, welche Normalformen besitzen, lassen sich die übrigen mittelst der ersten Hilbert'schen Formel darstellen; diese φ_ν bilden also das System von f. Ihre Anzahl ist gleich der Anzahl v_ϱ der Normalformen.

§ 1.

Der Aronhold'sche Process.

Um die Invarianten φ einer Form:

$$f = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=\varrho} a_\varkappa x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots$$

mit beliebig vielen Variabeln zu untersuchen, ist es häufig vortheilhaft, sofort die simultanen Invarianten ψ einer beliebigen Anzahl solcher Formen gleichen Grades:

$$f, f_1, f_2 \dots$$

in Betracht zu ziehen. Wir wollen annehmen, dass die Coefficienten dieser Formen willkürlich (variabel) sind; die Anzahl der Coefficienten in f will ich durch ϱ und die Coefficienten einer beliebigen der weiteren Formen etwa f_m, deren Anzahl selbstverständlich gleichfalls ϱ ist, durch b bezeichnen.

Einer der wichtigsten Processe in der Theorie der Invarianten ist der Aronhold'sche Process; durch ihn sind wir im Stande aus einer simultanen Invariante ψ eine Reihe weiterer solcher Invarianten zu bilden. Ich will jedoch hier diesen Process nicht in seiner vollen Allgemeinheit verwerthen, sondern mich auf solche Anwendungen beschränken, welche in der Formel enthalten sind:

$$\delta_m \psi = \frac{1}{h} \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=\varrho} \frac{\partial \psi}{\partial u_\varrho} b_\varrho,$$

wo h den Grad von ψ in den Coefficienten von f bedeutet.

Man sieht, dass man durch den Aronhold'schen Process aus der simultanen Invariante ψ eine weitere $\delta_m \psi$ erzeugt hat, welche um einen Grad niedriger in den Coefficienten von f ist. Durch Wiederholung des Processes δ_m kann man weitere simultane Invarianten ableiten, die ich durch:

$$\delta_m^2;\ \delta_m^3 \dots$$

bezeichnen will; sie haben immer niedrigere Grade in den Coefficienten von f. Jedenfalls ist:

$$\delta_m^h \psi$$

von den Coefficienten von f unabhängig und:

$$\delta_m^{h+1} \psi = 0.$$

Enthält die Invariante ψ die Coefficienten b von f_m nicht, so ist:

$$\delta_m^h \psi \gtrless 0;$$

anderen Falles ist es möglich, dass schon für niedrigere Exponenten

$$\varkappa < h + 1,$$

$$\delta_m^\varkappa \psi = 0$$

ist.

Man kann aber auch die andern $f_\varkappa$ beim Aronhold'schen Processe benutzen. Die Form, welche ich aus ψ erhalte, wenn ich zuerst h_1 Male die Operation δ_1, sodann h_2 Male die Operation δ_2, schliesslich h_m Male die Operation δ_m anwende, will ich durch:

$$U = \delta_m^{h_m} \delta_{m-1}^{h_{m-1}} \ldots \delta_1^{h_1} \psi$$

bezeichnen. Ist dann:

$$h_1 + h_2 \ldots h_m = h,$$

so ist U von den Coefficienten von f unabhängig und ist:

$$h_1 + h_2 \ldots h_m > h,$$

so verschwindet U. —

§ 2.

Die Charaktere.

Wie schon in § 1 bemerkt wurde, kann es bei besonderer Wahl der Invariante ψ vorkommen, dass man ein verschwindendes Resultat erhält, wenn man den Aronhold'schen Process auch weniger oft als $h + 1$ mal anwendet, wenn also:

$$h_1 + h_2 \ldots h_m < h + 1$$

ist. Diese Bemerkung liefert uns ein wichtiges Eintheilungsprincip für die simultanen Invarianten ψ.

Genügt ψ den Formeln

$$\delta_1^{h_1+1} \psi = 0; \quad \delta_2^{h_1+1} \delta_1^{h_1} \psi = 0 \ldots \delta_m^{h_m+1} \delta_{m-1}^{h_{m-1}} \ldots \delta_1^{h_1} \psi = 0;$$

$$\delta_1^{h_1} \psi \gtrless 0; \quad \delta_2^{h_2} \delta_1^{h_1} \psi \gtrless 0 \ldots \delta_m^{h_m} \delta_{m-1}^{h_{m-1}} \ldots \delta_1^{h_1} \psi \gtrless 0;$$

und ist:

$$h_1 + h_2 \ldots h_m = h;$$

$$h_m > 0,$$

so nenne ich $h_1 \ldots h_m$ die Charaktere von ψ.

Von denselben kann man leicht nachweisen, dass ihre Anzahl

$$m \leqq \varrho$$

ist, dass also, wenn ψ die Charaktere besitzt:

$$h_1, h_2 \ldots h_\varrho$$

bereits die Summe:

$$h_1 + h_2 \ldots h_\varrho = h$$

ist, also keine weiteren Charaktere hinzutreten können. Es folgt diess daraus, dass in diesem Falle die Invariante:

$$\psi = \delta_\varrho^{h_\varrho} \delta_{\varrho-1}^{h_{\varrho-1}} \ldots \delta_1^{h_1} \psi$$

den Relationen genügt:

$$\delta_1 \Psi = \delta_2 \Psi \ldots \delta_\varrho \Psi = 0,$$

welche zeigen, dass Ψ die Coefficienten von f nicht enthält. Man kann die Charaktere dazu benutzen, um die simultanen Invarianten ψ in Classen einzutheilen. Hat ψ keine Charaktere:

$$h_{m+1},\ h_{m+2},\ \ldots,$$

so rechne ich sie in die m^{te} Classe. Bei dieser Eintheilung enthält jede höhere Classe die simultanen Invarianten aller niedrigeren Classen ebenfalls und die ϱ^{te} Classe *alle diese Formen* überhaupt.

§ 3.

Reduction der simultanen Invarianten.

Haben die simultanen Invarianten ψ und ϑ die Charaktere:

$$h_1,\ h_2 \ldots h_m,$$
$$\varkappa_1,\ \varkappa_2 \ldots$$

und ist die erste nicht verschwindende Zahl unter den Differenzen:

$$h_1 - \varkappa_1,\ h_2 - \varkappa_2 \ldots$$

positiv, so sage ich: ψ besitzt höhere Charaktere als ϑ. Dieser Fall wird stets dann und nur dann eintreten, wenn

$$\delta_m^{h_m} \delta_{m-1}^{h_{m-1}} \ldots \delta_1^{h_1} \psi = 0$$

ist.

Es kann dann vorkommen, dass ein Aggregat:

$$\chi = A\psi + B\vartheta,$$

worin A und B simultane Invarianten der f sind, ebenfalls niedrigere Charaktere als ψ besitzt. Enthält dann insbesondere A die Coefficienten von f nicht, so nenne ich diese Formel eine Reduction von ψ mittelst ϑ. Die reducirte Form χ hat dann in den Coefficienten von f denselben Grad, wie ψ.

So lässt sich z. B. jede der Invarianten φ_ν vom Grade p_ν mittelst jeder andern φ_μ, deren Grad $p_\mu \leqq p_\nu$ ist, reduziren; beide besitzen nur je 1 Charakter $p_\nu + 1$ und $p_\mu + 1$. Das Aggregat:

$$\chi = \varphi_\nu \delta_1^{p_\mu} \varphi_\mu - \varphi_\mu \delta_1^{p_\mu} \varphi_\nu$$

genügt der Relation:

$$\delta_1^{p_\mu} \chi = 0,$$

hat daher niedrigere Charaktere als φ_ν und kann als eine reducirte Form von φ_ν angesehen werden. Reducirte Formen χ lassen sich im Allgemeinen weiter reduciren; man kann zur ferneren Reduction alle Formen φ von nicht höheren als dem von φ_ν, sowie Aggregate derselben benutzen.

Durch solche Reductionen erhält man von φ_ν ausgehend eine Reihe von Formen:

$$\chi_1, \chi_2, \ldots$$

von denen eine jede niedrigere Charaktere besitzt als die vorhergehenden und welche sämmtlich den Grad p_ν in den Coefficienten von f besitzen. Alle diese Formen sind zu φ_ν gehörige Aggregate:

$$\vartheta = A_1\varphi_1 + A_2\varphi_2 \ldots A_\nu\varphi_\nu.$$

ϑ sowohl selbst als auch die Coefficienten A sind simultane Invarianten der f; insbesondere enthält $A_\nu \gtrless 0$ die Coefficienten von f nicht.

Wenn auch, wie oben erwähnt, jedes folgende χ bei diesem Verfahren niedrigere Charaktere besitzt, als das vorhergehende, so liegt doch kein Grund vor, dass wir hierdurch zu solchen Aggregaten ϑ gelangen, welche möglichst niedrige Charaktere besitzen. Diess liegt keineswegs in unserer Absicht; wir begnügen uns vielmehr damit, gewisse Reductionen auszuführen.

§ 4.

Bildung der Normalformen.

Die Invarianten von f

$$\varphi_1; \varphi_2$$

mögen nach ihren Graden p_ν so geordnet werden, dass stets:

$$p_{\nu+1} \geqq p_\nu$$

ist.

Unter den zu ihnen gehörigen Aggregaten ϑ, welche im § 3 definirt sind, will ich gewisse auswählen, welche ich durch:

$$\vartheta_1, \vartheta_2$$

bezeichne und die Normalformen von:

$$\varphi_1, \varphi_2 \ldots$$

nenne. Zu φ_1 möge diese Invariante selbst als Normalform gehören, also:

$$\varphi_1 = \vartheta_1$$

sein.

Die übrigen werden durch ein sogleich näher zu erläuterndes Reductionsverfahren hergestellt. Hierbei sollen die Normalformen der Reihe nach gebildet werden und bei Berechnung von ϑ_ν die früheren:

$$\vartheta_1,\ \vartheta_2\ \dots\ \vartheta_{\nu-1}$$

benutzt werden.

Unser Verfahren besteht in einer Reihe von Reductionen; von einer Invariante φ_ν ausgehend liefern dieselben eine Reihe simultaner Invarianten:

$$\eta_1,\ \eta_2\ \dots$$

der Art, dass η_λ stets höhere Charaktere besitzt als $\eta_{\lambda+1}$. Hat η_λ die Charaktere

$$\varkappa_1,\ \varkappa_2,\ \dots,$$

so untersuche ich die Charaktere der Normalformen:

$$\vartheta_1,\ \vartheta_2\ \dots\ \vartheta_{\nu-1}$$

der Reihe nach so lange, bis ich auf eine Form ϑ_μ stosse, deren Charaktere:

$$h_1,\ h_2\ \dots\ h_m$$

den Relationen genügen:

$$h_1 = \varkappa_1;\quad h_2 = \varkappa_2\ \dots\ h_{m-1} = \varkappa_{m-1};\quad h_m \leqq \varkappa_m.$$

Eine solche Form möge Reducent heissen und in folgender Weise zur Reduction von η_λ also zur Bestimmung von $\eta_{\lambda+1}$ Verwendung finden.

Zunächst bilde ich die beiden nicht verschwindenden Formen:

$$\delta_{m-1}^{h_{m-1}}\delta_{m-2}^{h_{m-2}}\ \dots\ \delta_1^{h_1}\vartheta_\mu = \Theta,$$

$$\delta_{m-1}^{h_{m-1}}\delta_{m-2}^{m-2}\ \dots\ \delta_1^{h_1}\eta_\lambda = \mathsf{H}.$$

Die erstere derselben Θ genügt der Formel:

$$\delta_m^{h_m+1}\Theta = 0,$$

welche zeigt, dass der Ausdruck:

$$P = \delta_m^{h_m}\Theta \gtrless 0$$

nicht von den Coefficienten von f abhängt. Es besteht dann die Formel:

$$\delta_m^{h_m}\left(P\mathsf{H} - \Theta\delta_m^{h_m}\mathsf{H}\right) = 0$$

und ich wähle als $\eta_{\lambda+1}$ das Aggregat:

$$\eta_{\lambda+1} = P\eta - \vartheta_\mu\delta_m^{h_m}\mathsf{H},$$

welches der Formel genügt:

$$\delta_m^{h_m}\delta_{m-1}^{h_{m-1}}\ \dots\ \delta_\lambda^{h_1}\eta_{\lambda+1} = 0,$$

also in der That niedrigere Charaktere besitzt als η_λ. —

Es kann auch bei gewissen φ der Fall eintreten, dass die Reihe der η mit einer verschwindenden Form schliesst; es hat dann η keine Normalform und wird aus der obigen Reihe ausgeschaltet. In der

Reihe der φ bleiben dann nur diejenigen Invarianten stehen, welche Normalformen besitzen.

Mit dem oben bezeichneten Reductionsverfahren schreite ich fort, bis ich zu einer simultanen Invariante η_λ gelange, zu welchem in der Reihe der Normalformen:

$$\vartheta_1, \vartheta_2 \ldots \vartheta_{\nu-1}$$

kein Reducent vorhanden ist. Ich suche dann in dieser Reihe diejenigen ϑ aus, deren Charaktere:

$$h_1, h_2 \ldots h_m$$

die Relationen befriedigen:

$$h_1 = \varkappa_1;\ h_2 = \varkappa_2 \ldots h_{m-1} = \varkappa_{m-1};\quad h_m > \varkappa_m.$$

Ist ϑ_μ die letzte obiger Normalformen, welche diese Eigenschaft besitzt, so ersetze ich, um ϑ_ν zu erhalten, in η_λ die Coefficienten von:

$$f_{m+1}, f_{m+2} \ldots$$

durch willkürliche Grössen. —

§ 5.

Eigenschaften der Normalformen.

Das eben geschilderte Recursionsverfahren zur Herstellung von Normalformen setzt uns in den Stand, folgende beiden Eigenschaften der Normalformen ϑ_ν abzuleiten.

1) Zwei verschiedene Normalformen haben weder dieselben Charaktere, noch stimmen sie in allen ihren Charakteren ausser dem letzten überein.

2) Hat eine Form ϑ_ν die Charaktere:

$$\varkappa_1, \varkappa_2 \ldots \varkappa_{m+1},$$

so giebt es eine andere Normalform ϑ_μ, deren Charaktere:

$$h_1, h_2 \ldots h_m$$

mit den ersteren durch die Relationen verbunden sind:

$$\varkappa_1 = h_1;\quad \varkappa_2 = h_2 \ldots \varkappa_{m-1} = h_{m-1},$$
$$\varkappa_m < h_m \leqq \varkappa_m + \varkappa_{m+1}.$$

Stehen die Normalformen ϑ_μ und ϑ_ν in dieser Beziehung, so nenne ich ϑ_ν eine Ableitung von ϑ_μ.

Gehört ϑ_μ der m^{ten} Classe an, so gehören ihre Ableitungen der $(m+1)^{\text{ten}}$ Classe an.

Die Grade der Normalformen:

$$\vartheta_1, \vartheta_2 \ldots \vartheta_\nu$$

bezeichne ich der Reihe nach durch:

$$p_1, p_2 \ldots p_\nu$$

und die Grade der Normalformen der m^{ten} Classe durch:

$$q_{m,1},\ q_{m,2}\ \ldots$$

und wähle die Reihe der ϑ so, dass:

$$p_{\nu+1} \geqq p_\nu;\quad q_{m,\nu+1} \geqq q_{m,\nu}$$

ist.

Da die ϱ^{te} Classe alle ϑ umfasst und da alle Classen mit $\varphi_1 = \vartheta_1$ beginnen, so ist:

$$q_{\varrho,\nu} = p_\nu;\quad q_{m,1} = p_1.$$

Die Grade der Ableitungen einer Normalform vom Grade $q_{m,\varkappa}$ nenne ich die Ableitungen von $q_{m,\varkappa}$; es sind Zahlen $q_{m+1,\varkappa}$, deren Anzahl $\leqq h_m \leqq q_{m,\varkappa}$ ist.

Umgekehrt sind alle Zahlen $q_{m+1,\varkappa}$ mit Ausnahme von:

$$q_{m+1,1} = p_1$$

Ableitungen von Zahlen $q_{m,\varkappa}$.

Die Anzahl aller Normalformen der m^{ten} Classe, also auch die Anzahl aller $q_{m,\varkappa}$ nenne ich v_m; v_ϱ ist dann die Zahl aller Normalformen, also auch sowohl die Anzahl aller p als auch die Anzahl aller q.

Die Anzahl der Ableitungen aller v_m Normalformen m^{ter} Classe ist:

$$\leqq \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=v_m} q_{m,\varkappa}.$$

Da diese Ableitungen alle v_{m+1} Normalformen der $(m+1)^{\text{ter}}$ Classe ausser φ_1 umfassen, so besteht die Ungleichung:

$$v_{m+1} \leqq 1 + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=v_m} q_{m,\varkappa}.$$

Enthält eine Reihe:

$$\vartheta_1,\ \vartheta_2\ \ldots\ \vartheta_l$$

die Formen m^{ter} Classe:

$$(1)\qquad \vartheta_{m,1},\ \vartheta_{m,2}\ \ldots\ \vartheta_{m,s}$$

und ist die Zahl der darin befindlichen Formen $(m+1)^{\text{ten}}$ Classe:

$$> \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=s} q_{m,\varkappa},$$

so enthält sie ausser den Formen (1) und ihren Ableitungen mindestens eine Form der $(m+1)^{\text{ten}}$ Classe.

Die Form niedrigsten Grades der übrigen Formen gehört dann gleichfalls der m^{ten} Classe an und ist daher die Form $\vartheta_{m,s+1}$. —

§ 6.

Die obere Grenze für die Anzahl der Normalformen.

Aus den Graden:

$$p_1, p_2 \dots$$

der Normalformen ϑ kann man mittelst der Formeln:

$$p_{\nu,1} = u_1 = p_1; \quad p_{\nu,0} = p_\nu;$$

$$p_{\nu,s} = p_{\nu-1,t} \quad \text{wo} \quad t = 1 + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=s-1} p_{\nu,\varkappa};$$

$$u_\nu = 1 + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=u_{\nu-1}} p_{\varrho+\nu+1,\varkappa}$$

weitere Zahlen $p_{\nu,\varkappa}$ und u_ν ableiten.

Ich will zeigen, dass diese Zahlen den Ungleichungen genügen:

$$\text{I.} \quad p_{\nu,\varkappa} \geqq q_{\varrho-\nu,\varkappa},$$

$$\text{II.} \quad u_\nu \geqq v_\nu.$$

Beweis.

In Folge der Formeln

(1) $$q_{\varrho-\nu,1} = p_{\nu 1} = p_1,$$

(2) $$q_{\varrho,s} = p_{0,s} = p_s,$$

(3) $$u_1 = p_1 = v_1$$

gelten unsere Formeln für kleine Zahlen ϱ und s. Wir wollen sie der Reihe nach für immer grössere Zahlen beweisen und dürfen hierbei die Annahme machen, sie seien bereits für kleinere Zahlen bewiesen, also die Ungleichungen voraussetzen:

$$\text{V. 1.} \quad q_{\varrho-\nu,s-1} \leqq p_{\nu,s-1},$$

$$\text{V. 2.} \quad q_{\varrho-\nu+1,s} \leqq p_{\nu-1,s},$$

$$\text{V. 3.} \quad v_{\nu-1} \leqq u_{\nu-1}.$$

In Folge der beiden ersten Voraussetzungen befinden sich in der Zahlenreihe:

(1) $$p_1, p_2 \dots p_{\nu,s} = p_{\nu-1,t} \quad \text{wo} \quad t = s + \sum_{\nu=1}^{\nu=s-1} p_{\nu,\varkappa}$$

unter Anderen sowohl die Zahlen:

(2) $$q_{\varrho-\nu,1}, \; q_{\varrho-\nu,2} \dots q_{\varrho-\nu,s-1},$$

als auch die Zahlen:

(3) $$q_{\varrho-\nu+1,s}, \; q_{\varrho-\nu+1,2} \dots q_{\varrho-\nu+1,t}.$$

Die Anzahl der Zahlen (2) und ihrer Ableitungen ist:

$$\leqq s-1+\sum_{x=1}^{x=s-1} q_{\varrho-\nu,x} \leqq s-1+\sum_{x=1}^{x=s-1} p_{\nu,x} \leqq t$$

Mithin enthält die Reihe 1 auch die Zahl $q_{\varrho-\nu,s}$ und unsere erste Behauptung ist erwiesen.

Aus der Formel:

$$q_{\varrho-\nu,s} \leqq p_{\nu,s}$$

und der V. 3 folgt weiter:

$$v_m \leqq 1+\sum_{x=1}^{x=v_{m-1}} q_{m-1,x} \leqq 1+\sum_{x=1}^{x=u_{m-1}} p_{\varrho-m+1,x} \leqq u_m.$$

Im Speciellen hat man für $m=\varrho$:

$$v_\varrho \leqq u_\varrho,$$

d. h. u_ϱ ist die obere Grenze für die Anzahl der Normalformen.

Diese Formen:

$$\vartheta_1, \vartheta_2 \ldots \vartheta v_\varrho$$

mögen die Normalformen der Invarianten:

$$\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_{v,\varrho}$$

sein, die übrigen Invarianten φ besitzen keine Normalformen. Für sie giebt es nach § 4 ein Aggregat η_λ, welches identisch verschwindet. Es besteht somit eine Gleichung:

$$0=A_1\varphi_1+A_2\varphi_2 \ldots A_{v_\varrho}\varphi_{v_\varrho}+A\varphi,$$

worin die A_x simultane Invarianten der f_ν sind und überdiess A die Coefficienten von f nicht enthält. Aus dieser Formel lässt sich eine weitere ableiten:

$$\varphi=B_1\varphi_1+B_2\varphi_2 \ldots B_{v_\varrho}\varphi_{\varrho_v},$$

in welcher die B Invarianten von f allein sind und welche zeigt, dass $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_{v_\varrho}$ das System von f bilden.

Erlangen, im September 1892.

Zur Theorie der Tripelsysteme.

Von

Eugen Netto in Giessen.

Kann man eine Anzahl n von Elementen $x_1, x_2, \ldots x_n$ zu je drei und drei, in „Tripeln“, so anordnen, dass jede Combination $x_\alpha x_\beta$ zweier Elemente in diesen Tripeln ein und auch nur ein Mal auftritt, so nennt man diese Anordnung ein *Tripelsystem.* Dass die Wurzeln der Modulargleichungen achten Grades durch ihre Resolvente siebenten Grades auf solche Tripelsysteme führen, hat Herr M. Noether (Math. Ann. XV, S. 89) zuerst bemerkt. Von der Hesse'schen Gleichung neunten Grades war Aehnliches bekannt. Ich habe dann weitere Untersuchungen über diese Systeme in meiner Substitutionentheorie S. 220, § 192 ff. gegeben. Hier will ich nochmals auf diesen Gegenstand eingehen und einige neuen Sätze über ihn ableiten.

§ 1.

Ist n die Anzahl der Elemente, so kann man $\frac{1}{2}\, n(n-1)$ Combinationen $x_\alpha,\ x_\beta$ von je zwei Wurzeln bilden. Zu jedem Tripel gehören 3 solcher Combinationen; also bestehen $\frac{1}{6}\, n(n-1)$ Tripel. Dieser Bruch muss eine ganze Zahl sein, n also die Form $6m+1$ oder $6m+3$ haben Die Möglichkeit $n=6m$ ist auszuschliessen, wie man erkennt, wenn man x_1 mit allen übrigen Elementen combinirt, die sich dann zu je zwei und zwei anordnen, so dass n eine ungerade Zahl sein muss.

§ 2.

Wir wollen jetzt zeigen, wie man mit Hülfe eines Tripelsystems von n Elementen $x_1, x_2, \ldots x_n$ ein solches von $2n+1$ Elementen construiren kann. Zu jenen ersten n Elementen nehmen wir noch $n+1$ neue $x_0', x_1', x_2', \ldots x_n'$ hinzu. Aus jedem vorhandenen Tripel $x_\alpha, x_\beta, x_\gamma$ der x bilden wir vier Tripel, nämlich

$$x_\alpha,\ x_\beta,\ x_\gamma;\quad x_\alpha',\ x_\beta',\ x_\gamma;\quad x_\alpha',\ x_\beta,\ x_\gamma';\quad x_\alpha,\ x_\beta',\ x_\gamma'$$

und fügen allen so erhaltenen noch

$$x_0',\ x_1,\ x_1';\quad x_0',\ x_2,\ x_2';\ \ldots\ x_0',\ x_n,\ x_n'$$

hinzu. Offenbar tritt hier niemals dasselbe Paar der x, x' zusammen; ferner sind im ganzen

$$4\,\frac{n(n-1)}{6} + n = \frac{(2n+1)\,2n}{6}$$

Tripel vorhanden; also ist das System ein vollständiges.

§ 3.

Wir construiren ferner aus 2 Tripelsystemen von n_1 und n_2 Elementen ein solches von $n_1 \cdot n_2$ Elementen. Die Tripel des ersten bezeichnen wir

(T$_1$) $\qquad a,\ b,\ c;\quad a,\ d,\ e;\quad b,\ d,\ g;\ \ldots,$

die des zweiten

(T$_2$) $\qquad \alpha,\ \beta,\ \gamma;\quad \alpha,\ \delta,\ \varepsilon;\quad \alpha,\ \zeta,\ \eta;\ \ldots$

und die Elemente des neuen Systems $x_{a\alpha},\ x_{a\beta},\ \ldots\ x_{b\alpha},\ x_{b\beta},\ \ldots$.

Zuerst schreiben wir nun vor jedes der Elemente in den Tripeln von T$_1$ jedes Element $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$; erhalten daraus also

$$n_2\,\frac{n_1(n_1-1)}{6}$$

Combinationen und bilden aus ihnen ebensoviele Tripel

$$x_{\alpha a},\ x_{\alpha b},\ x_{\alpha c};\quad x_{\alpha a},\ x_{\alpha d},\ x_{\alpha e};\ \ldots\ x_{\beta a},\ x_{\beta b},\ x_{\beta c};\ \ldots\,.$$

Auf dieselbe Art erhalten wir, wenn wir die $a, b, c, \ldots$ den Elementen von T$_2$ vorschieben

$$n_1\,\frac{n_2(n_2-1)}{6}$$

Tripel. Endlich bilden wir aus jeder Combination eines Tripels von T$_1$ mit einem von T$_2$ je 6 neue, z. B. aus a, b, c und α, ζ, η die folgenden

$$x_{a\alpha},\ x_{b\zeta},\ x_{c\eta};\quad x_{a\alpha},\ x_{b\eta},\ x_{c\zeta};\quad x_{a\zeta},\ x_{b\alpha},\ x_{c\eta};\quad x_{a\zeta},\ x_{b\eta},\ x_{c\alpha};$$
$$x_{a\eta},\ x_{b\alpha},\ x_{c\zeta};\quad x_{a\eta},\ x_{b\zeta},\ x_{c\alpha}.$$

Dadurch erhält man

$$6\,\frac{n_1(n_1-1)}{6}\,\frac{n_2(n_2-1)}{6},$$

also zusammen

$$n_2\,\frac{n_1(n_1-1)}{6} + n_1\,\frac{n_2(n_2-1)}{6} + 6\,\frac{n_1(n_1-1)}{6}\,\frac{n_2(n_2-1)}{6} = \frac{n_1 n_2(n_1 n_2-1)}{6}.$$

Dass diese von einander verschieden sind, ist ersichtlich.

§ 4.

In diesem Paragraphen leiten wir ein Tripelsystem von $6m+1$ Elementen ab, falls $p=6m+1$ eine Primzahl ist.

Es sei g eine primitive Congruenzwurzel (mod. p), so dass die Werthe der Potenzen $g^0, g^1, g^2, \ldots g^{p-2}$ (mod. p) alle von einander verschieden sind und $g^{p-1}\equiv 1$ wird. Wir betrachten von diesen und allen folgenden Zahlen immer nur die kleinsten positiven Reste (mod. p). Dann bilden wir die Tripel

(1) $0,\ g^0,\ g^m;\quad 0,\ g^1,\ g^{m+1};\quad 0,\ g^2,\ g^{m+2};\ \ldots\ 0,\ g^{m-1},\ g^{2m-1}$

und schreiben unter jedes noch $6m$ andere Tripel, nämlich unter $0,\ g^\alpha,\ g^{m+\alpha}$ noch die folgenden

(2) $$\varkappa,\ \varkappa+g^\alpha,\ \varkappa+g^{m+\alpha}$$
$$(\varkappa=1,2,3,\ldots 6m).$$

Die so entstandenen

$$m\cdot(6m+1)=\frac{p(p-1)}{6}$$

Tripel bilden ein vollständiges System. Zum Beweise dieser Behauptung reicht es aus, zu zeigen, dass alle diese Tripel von einander verschieden sind, und dazu, dass diese Eigenschaft bei denen stattfindet, welche das Element 0 besitzen. Denn die mit dem Elemente 1 z. B. entstehen aus jenen durch Vermehrung jedes Elementes um 1. Ausser denen in (1) enthaltenen mit dem Elemente 0 kommen in (2) noch vor, je nachdem das zweite oder das dritte Element $\equiv 0$ wird,

(3) $0,\ g^m-g^0,\ -g^0;\quad 0,\ g^{m+1}-g^1,\ -g^1;\quad 0,\ g^{m+2}-g^2,\ -g^2;\ \ldots$

und

(4) $0,\ -g^m,\ g^0-g^m;\quad 0,\ -g^{m+1},\ +g^1-g^m;\quad 0,\ -g^{m+2},\ +g^2-g^{m+2};\ \ldots.$

Nun ist

$$(g^{3m}+1)(g^{3m}-1)\equiv 1 \quad \text{also} \quad g^{3m}\equiv -1;$$

$$g^{3m}+1\equiv(g^m+1)(g^{2m}-g^m+1)\equiv 0 \quad \text{also} \quad g^m-1\equiv g^{2m};$$

folglich lassen sich die Reihen (3), (4) umwandeln in

(3′) $0,\ g^{2m},\ g^{3m};\quad 0,\ g^{2m+1},\ g^{3m+1};\quad 0,\ g^{2m+2},\ g^{3m+2};\ \ldots,$

(4′) $0,\ g^{4m},\ g^{5m};\quad 0,\ g^{4m+1},\ g^{5m+1};\quad 0,\ g^{4m+2},\ g^{5m+2};\ \ldots,$

und damit ist der Beweis völlig geliefert.

§ 5.

In ähnlicher Weise lässt sich ein System für $n=3(6m+5)$ bestimmen, falls $6m+5=p$ eine Primzahl ist. In diesem Falle nehmen

wir wiederum eine primitive Congruenzwurzel für p, bilden aber jetzt die Reste von

$$g^0, g^1, g^2, \ldots g^{p-1}$$

nach dem Modul $3p$ und schreiben die Tripel

(1) $0, g^0, g^{3m+2};\ 0, g^1, g^{3m+3};\ 0, g^2, g^{3m+4};\ \ldots\ 0, g^{3m+1}, g^{6m+3}$

auf. Unter jedes einzelne setzen wir wieder $3p-1$ andere Tripel, nämlich unter $0, g^\alpha, g^{3m+\alpha+2}$ noch die folgenden

$$(2) \qquad \varkappa,\ \varkappa + g^\alpha,\ \varkappa + g^{3m+\alpha+2}$$
$$(\varkappa = 1, 2, \ldots 3p-1).$$

Endlich bilden wir noch die Tripel

$$(3) \quad 0, p, 2p;\ 1, p+1, 2p+1;\ 2, p+2, 2p+2;\ \ldots$$
$$(p-1), (2p-1), (3p-1).$$

Dies sind zusammen

$$3p \cdot (3m+2) + p = \frac{3p(3p-1)}{6}$$

Tripel; und falls diese sämmtlich von einander verschieden sind, bilden sie das gesuchte System. Es genügt wieder, wie im vorigen Paragraphen, zu zeigen, dass alle diejenigen, in denen ein Element 0 ist, von einander verschieden sein müssen. Solcher giebt es ausser (1) noch in (2), je nachdem das zweite oder das dritte Element $\equiv 0$ wird,

$$\left.\begin{array}{ll}(4) & 0, g^{3m+2}-g^0, -g^0;\ 0, g^{3m+3}-g^1, -g^1;\ 0, g^{3m+4}-g^2, -g^2; \ldots \\ (5) & 0, -g^{3m+2}, g^0-g^{3m+2};\ 0, -g^{3m+3}, g^1-g^{3m+3};\ 0, -g^{3m+4}, g^2-g^{3m+4}; \ldots\end{array}\right\} (\text{mod. } 3p)$$

und in (3) noch das Eine

$$0, p, 2p.$$

Wir machen nun die Voraussetzung, dass für unsere primitive Wurzel g

$$(6) \qquad g^{3m+2} \equiv g^{\frac{p-1}{2}} \equiv p-1 \ (\text{mod. } 3p)$$

sei, dann folgt daraus sofort, dass g nicht durch 3 theilbar sein kann; folglich kann in (1) ausser 0 keine Zahl vorkommen, die durch 3 theilbar wäre. Da aber in (4) $g^{3m+2}-1 \equiv p-2 \equiv 6m+3$ durch 3 theilbar ist und dasselbe dann auch bei

$$g(g^{3m+2}-1),\ g^2(g^{3m+2}-1),\ \ldots\ g^0-g^{3m+2} \equiv g^{3m+2}(g^{3m+2}-1), \ldots$$

eintritt, so sind alle mittleren Indices der Elemententripel von (4) und alle letzten der von (5) gleichfalls durch 3 theilbar, unter sich und von denen aus (1) verschieden.

Ferner kann kein der Zeile (1) angehöriges g^α den Werth $3p-1$ annehmen, wenn $g^{3m+2} \equiv p-1$ ist, da sonst $g^\alpha \equiv g^{\frac{p-1}{2}}$ (mod. p) wäre.

Also sind auch die übrigen Indices aus (4), (5) unter sich und von den früheren verschieden.

Es bilden daher (1), (2), (3) ein vollständiges Tripelsystem unter der gemachten Voraussetzung, dass

$$(6) \qquad g^{3m+2} \equiv g^{\frac{p-1}{2}} \equiv p - 1 \pmod{3p}$$

befriedigt werden kann.

Es ist nun für jede primitive Wurzel g von p

$$g^{\frac{p-1}{2}} \equiv p - 1 \equiv 2p - 1 \equiv 3p - 1 \pmod{p};$$

ausserdem muss einer der drei Fälle eintreten

$$g^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \equiv \ p - 1 \pmod{3},$$
$$g^{\frac{p-1}{2}} \equiv 0 \equiv 2p - 1 \pmod{3},$$
$$g^{\frac{p-1}{2}} \equiv 2 \equiv 3p - 1 \pmod{3}$$

und je nachdem dies geschieht wird

$$g^{\frac{p-1}{2}} \equiv \ p - 1 \pmod{3p},$$
$$g^{\frac{p-1}{2}} \equiv 2p - 1 \pmod{3p},$$
$$g^{\frac{p-1}{2}} \equiv 3p - 1 \pmod{3p}$$

sein. Unsere Bedingung ist also mit der einfacheren identisch, dass $g^{\frac{p-1}{2}}$ modulo 3 zu 1 congruent sein muss.

Ist m gerade, also $p = 12\mu + 5$, dann ist $\frac{p-1}{2}$ eine gerade Zahl und daher für jedes g entweder

$$g^{\frac{p-1}{2}} \quad \text{oder} \quad (p-g)^{\frac{p-1}{2}}$$

congruent 1 modulo 3; man hat daher in einer beliebigen primitiven Wurzel g oder, wenn diese durch 3 theilbar ist, in ihrer Ergänzung zu p die gesuchte zur Construction des Tripelsystems nöthige Grundlage.

Ist dagegen m ungerade, also $p = 12\mu + 11$, dann ist $\frac{p-1}{2}$ eine ungerade Zahl und kann also, wenn es sich um Exponenten bei Congruenzen nach dem Modul 3 handelt, gleich 1 genommen werden. Dann fragt es sich also, ob es für $p = 12\mu + 11$ eine primitive Wurzel g giebt, welche $\equiv 1 \pmod{3}$ ist. Ob dies stets der Fall sei, kann ausser Frage bleiben, da wir g aus der Zahlenreihe von 1 bis

$3p-1$ wählen dürfen, und da von den 3 Zahlen g, $p+g$, $2p+g$ eine von der geforderten Form ist. Mit Hülfe dieser ist dann die Construction des Tripelsystems möglich.

§ 6.

Substitutionengruppen von n Elementen, welche auf Tripelsysteme von n Elementen angewendet, diese ungeändert lassen, indem sie nur die einzelnen Tripel in einander überführen, sollen *Tripelgruppen* heissen.

Bei den Constructionen der beiden lezten Paragraphen ist es ersichtlich, dass zu den Tripelgruppen der dort construirten Systeme die cyklische Substitution

$$s=(0\,1\,2\,3\ldots n)$$

gehört. Denn diese vertauscht bei $n=p=6m+1$ die einzelnen Tripel der Colonnen aus (1) und (2) cyklisch von oben nach unten. In dem Falle des vorigen Paragraphen $n=3(6m+5)=3p$ findet bei den Tripeln von (1) und (2) Aehnliches statt, während die von (3) sich cyklisch von links nach rechts verschieben.

Schreibt man dann ferner aus § 4 die Tripel auf, welche das Element 0 enthalten, wie sie aus (1), (3′), (4′) zu entnehmen sind,

$$\begin{array}{llllllllll}
0, & g^0, & g^m; & 0, & g^1, & g^{m+1}; & \ldots & 0, & g^{m-1}, & g^{2m-1}; \\
0, & g^{2m}, & g^{3m}; & 0, & g^{2m+1}, & g^{3m+1}; & \ldots & 0, & g^{3m-1}, & g^{4m-1}; \\
0, & g^{4m}, & g^{5m}; & 0, & g^{4m+1}, & g^{5m+1}; & \ldots & 0, & g^{5m-1}, & g^{6m-1},
\end{array}$$

so erkennt man, dass die Substitution

$$t=|x\;\; g^{2m}x|$$

unter Festhaltung des Elementes 0 die Colonnen in sich selbst transformirt. t^3 hat wegen $g^{6m}\equiv 1$ den Werth 1; es besteht also t aus lauter Cyklen der Ordnung 3. Ihre Anzahl ist $2m$.

Um bei den im § 5 behandelten Tripelsystemen Entsprechendes zu finden, beachte man, dass die Multiplication der Elemente aus der Zeile (1) mit g die Tripel derselben wegen (6) aus § 5 cyklisch von links nach rechts schiebt, — was bei (1) aus § 4 nicht der Fall war —, und dass bei (4), (5) das Gleiche eintritt. Die aus (1), (2) entstammenden Tripel werden also durch

$$t_1=|x\;\; gx|$$

in sich verschoben. Dass auch die übrigen, in (3) enthaltenen Tripel in einander übergehen, folgt wiederum aus der Annahme (6) § 5. Denn danach ist

$$p(g-1)\equiv 0, \quad pg\equiv p \pmod{3p}$$

und also ein Tripel ag, $(a+p)g$, $(a+2p)g$ mit ag, $ag+p$, $ag+2p$ identisch. Die Substitution t_1 lässt die Elemente $0, p, 2p$ ungeändert; sie besitzt 3 Cyklen zu je $6m+4=p-1$ Elementen.

§ 7.

Wir untersuchen nun eingehender die einfachsten Fälle, welche durch die Methode von § 4 geliefert werden.

Zuerst sei $p = 7$; wir wählen $g = 3$ und erhalten nur eine Colonne, welche die sämmtlichen Tripel umfasst, nämlich

0, 1, 3; 1, 2, 4; 2, 3, 5; 3, 4, 6; 0, 4, 5; 1, 5, 6; 0, 2, 6.

Für dieses System giebt es nach dem vorigen Paragraphen die Substitutionen

$$s = (0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6),$$
$$t = (1\ 2\ 4)\ (3\ 6\ 5).$$

Es ist $t^{-1}st = s^2$, und daher liefern s, t eine Gruppe von 7 . 3 Substitutionen, nämlich die halb-metacyklische.

Durch s kann man jedes Tripel in jedes andere überführen. Ist also irgend eine Substitution u der Tripelgruppe gegeben, so wird ein $u \,.\, s^\alpha$ etwa 0, 1, 3 in sich selbst überführen, und man erhält daher die gesammte Gruppe, wenn man noch diejenigen Substitutionen sucht, welche das Tripel 0, 1, 3 nicht ändern. Es giebt zwei Arten von solchen; erstens die, welche 0 und 1 und dann folglich auch 3 nicht umsetzen; zweitens die, welche innerhalb des Tripels 0, 1, 3 Umstellungen hervorrufen, also die Elemente 0, 1, 3 unter sich vertauschen.

Die der ersten Art müssen

0, 4, 5	und	0, 2, 6	unter	sich
1, 2, 4	„	1, 5, 6	„	„
2, 3, 5	„	3, 4, 6	„	„

vertauschen. Das ist in der That möglich, wenn man eine der Formen

$$u_1 = (2\ 4)\ (5\ 6), \quad u_2 = (2\ 5)\ (4\ 6), \quad u_3 = (2\ 6)\ (4\ 5)$$

annimmt, und auch nur für diese. Zu s, t muss also noch u_1, u_2 genommen werden.

Die Substitutionen der zweiten Art haben eine der Formen

$$v = (0)\ (1\ 3) \ldots \quad \text{oder} \quad w = (0\ 1\ 3) \ldots .$$

Ein solches v muss dann

0, 1, 3; 0, 4, 5; 0, 2, 6

unter sich, dagegen die Tripel

1, 2, 4 und 1, 5, 6

gegen die Tripel

3, 2, 5 und 3, 4, 6

vertauschen. Man sieht leicht, dass dies

$$v = (1\ 3)\ (2\ 4\ 6\ 5), \quad v^3 = (1\ 3)\ (2\ 5\ 6\ 4), \quad v_1 = (1\ 3)\ (2\ 6)\ (4)\ (5)$$

leisten und sie allein.

w endlich muss die Tripel

$$0, 4, 5;\ 0, 2, 6 \quad \text{in} \quad 1, 2, 4;\ 1, 5, 6$$

ebenso

$$1, 2, 4;\ 1, 5, 6 \quad \text{in} \quad 3, 2, 5;\ 3, 4, 6$$

und endlich wieder

$$3, 2, 5;\ 3, 4, 6 \quad \text{in} \quad 0, 4, 5;\ 0, 2, 6$$

überführen. Man findet hier

$$w = (0\,1\,3)\,(2\,5\,4), \qquad w_1 = (0\,1\,3)\,(4\,5\,6).$$

Die so erhaltene Gruppe ist die Kronecker'sche des Grades 7 und der Ordnung 168. (Vgl. Noether l. c.)

Eine leichte Versuchsreihe zeigt, dass das hier construirte Tripelsystem bis auf seine Bezeichnung das allgemeinste für 7 Elemente ist.

§ 8.

Für $p = 13$ wählen wir $g = 6$ und erhalten, da $m = 2$ ist, zwei Colonnen von je 13 Tripeln. Die nachfolgenden enthalten das Element 0

$$0, 1, 10;\ 0, 9, 12;\ 0, 3, 4;$$
$$0, 6, 8;\ 0, 2, 7;\ 0, 5, 11.$$

Hier ist

$$s = (0\,1\,2\,\ldots\,11\,12);$$
$$t = (1\,9\,3)\,(6\,2\,5)\,(10\,12\,4)\,(8\,7\,11).$$

Wir suchen zuerst alle Substitutionen, welche mindestens zwei der Elemente nicht umsetzen. Wie diese Elemente auch gewählt sein mögen, es giebt stets ein Tripel, welches beide enthält, und da s die 13 Tripel jeder Zeile unter sich vertauscht, so kann man annehmen, dass die beiden gewählten entweder zu 0, 1, 10 oder zu 0, 6, 8 gehören. In jedem Falle bleibt mit den beiden auch das dritte des enthaltenden Tripels ungeändert.

Untersuchen wir zuerst das Festbleiben der drei Elemente 0, 1, 10, so müssen dabei die einzelnen Tripel von

(I) $\quad 0, 2, 7;\ 0, 3, 4;\ 0, 5, 11;\ 0, 6, 8;\ 0, 9, 12,$

ferner die von

(II) $\quad 1, 2, 11;\ 1, 3, 8;\ 1, 4, 5;\ 1, 6, 12;\ 1, 7, 9,$

endlich die von

(III) $\quad 10, 2, 8;\ 10, 3, 5;\ 10, 4, 12;\ 10, 6, 9;\ 10, 7, 11$

jedesmal in solche derselben Zeile übergehen. Giebt es eine Substitution, die das vollbringt, so wird sie auf das Element 2 eins der Elemente 2, 3, 4, ... 8, 9, 11, 12 folgen lassen. Es ergiebt sich aber, dass jede derartige Annahme auf Widersprüche führt. Bliebe z. B. 2 ungeändert, so folgt aus 0, 2, 7; 1, 2, 11; 10, 2, 8, dass auch 7, 11, 8 ungeändert bleiben. Bleibt 7 ungeändert, dann folgt aus 1, 7, 9 dasselbe für 9 u. s. f. bis sich die Substitution als die identische zu erkennen giebt. Oder, wenn die gesuchte Substitution etwa die Folge 23 besässe, so ergäbe sich aus

(I) dass 0, 2, 7 in 0, 3, 4 übergeht, so dass die Folge 7 4 besteht,

(II) „ 1, 2, 11 „ 1, 3, 8 „ „ „ „ „ 11 8 „ ,

(III) „ 10, 2, 8 „ 10, 3, 5 „ „ „ „ „ 8 5 „ .

Kommt aber die Folge 74 in der Substitution vor, so ergiebt sich aus (II) dass 1, 7, 9 in 1, 4, 5 übergeht, so dass die Folge 95 besteht. Die beiden Folgen 85 und 95 aber widersprechen einander.

Auf diesem Wege überzeugt man sich durch Fortsetzung des Verfahrens, dass keine Substitution vorhanden ist, die 0, 1, 10 und ebenso keine die 0, 6, 8 ungeändert lässt.

Nach einem bekannten Satze kann es dann höchstens noch Substitutionen von 12 Elementen in der Gruppe geben; diese müssten mit der Gruppe $1, s, s^2, \dots s^{12}$ vertauschbar sein; unter ihnen würden solche bestehen, die das Element 0 nicht ändern; das könnten nur Potenzen von

$$\begin{pmatrix} 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12 \\ 0, & 2, & 4, & 6, & 8, & 10, & 12, & 1, & 3, & 5, & 7, & 9, & 11 \end{pmatrix}$$
$$= (1\ 2\ 4\ 8\ 3\ 6\ 12\ 11\ 9\ 5\ 10\ 7)$$

sein. Hier sieht man ohne Weiteres, dass nur t, t^2 der Bedingung genügen.

Es ist also $G = \{s, t\}$ die allgemeine Tripelgruppe, welche zu unserem Systeme gehört.

§ 9.

Zum Schluss möchte ich darauf aufmerksam machen, dass auch durch die neuen in den Paragraphen 4 und 5 gegebenen Constructionen die Frage noch nicht erledigt ist, ob es für jede Zahl der Form $6m + 1$, $6m + 3$ Tripelsysteme giebt. Durch die Regel aus § 4 werden im ersten Hundert für 7, 13, 19, 31, 37, 43, 61, 67, 73, 79, 97 Elemente Tripelgruppen dargestellt; durch § 5 für 15, 21, 33, 39, 51, 57, 69, 87, 93 Elemente. Von den übrigen in Frage

kommenden Zahlen unter 100 lassen sich durch § 3 die Zahlen 9, 27, 45, 49, 63, 81, 91, 99 und durch § 2 die beiden Zahlen 55 und 75 erledigen. Dann bleiben aber noch 25 und 85 zurück, über die noch nichts bekannt ist. Die Construction für $n = 25$ ist leicht zu geben.

Ferner ist die Frage, ob es für eine Zahl n wesentlich verschiedene Tripelsysteme giebt, nicht leicht zu entscheiden. Die auf systematisches Probiren beruhenden Versuche sind recht mühselig. Für $n = 13$ scheint die Frage verneint werden zu müssen.

Giessen, den 22. Mai 1892.

Zur Theorie der Taylor'schen Reihe und der analytischen Functionen mit beschränktem Existenzbereich.

Von

ALFRED PRINGSHEIM in München*).

Im 15. Bande der Acta Mathematica**) theilt Herr Mittag-Leffler die folgende von Herrn Fredholm aufgefundene Reihe:

$$\sum_{0}^{\infty} a^{\nu} \cdot x^{\nu^2} \quad (|a| < 1)$$

als erstes Beispiel einer Function mit, welche über einen gewissen Bereich (den Einheitskreis um den Nullpunkt) nicht analytisch fortgesetzt werden kann, d. h. für keine Stelle auf der *Grenze* dieses Bereiches nach der Taylor'schen Reihe entwickelbar ist, obschon sie daselbst *mit sämmtlichen Ableitungen* stetig ist.

Die Reihe ist in der That wegen ihrer ausserordentlichen Einfachheit bemerkenswerth: dagegen scheint mir dieselbe keineswegs etwas *principiell neues* darzubieten und in dieser Hinsicht von Herrn Mittag-Leffler einigermassen überschätzt zu werden. Denn abgesehen davon, dass wohl Niemand, der sich mit der Theorie der Taylor'schen Reihe etwas näher beschäftigt hat, an der *Existenz* derartiger Functionen den geringsten Zweifel haben konnte, so möchte ich Herrn Mittag-Leffler nicht einmal darin beistimmen, dass solche Functionen bisher überhaupt noch nicht studirt worden seien.***)

---

*) Der vorliegende Aufsatz bildet eine theilweise Umarbeitung und Erweiterung der unter dem gleichen Titel in den Sitzungsberichten der Münchner Akademie vom 7. Mai 1892 enthaltenen Mittheilung.

**) „Sur une transcendante remarquable trouvée par M. Fredholm." A. a. O. p. 279.

***) Es heisst a. a. O.: Autant que je sache, *toutes* les fonctions qui n'existent que dans un certain domaine du plan et *qui ont été étudiées jusqu'ici*, *cessent d'exister*, parce que les fonctions elles mêmes ou *leurs dérivées* deviennent *discontinues* sur la frontière.

Die *principielle* Frage, um die es sich hierbei *einzig und allein* handelt, ist doch lediglich die: Giebt es Functionen, die auch nur an irgend *einer einzigen Stelle* endliche Differentialquotienten*) jeder endlichen Ordnung besitzen und dennoch nicht nach der Taylor'schen Reihe entwickelbar sind? Denn aus einer Function, die eine derartige Singularität an *einer* Stelle besitzt, lassen sich ja dann nach bekannten Methoden — etwa mit Hülfe des von Herrn Cantor angegebenen Condensations-Principes**) — leicht solche bilden, bei denen die nämliche Singularität in allen Punkten einer beliebigen abzählbaren unendlichen Menge auftritt.

Nun hat aber *im Gegensatze* zu Lagrange, welcher geradezu die Ansicht aussprach,***) dass die Endlichkeit von $f^{(\nu)}(x)$ für jedes endliche ν die Gültigkeit der Entwicklung:

$$f(x+h)=\sum_{0}^{\infty}{}^{\nu}\,\frac{f^{(\nu)}(x)}{\nu!}\,h^{\nu}$$

(und damit eo ipso auch die *Convergenz* der betreffenden Reihe) nach sich ziehe, Cauchy schon in seinen ersten „Leçons sur le Calcul infinitésimal“ vom Jahre 1823 ausdrücklich die Bemerkung gemacht,†) dass nicht einmal die *Convergenz der Taylor'schen Reihe* hinreiche, um daraus die *Gültigkeit der obigen Beziehung* zu folgern. Und obschon sich gegen das einzige zum Belege seiner Behauptung angeführte *Beispiel* gewisse, nicht recht zu widerlegende Einwände erheben lassen (wovon weiter unten noch die Rede sein wird), so ist doch die *sachliche Richtigkeit* jener Cauchy'schen Bemerkung, die sich auch in zahlreichen besseren Compendien der Differentialrechnung reproducirt findet,††) meines Wissens von neueren Mathematikern niemals *bestritten* worden,†††)

---

*) Selbstverständlich handelt es sich hierbei im Falle einer complexen Variabeln nicht um Differentialquotienten nach *allen möglichen* Richtungen, sondern nur *nach einem Theil dieser Richtungen*.

**) Math. Ann. Bd. XIX, p. 588.

***) Théorie des Fonctions. Chap. V. Art. 30 (Oeuvres complètes, T. IX, p. 65). — Leçons sur le Calcul des Fonctions. Leç. III. (Oeuvres compl. T. X, p. 72.)

†) a. a. O. p. 152. Auch in den „Leçons sur le Calcul différentiel“ vom Jahre 1826: p. 105, und den „Leçons sur le Calcul différentiel et intégral“ von Cauchy-Moigno: T. I, p. 71.

††) z. B. Hermite, Cours d'Analyse, T. I, p. 203. — Serret-Harnack, Differential- und Integral-Rechnung, T. I, p. 152. — Houël, Calcul infinitésimal, T. I, p. 286.

†††) Nur der Vollständigkeit halber möchte ich als einzig mir bekannte Ausnahme ein Buch mit dem viel versprechenden Titel: „Le Calcul infinitésimal fondé sur des Principes rationnels“ von P. H. Fleury (Paris 1879) anführen. Was aber der Verfasser dort auf p. 234—236 vorbringt, enthält nur ein Körnchen Wahrheit,

mag auch die fragliche Bemerkung einzelnen mathematischen Schriftstellern vielleicht gänzlich *entgangen* sein.*)

Immerhin bin auch ich der Ansicht, dass jenes Cauchy'sche Beispiel nicht ausreicht, um die Existenz einer nicht entwickelbaren Function mit lauter stetigen Differentialquotienten schlechthin evident zu machen. Dies wird nun aber thatsächlich vollständig geleistet durch ein von Du Bois Reymond im Jahre 1876 publicirtes Beispiel einer Function,**) welche an einer gewissen Stelle endliche und stetige Differentialquotienten jeder endlichen Ordnung besitzt, während die mit diesen Differentialquotienten gebildete Taylor'sche Reihe $\sum_0^\infty \frac{f^\nu(x)}{\nu!} h^\nu$ für jedes noch so kleine h *divergirt*, woraus dann mit Leichtigkeit folgt, dass $f(x+h)$ in der Umgebung dieser Stelle x überhaupt nicht nach Potenzen von h entwickelt werden kann. Und da Du Bois Reymond es auch unternommen hat, aus dieser Function durch „Condensation" eine andere abzuleiten, welche die fragliche Eigenschaft in unendlich vielen, überall dicht liegenden Punkten einer Linie hat, so scheint mir eben die oben citirte Bemerkung des Herrn Mittag-Leffler nicht recht zutreffend.

Auf der anderen Seite hätte ich gegen die von ihm mitgetheilte Reihe des Herrn Fredholm, deren elegante Einfachheit ich nochmals ausdrücklich anerkenne, vom didaktischen Standpunkte mancherlei einzuwenden. Zunächst scheint mir schon der Beweis dafür, dass jene Reihe die fragliche Eigenschaft besitzt, nicht elementar genug: er beruht auf einem, keineswegs mehr den Elementen der Functionentheorie angehörigen Kowalewski'schen Satze über die Integrale partieller Differentialgleichungen. Zweitens aber bietet diese Methode der Herleitung den grossen Nachtheil, dass wir von der Art und Weise des Zustandekommens einer solchen, doch immerhin merkwürdigen Singularität auch nicht die geringste Anschauung erhalten.

Da mir dies nun aber gerade wünschenswerth erschien, so habe ich vor allem versucht, die schon von Du Bois Reymond befolgte Methode, die in mancher Beziehung der *Ergänzung* geradezu *bedarf*, in anderer der *Erweiterung fähig ist*, derartig zu vervollkommnen, dass es möglich wird, auf dem Wege einer zielbewussten Synthese

---

soweit er sich gegen die besondere Form des Cauchy'schen *Beispiels* wendet. Alles übrige sind theils nichtssagende, theils geradezu absurde Redensarten.

*) z. B. Hankel, der in seiner bekannten Abhandlung über die unendlich oft unstetigen Functionen (1870) gelegentlich noch ganz den Lagrange'schen Standpunkt vertritt: cf. Math. Ann. Bd. XX, p. 102.

**) In den Berichten der Bayer. Akad. d. Wiss. Desgl. Bd. XXI dieser Zeitschrift. p. 109 ff.

völlig einwandfreie Beispiele von Functionen der gedachten Art zu erzeugen.

Zu diesem Behufe untersuche ich zunächst nochmals genau die Möglichkeiten, unter denen trotz der Endlichkeit aller Ableitungen von endlicher Ordnung die Entwickelbarkeit nach der Taylor'schen Reihe für *eine* bestimmte Stelle ausgeschlossen erscheint, und belege dieselbe durch einfache, vermittelst directer Rechnung zu controlirende Beispiele (§ 1). Sodann werden allgemeine Bedingungen aufgestellt, unter denen es möglich ist, derartige singuläre Stellen in unendlicher Anzahl beliebig zu condensiren, ohne fürchten zu müssen, dass diedieselben sich etwa gegenseitig in ihrer Wirkung aufheben könnten (§ 2). Auf Grund dieser Bedingungen werden darauf Reihen construirt, welche die verlangte Eigenschaft besitzen, auf dem Einheitskreise durchweg beliebig oft differenzirbar und daselbst dennoch nirgends entwickelbar zu sein.

Die auf diese Weise erzeugten Reihen sind natürlich minder einfach als die von Herrn Mittag-Leffler mitgetheilte, aber sie geben uns, wie gesagt, offenbar eine deutliche Vorstellung von einer der Möglichkeiten, wie derartige Singularitäten zu Stande kommen können.

Im übrigen aber bin ich auch, abgesehen von diesen Betrachtungen, im Stande, Reihen *von ganz ähnlicher Einfachheit* wie die des Herrn Fredholm anzugeben, bei denen sich die fragliche Eigenschaft *ganz elementar* beweisen lässt, indem man durch einfache Rechnung erkennen kann, dass die Taylor'sche Entwickelung für unendlich viele, überall dicht liegende Stellen auf dem Einheitskreise *divergiren* muss (§ 4).

§ 1.

Für das Innere eines gewissen Bereichs der complexen Variablen x sei $f(x)$ mit sämmtlichen Ableitungen $f^{(n)}(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ durch irgendwelche analytische Ausdrücke als eindeutige reguläre analytische Function definirt — z. B. durch gleichmässig convergirende Reihen von der Form $\Sigma f_\nu(x)$ bezw. $\Sigma f_\nu^{(n)}(x)$, wo die $f_\nu(x)$ in dem gedachten Bereiche reguläre algebraische oder transcendente Functionen bedeuten.

Auf der *Begrenzung* dieses Bereiches befinde sich eine Stelle α, für welche $f(x)$ mit sämmtlichen Ableitungen $f^{(n)}(x)$ für jedes endliche n noch eindeutig bestimmt, endlich und stetig sei. Wenn dann eine für irgendwelche Umgebung von $x = \alpha$ convergirende Potenzreihe $\mathfrak{P}(x-\alpha)$ existirt, dergestalt dass die Beziehung:

$$(1) \qquad f(x) = \mathfrak{P}(x-\alpha)$$

besteht für denjenigen Theil des Convergenzbezirkes von $\mathfrak{P}(x-\alpha)$, welcher in den ursprünglichen Definitionsbereich von $f(x)$ hineinfällt, so hat dieselbe sicher die Form:

(2) $$\mathfrak{P}(x-\alpha)=\sum_0^\infty \frac{f^{(\nu)}(\alpha)}{\nu!}(x-\alpha)^\nu.$$

Daraus folgt aber, dass unter den bezüglich der Beschaffenheit von $f(x)$ im Punkte α gemachten Voraussetzungen *zwei* und *nur* zwei Möglichkeiten denkbar sind, unter denen *keine* Potenzreihe $\mathfrak{P}(x-\alpha)$ von der gedachten Beschaffenheit *existiren kann*, nämlich:

1. Wenn die Reihe $\sum \frac{f^{(\nu)}(\alpha)}{\nu!}(x-\alpha)^\nu$ für $|x-\alpha|<\varepsilon$ *divergirt*, wie klein man auch die positive Grösse ε annehmen möge.
2. Wenn die Reihe $\sum \frac{f^{(\nu)}(\alpha)}{\nu!}(x-\alpha)^\nu$ zwar für irgend welche Umgebung der Stelle α *convergirt*, aber ihre Summe nicht den Werth $f(x)$ hat, wo ihr Convergenzbezirk noch in den Definitionsbereich von $f(x)$ hineinfällt.

Die erste dieser beiden Möglichkeiten bietet für unsere Vorstellung auch nicht die geringste Schwierigkeit dar. Da nämlich $f^{(n)}(\alpha)$, wenn auch für jedes endliche n endlich, mit unendlich wachsendem n *geradezu in der Regel* gleichfalls *in's Unendliche* wachsen wird*) (andernfalls würde ja die Reihe $\sum \frac{f^{(\nu)}(\alpha)}{\nu!}(x-\alpha)^n$ *beständig* convergiren, also ihre Summe eine ganze transcendente Function darstellen, was doch nur ein ganz specieller Fall wäre; das gleiche findet selbst dann noch statt, wenn $f^{(n)}(\alpha)$ mit n so unendlich wird, wie die n^{te} Potenz einer beliebig grossen endlichen Zahl), so liegt absolut keine Veranlassung dazu vor, an der Existenz von Functionen zu zweifeln, bei welchen für irgend welche Werthe $x=\alpha$ die Zunahme von $f^{(n)}(\alpha)$ für wachsende n so stark ist, dass die Reihe $\sum \frac{f^{(\nu)}(\alpha)}{\nu!}(x-\alpha)^\nu$ für keinen noch so kleinen Werth von $|x-\alpha|$ convergirt. Und es lassen sich auch mit Leichtigkeit *hinreichende* Bedingungen für die Art des Unendlichwerdens von $f^{(n)}(\alpha)$ für $n=\infty$ aufstellen, welche die *Convergenz* der obigen Reihe für jede noch so kleine Umgebung der Stelle α *definitiv ausschliessen.*

*) Dieser Umstand ist thatsächlich von manchen mathematischen Autoren völlig übersehen worden, indem sie die für die Existenz der Taylor'schen Reihe nothwendige Bedingung der „*Endlichkeit sämmtlicher Ableitungen*" dahin missverstanden, als müsse $f^n(\alpha)$ für jedes noch so grosse n *unter einer festen endlichen Grenze* bleiben. Auf diesem Missverständnisse beruht z. B. eine völlig irrthümliche Bemerkung des Herrn Mansion über den Rest der Taylor'sche Reihe und speciell über das oben erwähnte Beispiel von Du Bois Reymond. (Note sur quelques principes fondamentaux d'analyse" Art. III. — Annales de la Société scientifique de Bruxelles, 1879.) Desgleichen ein unzulänglicher Beweis des Taylor'schen Satzes von F. König. (Nouvelles démonstration du théorème de Taylor. Nouv. Annales: 2de Série, T. XIII, p. 270.)

So folgt z. B. aus dem Cauchy'schen Fundamentalkriterium zweiter Art, dass die Reihe für kein noch so kleines $|x - \alpha|$ convergiren kann, wenn für $\nu = \infty$

$$\lim\left\{\frac{|f^{(\nu-1)}(\alpha)|}{(\nu-1)!} : \frac{|f^{(\nu)}(\alpha)|}{\nu!}\right\} = \lim\left\{\nu \cdot \left|\frac{f^{(\nu-1)}(\alpha)}{f^{(\nu)}(\alpha)}\right|\right\} = 0$$

wird, oder anders geschrieben:

$$\left|\frac{f^{(\nu)}(\alpha)}{f^{(\nu-1)}(\alpha)}\right| > \nu$$

eine Bedingung, die sicher erfüllt ist, wenn von einer beliebigen Stelle $\nu \geqq n$ ab:

$$(3) \qquad \left|\frac{f^{(\nu)}(\alpha)}{f^{(\nu-1)}(\alpha)}\right| = \nu \cdot \psi(\nu)$$

ist, wo $\psi(\nu)$ eine positive Grösse bedeutet, die mit ν — wenn auch *beliebig langsam* in's Unendliche wächst.

Geht man, statt von dem Cauchy'schen Kriterium, von der Bemerkung aus, dass die Reihe $\sum \frac{f^{(\nu)}(\alpha)}{\nu!}(x - \alpha)^\nu$ sicher beständig divergirt, wenn für jedes noch so kleine positive ε und für $\nu \geqq n$ die Beziehung besteht:

$$\frac{|f^{(\nu)}(\alpha)|}{\nu!} \cdot \varepsilon^\nu \geqq 1$$

so gelangt man statt der Bedingung (3) zu der folgenden:

$$(4) \qquad \frac{|f^{(\nu)}(\alpha)|}{\nu!} \geqq (\psi(\nu))^\nu$$

welche, wegen $\nu! < \nu^\nu$, a fortiori erfüllt ist, falls für $\nu \geqq n$:

$$(6) \qquad |f^{(\nu)}(\alpha)| \geqq (\nu \cdot \psi(\nu))^\nu \\ \geqq e^{\nu\{\lg \nu + \varphi(\nu)\}}$$

wobei $\varphi(\nu) = \lg \psi(\nu)$ gleichfalls eine mit ν beliebig langsam in's Unendliche wachsende positive Grösse bedeutet.

Ich will nun zunächst ein überaus einfaches und, wie ich glaube, in jeder Hinsicht tadelfreies Beispiel*) einer Function mit der eben besprochenen Eigenschaft angeben. Es werde gesetzt:

---

*) Bei der a. a. O. von Du Bois Reymond angegebenen Reihe die mit der hier betrachteten formal sehr verwandt ist, nämlich:

$$f(x) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^{\nu+1}}{(2\nu!)} \frac{x^{2\nu}}{x^2 + a_\nu^2}$$

(wobei $a_\nu^2 > 0$, $\lim a_\nu = 0$) sind, wie man auf den ersten Blick erkennt, die Differentialquotienten n^{ter} Ordnung so complicirt, dass ihre explicite Aufstellung

$$(6)\qquad f(x)=\sum_0^\infty{}_\nu \frac{1}{\nu!}\,\frac{1}{1+a^\nu x}$$

wo a eine positive Zahl >1 bedeutet. Diese Reihe convergirt unbedingt und gleichmässig für die ganze x-Ebene mit Ausschluss einer beliebig kleinen Umgebung der Stellen $x=-a^0,\ -a^{-1},\ -a^{-2}\cdots$. Sie convergirt insbesondere auch noch für $x=0$ und zwar *gleichmässig* für jeden Bereich, welcher den Punkt $x=0$ auf der Begrenzung enthält *einschliesslich dieser Begrenzung*, sofern nur keine weitere Stelle der Strecke $\overline{0\,(-1)}$ im Innern oder auf der Begrenzung jenes Bereiches liegt. Denn in der That wird für alle solchen Werthe x der absolute Betrag von $\frac{1}{1+a^\nu x}$ eine gewisse angebbare Grösse nicht übersteigen, woraus dann ohne Weiteres die gleichmässige Convergenz der Reihe in dem behaupteten Umfange resultirt.

Das gleiche gilt von jeder Reihe, die sich durch n-malige Differentiation aus der obigen ergiebt, sodass also auch:

$$(7)\qquad f^{(n)}(x)=(-1)^n\cdot n!\sum_0^\infty{}_\nu \frac{1}{\nu!}\,\frac{a^{n\nu}}{(1+a^\nu x)^{n+1}}$$

gesetzt werden kann. Daraus folgt aber für $x=0$:

$$(8)\qquad \begin{cases} f(0)=\sum_0^\infty{}_\nu \frac{1}{\nu!}=e, \\ f^{(n)}(0)=(-1)^n\cdot n!\sum \frac{1}{\nu!}\,a^{n\nu}=(-1)^n\cdot n!\,e^{a^n} \end{cases}$$

also für hinlänglich grosse Werthe von n sicher:

$$\frac{|f^{(n)}(0)|}{n!}>(e^n)^n$$

woraus auf Grund der oben aufgestellten Bedingung (4) sofort erkannt wird, dass die Reihe $\sum \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!}x^\nu$ für jedes noch so kleine x *divergirt*, obschon $f(x)$ für $x=0$ mit sämmtlichen Ableitungen von jeder end-

äusserst umständlich erscheint. Diese wird nun a. a. O. in der That auch gar nicht geliefert, vielmehr wird nur gezeigt, dass $|f^{(\nu)}(x)|$ für jedes endliche n unter einer gewissen mit n endlich bleibenden Grenze liegt. Zur Bildung von $f^{(n)}(0)$ wird sodann die gliedweise Entwickelung der obigen Reihe nach Potenzen von x benützt, was einerseits eine unnöthige Weitläufigkeit der Rechnung zur Folge hat, andererseits aber auch den Nachtheil mit sich bringt, dass die *Stetigkeit* von $f^{(n)}(x)$ an der kritischen Stelle $x=0$ wohl aus allgemeinen Principien geschlossen, aber nicht *ad oculos* demonstrirt werden kann, wie es doch bei einem derartigen Beispiele wünschenswerth erscheint.

lichen Ordnung endlich und ausser in der Richtung der negativen reellen Axe auch durchweg stetig ist.

Man bemerkt, dass bei der eben betrachteten Reihe die auf der negativen reellen Axe gelegenen Punkte $-a^0$, $-a^{-1}$, $-a^{-2}\cdots$, welche die Häufungsstelle 0 haben, singuläre Stellen für die einzelnen Glieder sind. Verlegt man diese Stellen in die positive und negative imaginäre Axe, indem man in (6) x durch x^2 und a durch a^2 ersetzt, so kann man eine Function mit durchweg reellen Coefficienten herstellen, welche mit allen Ableitungen in der Umgebung der Nullstelle auf der *reellen* Axe *vorwärts* und *rückwärts* stetig ist, und für welche die *Mac Laurin'sche Reihe* dennoch *divergirt*. Man erhält auf diese Weise:

$$(9) \qquad f(x) = \sum_0^\infty {}_\nu \frac{1}{\nu!} \cdot \frac{1}{1+a^{2\nu}x^2}$$

$$= \frac{1}{2i} \sum_0^\infty {}_\nu \frac{1}{\nu!} \left\{ \frac{1}{a^\nu x - i} - \frac{1}{a^\nu x + i} \right\}$$

also:

$$(10) \qquad f^{(\nu)}(x) = \frac{1}{2i} \cdot n! \sum_0^\infty {}_\nu \frac{a^{n\nu}}{\nu!} \cdot \left\{ \frac{1}{(a^\nu x - i)^{n+1}} - \frac{1}{(a^\nu x + i)^{n+1}} \right\}$$

$$= \frac{1}{2i} \cdot n! \sum_0^\infty {}_\nu \frac{a^{n\nu}}{n!} \cdot \frac{(a^\nu x + i)^{n+1} - (a^\nu x - i)^{n+1}}{1+a^{2\nu}x^2}$$

Da hieraus folgt:

$$(11) \qquad \begin{cases} f^{(2m-1)}(0) = 0, \\ f^{(2m)}(0) \quad = (-1)^m \cdot (2m)!\, e^{a^{2m}}, \end{cases}$$

so erkennt man wiederum ganz direct (also ohne irgendwie functionentheoretische Gesichtspunkte zu Hülfe zu nehmen) dass die Mac Laurin'sche Reihe für jedes noch so kleine x divergirt, und es dürfte daher dieses Beispiel insbesondere geeignet sein, auch im Rahmen einer gewöhnlichen Vorlesung über Differentialrechnung die Möglichkeit dieses Vorkommnisses zu illustriren.

Was nun die *zweite* der oben erwähnten Eventualitäten betrifft, dass nämlich die Reihe $\sum \frac{f^{(\nu)}(\alpha)}{\nu!}(x-\alpha)^\nu$) zwar *convergiren*, aber ihre Summe von $f(x)$ *verschieden* sein könne, so scheint man, soviel ich weiss, bis zum heutigen Tage über das von Cauchy a. a. O. gegebene Beispiel:

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

nicht hinausgekommen zu sein. Indessen *fehlt* demselben aus zwei Gründen *die rechte Beweiskraft*: einmal (was auch Du Bois Reymond

in dem citirten Aufsatze ausdrücklich hervorhebt), weil hier $f(0)$ und $f^{(n)}(0)$ nicht „*eigentlich*" definirt sind, d. h. nicht *durch directes Einsetzen* von $x = 0$ aus einer der Definitionen:

$$e^{-\frac{1}{x^2}} = \sum_0^\infty {}^{\nu} (-1)^\nu \cdot \frac{1}{\nu!} \frac{1}{x^{2\nu}} \quad \text{oder:} \quad e^{-\frac{1}{x^2}} = \left(\sum_0^\infty {}^{\nu} \frac{1}{\nu!} \frac{1}{x^{2\nu}}\right)^{-1}$$

berechnet werden können, sondern lediglich auf Grund der zweiten Definition als $\lim f(\pm\varepsilon)$ für $\varepsilon = 0$ eine feste Bedeutung gewinnen;*) zweitens aber nach meinem Dafürhalten auch deshalb, weil das so definirte $f(0)$ mit allen Ableitungen den *besonderen* Werth *Null* hat, sodass von einer *convergirenden Mac Laurin'schen Reihe* auch wiederum nur *cum grano salis* die Rede sein kann, da dieselbe *formal eigentlich gar nicht existirt* — ein Mangel, der durch Einführung einer Function von der Form $f(x) = \varphi(x) + e^{-\frac{1}{x^2}}$ (wo $\varphi(x)$ entwickelbar) zwar *verdeckt*, aber in seinem *Wesen* doch nicht *gehoben* wird.

Man erhält nun aber völlig einwandfreie Beispiele dieser Art, wenn man in den oben betrachteten Reihen (6) und (9) den Coefficienten $\frac{1}{\nu!}$ durch $\frac{(-1)^\nu}{\nu!}$ ersetzt. Auf diese Weise entsteht aus (6):

$$(12) \qquad f(x) = \sum_0^\infty {}^{\nu} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \frac{1}{1 + a^\nu x} \quad \text{also:} \quad f(0) = e^{-1}$$

woraus:

$$(13) \qquad f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot n! \sum_0^\infty {}^{\nu} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \frac{a^{n\nu}}{(1 + a^\nu x)^{n+1}}$$

also:

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = (-1)^n e^{-a^n} = (-1)^n \left(\frac{1}{e}\right)^{a^n}.$$

Hier erkennt man aber: dass die Reihe:

$$(14) \qquad \sum_0^\infty {}^{\nu} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} x^\nu = \sum_0^\infty {}^{\nu} (-1)^\nu \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^{a^\nu} \cdot x^\nu = \varphi(x)$$

geradezu *beständig convergirt*. Dass sie aber nicht mit $f(x)$ übereinstimmen kann, geht daraus hervor, dass $f(x)$ wegen der in unmittelbarer Nachbarschaft der Nullstelle sich häufenden singulären Stellen $x = -a^{-\nu}$ für *keine noch so kleine Umgebung der Nullstelle nach Potenzen von x entwickelbar sein kann* (wie sich mit aller Strenge aus den Betrachtungen des folgenden Paragraphen ergiebt).

---

*) Dieser Einwand wird auch durch das Raisonnement des Herrn Hermite (Cours d'Analyse, T. I, p. 203) nicht entkräftet.

Es erschien mir indessen vom didaktischen Standpunkte aus wünschenswerth, die *Nicht-Entwickelbarkeit* der durch Gl. (12) definirten Function $f(x)$ auch erweisen zu können, *ohne* auf die Theorie der analytischen Functionen einer *complexen* Variablen zu recurriren.

Hierzu würde es offenbar genügen, die *Nicht-Uebereinstimmung* von $f(x)$ mit der Mac Laurin'schen Reihe $\varphi(x)$ *für einen einzigen positiven Werth* von x nachzuweisen.

Angenommen nämlich, die Beziehung:

$$f(x) = \varphi(x)$$

gelte für ein beliebig kleines positives Intervall $0 \leq x < h$, so wähle man eine positive Grösse x_0 so, dass $\frac{1}{2} h < x_0 < h$: alsdann lassen sich — lediglich unter Anwendung des Cauchy'schen Satzes über die Umordnung unbedingt convergirender Doppelreihen — $f(x)$ und $\varphi(x)$ in Reihen nach positiven ganzen Potenzen von $(x - x_0)$ umformen, von denen die erste für $0 \leq x \leq 2x_0$, die zweite beständig convergirt. Aus der Uebereinstimmung der Summen dieser beiden Potenzreihen für diejenige Umgebung von x_0, welche dem Intervalle: $0 \leq x < h$ angehört (d. h. also für: $2x_0 - h < x < h$) folgt dann nach einem bekannten Satze deren Identität und somit die Gültigkeit der Beziehung: $f(x) = \varphi(x)$ für das Intervall: $0 \leq x \leq 2x_0$, wo jetzt: $2x_0 > h$. Durch fortgesetzte Anwendung dieser Schlussweise ergiebt sich offenbar schliesslich, dass für *jeden* endlichen positiven Werth x: $f(x) = \varphi(x)$ sein muss, sofern diese Beziehung für eine beliebig kleine, positive Nachbarschaft der Stelle $x = 0$ gilt.

Daraus folgt dann aber umgekehrt, dass die Gleichung $f(x) = \varphi(x)$ für kein noch so kleines Intervall $0 \leq x < h$ bestehen kann, sobald sich zeigen lässt, dass für irgend einen einzigen positiven Werth x' die Werthe von $f(x')$ und $\varphi(x')$ verschieden sind.

Leider ist es mir bisher nicht gelungen, diesen Nachweis *ganz allgemein*, d. h. für ganz beliebige, nur die Einheit übersteigende Werthe der in $f(x)$ und $\varphi(x)$ auftretenden Constante a zu führen. Dagegen gestaltet sich der Beweis überaus einfach für solche Werthe von a, welche nicht unter einer gewissen, sogleich näher anzugebenden Grösse liegen, und dies genügt immerhin, um das fragliche Beispiel auch für eine gewöhnliche Vorlesung über Differentialrechnung nutzbar zu machen.

Man hat nämlich für jedes $x \leq 1$ nach Gl. (14):

$$\varphi(x) < \frac{1}{e}. \tag{15}$$

Andererseits ist für jedes positive x nach Gl. (12):

$$f(x) > \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+ax}. \tag{16}$$

Legt man hier x denjenigen Werth bei, für welchen der rechts stehende Ausdruck ein Maximum wird, nämlich: $x = a^{-\frac{1}{2}}$, so folgt:

(17) $$f\left(a^{-\frac{1}{2}}\right) > \frac{a^{\frac{1}{2}} - 1}{a^{\frac{1}{2}} + 1}$$

und daher:

(18) $$f\left(a^{-\frac{1}{2}}\right) \geqq \frac{1}{e} \quad \text{und somit:} \quad > \varphi\left(a^{-\frac{1}{2}}\right),$$

sobald:

(19) $$\frac{a^{\frac{1}{2}} - 1}{a^{\frac{1}{2}} + 1} \geqq \frac{1}{e},$$

d. h. falls:

(20) $$a \geqq \left(\frac{e+1}{e-1}\right)^2 = 4,68\ldots.$$

Damit ist aber nach dem oben gesagten für solche Werthe von a, welche der Ungleichung (20) genügen, die *Nicht-Entwickelbarkeit* von $f(x)$ vollständig bewiesen.

Zur näheren Erläuterung dieses eigenthümlichen Verhaltens von $f(x)$ in der Nähe der Nullstelle möge hier noch folgendes bemerkt werden. Setzt man

(21) $$f(x) = f_1(x) - f_2(x)$$

wo:

(22) $$\begin{cases} f_1(x) = \sum\limits_0^\infty \frac{1}{(2\nu)!} \cdot \frac{1}{1 + a^{2\nu} x}, \\ f_2(x) = \sum\limits_0^\infty \frac{1}{(2\nu+1)!} \cdot \frac{1}{1 + a^{2\nu+1} x}, \end{cases}$$

so wird:

(23) $$\begin{cases} \frac{f_1^{(n)}(x)}{n!} = (-1)^n \cdot \sum\limits_0^\infty \frac{1}{(2\nu)!} \cdot \frac{(a^n)^{2\nu}}{(1 + a^{2\nu} x)^{n+1}}, \\ \frac{f_2^{(n)}(x)}{n!} = (-1)^n \cdot \sum\limits_0^\infty \frac{1}{(2\nu+1)!} \cdot \frac{(a^n)^{2\nu+1}}{(1 + a^{2\nu+1} x)^{n+1}}, \end{cases}$$

also:

(24) $$\begin{cases} \frac{f_1^{(n)}(0)}{n!} = (-1)^n \cdot \frac{1}{2}\left(e^{a^n} + e^{-a^n}\right), \\ \frac{f_2^{(n)}(0)}{n!} = (-1)^n \cdot \frac{1}{2}\left(e^{a^n} - e^{-a^n}\right), \end{cases}$$

woraus man sofort erkennt, dass die Mac Laurin'sche Reihe für $f_1(x)$ und $f_2(x)$ *divergiren* muss, da ihre Coefficienten mit n so wie e^{a^n} in's

Unendliche wachsen. Bildet man nun: $f^{(n)}(x) = f_1^{(n)}(x) - f_2^{(n)}(x)$, so hebt sich *für den einen speciellen Werth* $x = 0$ die Gesammtheit derjenigen positiven Bestandtheile, welche zusammen e^{a^n} ergeben, gegen die entsprechenden negativen weg, und hierdurch kommt zwar die *Convergenz* der Mac Laurin'schen Reihe $\sum \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} x^\nu$ zu Stande; dagegen heben sich die *in unmittelbarer Nähe der Nullstelle* gelegenen *Singularitäten* von $f_1(x)$ und $f_2(x)$ *nicht* heraus, und deshalb bleibt die *Nicht-Entwickelbarkeit*, die man bei $f_1(x)$ und $f_2(x)$ sofort an der *Divergenz* der Mac Laurin'schen Reihe erkennt, auch für:

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x)$$

trotz der Convergenz jener Reihe bestehen. Es findet nämlich für beliebig *kleine* positive Werthe $x = x_0$ zwischen den positiven und negativen Gliedern von $f(x)$ ein ähnlicher *Ausgleich*, wie an der Nullstelle, *nicht* mehr statt; genauer ausgedrückt: es nimmt $f^{(n)}(x_0)$ mit wachsendem n immerhin *so grosse* Werthe an, dass das Convergenzintervall der Taylor'schen Reihe $\sum \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{(\nu!)} (x - x_0)^\nu$ mit x_0 selbst unter jede noch so kleine Grösse herabsinkt*). Der nahe liegende

*) Es ist zwar $\frac{1}{n!} \cdot f^{(n)}(x)$ für jedes *bestimmte*, wenn auch noch so grosse n, eine *stetige* Function von x für die positive Nachbarschaft von $x = 0$, sodass also zu bel. klein gegebenem δ sich x_0 stets so bestimmen lässt, dass:

$$\frac{1}{n!} \left| f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0) \right| < \delta \quad \text{für} \quad x \leqq x_0.$$

Allein diese Stetigkeit ist eine *ungleichmässige*, wenn man $\frac{1}{n!} f^{(n)}(x)$ als Function der *beiden* Veränderlichen x und n auffasst, d. h. man muss mit zunehmendem n den Werth von x_0 beständig verkleinern, um die obige Ungleichung zu erzielen. Hieraus erklärt es sich, dass $\lim\limits_{n=\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$ von unendlich hoher Ordnung $\left(\text{so, wie } \lim \left(\frac{1}{e}\right)^{a^n}\right)$ *verschwindet*, während für *beliebig kleine positive Werthe* x_0: $\lim\limits_{n=\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$ *nicht einmal unter einer endlichen Grenze* bleiben kann $\left(\text{da ja sonst die Taylor'sche Reihe } \sum \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} (x - x_0)^\nu \text{ einen Convergenzradius } \geqq 1 \text{ besitzen würde}\right)$. Der Grund dieses Verhaltens liegt darin, dass die Reihe:

$$\frac{|f^n(x)|}{n!} = \sum_0^\infty{}_\nu \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \cdot \frac{a^{n\nu}}{(1 + a^\nu x)^{n+1}}$$

bei festgehaltenem, beliebig grossen n zwar *gleichmässig* convergent für alle $x \geqq 0$; dass sich aber für $x < 1$ die Convergenz der Reihe mit *wachsendem* n

Versuch, dies durch directe Rechnung zu constatiren, ist mir freilich bisher nicht geglückt. Indessen ergiebt sich die Richtigkeit der eben ausgesprochenen Behauptung sowohl aus den functionentheoretischen Betrachtungen des folgenden Paragraphen, als auch — ohne deren Beihilfe — aus einem Satze, den ich weiter unten (§ 4, gegen Ende) beweise, und welcher, auf den vorliegenden Fall angewendet, lehrt, dass in jeder beliebigen Nähe der Stelle $x = 0$ positive Werthe x_0 liegen müssen, für welche das Convergenzintervall von $\sum \frac{f^{(\nu)}(x)}{\nu!}(x-x_0)^\nu$ die Null zur Grenze hat*).

Will man statt der eben betrachteten Function, welche bei reell veränderlichen x an der Stelle $x = 0$ mit sämmtlichen Differentialquotienten *nur vorwärts* stetig ist, wiederum eine solche construiren, für welche das Gleiche sowohl *vorwärts* als *rückwärts* stattfindet, so braucht man nur in (9) den Coefficienten $\frac{1}{\nu!}$ durch $\frac{(-1)^\nu}{\nu!}$ zu ersetzen. Alsdann ergiebt sich:

$$(25) \qquad f(x) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \cdot \frac{1}{1 + a^{2\nu} x^2} \quad \text{also:} \quad f(0) = e^{-1}$$

und daraus:

$$(26) \qquad f^{(2m-1)}(0) = 0 \quad f^{(2m)}(0) = (2m)!\,(-1)^m \cdot e^{-a^{2m}}.$$

Die Mac Laurin'sche Reihe würde auch hier wiederum beständig convergiren, stellt aber nicht die Function $f(x)$ dar. Bezeichnet man ihre Summe mit $\varphi(x)$, sodass also:

$$(27) \qquad \varphi(x) = \sum_0^\infty (-1)^\nu \left(\frac{1}{e}\right)^{a^{2\nu}} \cdot x^{2\nu},$$

so stimmt $\varphi(x)$, $\varphi^{(n)}(x)$ nur für $x = 0$ mit $f(x)$, $f^{(n)}(x)$ überein. Bildet man daher:

$$(28) \quad F(x) = f(x) - \varphi(x) = \sum_0^\infty (-1)^\nu \left\{ \frac{1}{\nu!} \frac{1}{1 + a^{2\nu} x^2} - \left(\frac{1}{e}\right)^{a^{2\nu}} \cdot x^{2\nu} \right\},$$

so liefert dieselbe ein Beispiel — und, wie ich glaube, das *erste* bekannte Beispiel — einer Function, welche für alle endlichen *reellen* x incl. $x = 0$ *mit sämmtlichen Ableitungen endlich und stetig* und auch noch für $x = 0$ *eigentlich* definirt ist, dabei aber (gleichwie die für

---

beständig *verzögert*, und zwar um so mehr, je kleiner x wird — wie man sofort erkennt, wenn man das allgemeine Glied auf die Form bringt:

$$\frac{(-1)^\nu}{\nu!} \cdot \frac{a^{n\nu}}{(1 + a^\nu x)^{n+1}} = \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \cdot \frac{1}{1 + a^\nu x} \cdot \frac{1}{(x + a^{-\nu})^n}.$$

*) Vgl. die Fussnote zu dem eben citirten Satze, S. 181.

$x=0$ *nicht eigentlich* definirte Function $e^{-\frac{1}{x^2}}$) die Eigenschaft besitzt, in beliebiger Nähe der Nullstelle *nicht* zu verschwinden, obschon sie für $x=0$ *mit sämmtlichen Ableitungen verschwindet.* Damit erscheint aber die von Lagrange im 5. Capitel seiner Théorie des Fonctions*) geäusserte Ansicht, dass eine stetige Function, welche für irgend einen Werth einer *reellen* Variablen mit sämmtlichen Ableitungen verschwindet, *identisch verschwinden müsse*, nunmehr endgültig widerlegt.

§ 2.

Der allgemeine Typus der im vorigen Paragraphen betrachteten Reihen lautet offenbar:

$$f(x)=\sum_0^\infty \frac{c_\nu}{\alpha_\nu - x},$$

wo $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \ldots$ eine abzählbare Punktmenge bedeutet,**) welche (mindestens) einen nicht zur Menge gehörigen Grenzpunkt α besitzt: gerade dadurch, dass die Stelle $x=\alpha$ für *kein einzelnes Glied* der $f(x)$ definirenden Reihe eine singuläre ist, entsteht an der Stelle $x=\alpha$ für $f(x)$ jene besondere Singularität, welche $f(x)$ und $f^{(n)}(x)$ endlich und nach allen denjenigen Richtungen stetig sein lässt, in denen nicht unendlich viele Punkte der Menge (α_ν) liegen. Es fragt sich aber, ob auch wirklich in diesem Falle α stets eine singuläre Stelle für $f(x)$ sein muss. Dies ist nämlich keineswegs selbstverständlich: denn wenn auch in jeder noch so kleinen Umgebung von α unendlich viele Punkte α_ν liegen, welche *für je ein Glied* der obigen Reihe singuläre Stellen sind, so wäre es gerade wegen der Unbegrenztheit ihrer Anzahl möglich, dass sie sich zusammengenommen in ihrer Wirkung annulliren.***)

*) Oeuvres complètes, T. IX, p. 63.

**) Ich bemerke, dass die folgenden Betrachtungen auch Gültigkeit behalten für Reihen von der etwas allgemeinen Form:

$$\sum_0^\infty \frac{c_\nu}{(\alpha_\nu - x)^{m_\nu}},$$

wo die m_ν auch *negativ gebrochene* oder *beliebige rationale positive* Zahlen bedeuten.

***) Gerade in dieser Hinsicht enthält der oben erwähnte Versuch von Du Bois Reymond, durch Condensation eine Function der fraglichen Art herzustellen eine Beweislücke. Es wird nämlich eigentlich nur gezeigt, dass man eine Function bilden kann, welche die betreffende Singularität in einer beliebig grossen *endlichen* Anzahl (n) von Punkten eines gewissen Intervalles besitzt, und dass diese Function auch noch für $n=\infty$ einen bestimmten Sinn behält. Alsdann aber

Es sei nun irgend ein einfach zusammenhängendes von einer Curve C begrenztes Flächenstück gegeben, welches keinen Punkt der abzählbaren Menge (α_ν) im Innern oder auf der Begrenzung enthält, während auf der letzteren der eine Grenzpunkt α (aber kein weiterer, falls solche vorhanden) sich befinden soll. Ist dann $\Sigma|c_\nu|$ convergent, so stellt nach einem bekannten Satze des Herrn Weierstrass die obige Reihe eine *innerhalb* C reguläre analytische Function dar. Dies gilt aber auch noch für jeden Punkt x' *auf der Curve* C — mit eventueller Ausnahme des einen Punktes α. Denn da nach Voraussetzung x' weder der Menge (α_ν) angehören, noch ein Grenzpunkt derselben sein kann, so existirt stets eine gewisse Umgebung von x', innerhalb deren kein Punkt der Menge (α_ν) liegt, sodass also $f(x)$ für diese Umgebung wiederum regulär bleibt.

Um nun das Verhalten von $f(x)$ für die Stelle $x = \alpha$ zu untersuchen, bemerke man zunächst, dass allemal, wenn man den Punkt α durch einen der Menge selbst angehörigen Punkt — etwa α_0 — ersetzt, dieser sicher eine *singuläre* Stelle für $f(x)$ sein muss (gleichgültig, ob α_0 ein Grenzpunkt der Menge ist oder nicht). Man erkennt dies, wie Herr Goursat gezeigt hat,*) indem man die obige Reihe folgendermassen in drei Partien zerlegt:

$$f(x) = \frac{c_0}{\alpha_0 - x} + \sum_1^n \frac{c_\nu}{\alpha_\nu - x} + \sum_{n+1}^\infty \frac{c_\nu}{\alpha_\nu - x}$$
$$= f_1(x) + f_2(x) + f_3(x),$$

wo n so fixirt sein soll, dass $\sum\limits_{n+1}^\infty |c_\nu| = \vartheta \cdot |c_0|$ $(\vartheta < 1)$ wird, was in Folge der Convergenz von $\Sigma|c_\nu|$ stets möglich ist. Alsdann ist $f_2(x)$ regulär für eine gewisse Umgebung der Stelle α_0, während $f_1(x)$ in α_0 eine singuläre Stelle besitzt, welche durch $f_3(x)$ wie mit Hülfe der Bedingung: $\sum\limits_{n+1}^\infty |c_\nu| = \vartheta \cdot |c_0|$ leicht zu ersehen ist, *nicht* annullirt werden kann.

Tritt sodann an die Stelle des *einen* Punktes α_0 eine unendliche Anzahl solcher Punkte, welche auf der Curve C oder irgendwelchen Bögen derselben überall dicht liegen, so lässt sich weiter folgern, dass

heisst es (a. a. O. p. 617): „*Es wäre freilich noch direct zu zeigen, dass die* (bei dem eben erwähnten Grenzübergange resultirende) *Function* $F(x)$ *nicht entwickelbar ist, doch wollen wir hier diese Rechnung nicht anstellen.*“ — Ich halte es für sehr zweifelhaft, ob sich das hier überhaupt auf dem Wege *blosser Rechnung* erweisen lässt.

*) Sur les Fonctions à Espaces lacunaires. Bulletin des Sciences mathématiques, 1887. 2ième Série, T. XI, p. 109.

jeder solche Bogen eine *singuläre Linie* für $f(x)$ sein muss, sodass also für keinen Punkt α' eines solchen Bogens eine Reihe $\mathfrak{P}(x-\alpha')$ existirt, welche innerhalb C mit $f(x)$ übereinstimmt.

Die obige Schlussweise beruht nun aber wesentlich darauf, dass der Term $\frac{c_0}{x-\alpha_0}$ *wirklich* in $f(x)$ *vorkommt*, während in dem hier zu betrachtenden Falle die Existenz eines Gliedes von der Form $\frac{c}{x-\alpha}$ gerade ausgeschlossen ist, da ja α der Menge der α_ν nicht angehören sollte.

Es lässt sich indessen zeigen, dass auch in diesem Falle α stets eine singuläre Stelle für $f(x)$ ist, sofern man nur die Menge (α_ν) der einzigen Beschränkung unterwirft, *dass in jeder Nähe von α solche α_ν vorhanden sind, die höchstens in Linien* (aber nicht in Flächentheilen) *oder überhaupt nicht überall dicht liegen.**)

Angenommen nämlich $f(x)$ wäre für die Stelle α regulär, so müsste das Gleiche für alle Stellen innerhalb eines gewissen um α zu beschreibenden Kreises der Fall sein. Dies ist aber in Folge der über die Vertheilung der α_ν gemachten Voraussetzung unmöglich, da nach dem angeführten Satze innerhalb jenes Kreises stets singuläre Punkte oder Linien von $f(x)$ liegen müssen.

Die Möglichkeit dieser Schlussweise bleibt aber unverändert bestehen, wenn an die Stelle des einen Grenzpunktes α eine beliebige Anzahl solcher Punkte tritt, die auch auf C oder irgend einem Bogen von C überall dicht liegen dürfen, sofern nur die Punkte α_ν in der Umgebung jedes solchen Punktes α der oben angegebenen Bedingung genügen, und es gilt somit der folgende Satz:

Befinden sich auf der geschlossenen Curve C beliebig viele Grenzpunkte α der durchweg **ausserhalb** des Bereiches (C) gelegenen Punktmenge (α_ν), so ist für die innerhalb (C) reguläre analytische Function:

$$f(x) = \sum_0^\infty{}_\nu \frac{c_\nu}{\alpha_\nu - x} \quad \left(\text{wo } \sum_0^\infty{}_\nu |c_\nu| \text{ convergent}\right)$$

jeder Punkt α ein singulärer Punkt und jeder Curvenbogen von C, auf dem solche Punkte α überall dicht

---

*) Damit ist nicht ausgeschlossen, dass ein *Theil* der Menge (α_ν) in der Nähe von α auch in Flächentheilen überall dicht liegt. Der Beweis behält sogar noch seine Gültigkeit, wenn die Menge (α_ν) in der Nähe von α *ausschliesslich* aus Punkten besteht, welche in Flächentheilen überall dicht liegen, sofern nur irgendwo auf der *Begrenzung* derselben in jeder Nähe von α stets auch Punkte α_ν (nicht bloss Grenzpunkte) liegen.

liegen, eine singuläre Linie, sofern in beliebiger Nähe jedes Punktes α stets Punkte α_ν vorhanden sind, welche höchstens in Linien (nicht in Flächentheilen) überall dicht liegen.

Beispiele solcher Punktmengen sind:

$$\alpha_\nu = p_\nu \cdot \varepsilon^\nu \quad \alpha_{\mu,\nu} = p_\mu \varepsilon^\nu \quad \begin{pmatrix} \nu = 0, 1, 2, \ldots \\ \mu = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}$$

wo p_ν positiv und für jedes endliche $\nu > 1$, dagegen $\lim_{\nu=\infty} p_\nu = 1$ $\left(\text{z. B. } p_\nu = 1 + \frac{1}{\nu+1},\ p_\nu = 1 + \frac{1}{2^\nu},\ p_\nu = e^{\frac{1}{\nu+1}} \text{ etc.}\right)$, während ε eine complexe Zahl mit dem absoluten Betrage 1, aber **keine** Einheitswurzel sein soll, also $\varepsilon = e^{2s\pi i}$, wo s eine Irrationalzahl bedeutet. Die Punkte ε^ν ($\nu = 0, 1, 2 \ldots$) liegen dann auf dem Einheitskreise überall dicht, während die Punkte $\alpha_\nu = p_\nu \cdot \varepsilon^\nu$, $\alpha_{\mu,\nu} = p_\mu \cdot \varepsilon^\nu$ durchweg **ausserhalb** des Einheitskreises liegen, aber alle Punkte desselben zu Grenzpunkten haben. Dabei nähern sich mit wachsendem ν die Punkte $\alpha_\nu = p_\nu \cdot \varepsilon^\nu$ in spiralartiger Anordnung asymptotisch dem Einheitskreise und liegen *nirgends* (auch auf keiner Linie) überall dicht, während die Punkte $\alpha_{\mu,\nu} = p_\mu \cdot \varepsilon_\nu$ auf allen um den Nullpunkt concentrischen Kreisen mit den Radien p_μ ($\mu = 0, 1, 2 \ldots$), aber nicht in irgendwelchen Flächentheilen überall dicht liegen.

§ 3.

Auf Grund der im vorigen Paragraphen angestellten Betrachtung sind wir nunmehr im Stande, Reihen zu construiren, welche im Innern und auf der Begrenzung eines gewissen Bereiches — etwa des Einheitskreises um den Nullpunkt — durchweg endliche Ableitungen jeder endlichen Ordnung besitzen und dennoch in beliebig vielen, auch unendlich vielen auf dem Kreise überall dicht liegenden Punkten α *nicht* nach Potenzen von $(x - \alpha)$ entwickelbar sind, also in dem zuletzt genannten Falle eine analytische Fortsetzung über den Einheitskreis hinaus nicht zulassen.

Es seien also *ausserhalb* des Einheitskreises unendlich viele Punkte α_ν gegeben, welche auf der Peripherie desselben beliebig viele Grenzpunkte α besitzen sollen. Man hat alsdann für jedes endliche ν: $|\alpha_\nu| > 1$, während für $\nu = \infty$ entweder geradezu $\lim |\alpha_\nu| = 1$ ist oder wenigstens die untere Unbestimmtheitsgrenze von α_ν den Werth 1 haben muss (mit anderen Worten: es können die Punkte α_ν auch noch *ausserhalb* des Einheitskreises beliebig viele Grenzpunkte besitzen). In der Umgebung jedes auf dem Einheitskreise gelegenen Grenzpunktes α sollen die α_ν der in dem Satze des vorigen Paragraphen statuirten Bedingung

genügen. Bedeutet dann $\Sigma|c_\nu|$ eine convergirende Reihe, so ist die Reihe:

(1) $$f(x) = \sum_0^\infty {}^{\nu} \frac{c_\nu}{\alpha_\nu - x}$$

zunächst innerhalb des Einheitskreises gleichmässig convergent und kann für diesen Bereich in die ebendaselbst convergirende Potenzreihe:

(2) $$f(x) = \sum_0^\infty {}^{\lambda} A_\lambda x^\lambda \quad \text{wo:} \quad A_\lambda = \sum_0^\infty {}^{\nu} \frac{c_\nu}{\alpha_\nu^{\lambda+1}}$$

umgeformt werden. Man kann nun aber durch eine passende Wahl der c_ν leicht erzielen, dass die Reihe (1), wie auch die Potenzreihe (2) auch noch *auf der Peripherie* des Einheitskreises unbedingt und gleichmässig convergire. Da nämlich für $|x| \leqq 1$ die Beziehung besteht:

$$|\alpha_\nu - x| \geqq |\alpha_\nu| - |x| \geqq |\alpha_\nu| - 1,$$

so hat man insbesondere für alle Punkte x auf der Peripherie:

$$\left| \frac{|\alpha_\nu| - 1}{\alpha_\nu - x} \right| \leqq 1$$

und es wird daher die Reihe (1) noch auf dem gesammten Einheitskreise unbedingt und gleichmässig convergiren, falls die Reihe

$$\sum \frac{|c_\nu|}{|\alpha_\nu| - 1}$$

convergirt, also für:

$$c_\nu = (|\alpha_\nu| - 1) \cdot c_\nu'$$

wo c_ν' das Glied einer absolut convergirenden Reihe bedeutet. Zugleich erkennt man, dass dann auch die Potenzreihe (2) auf dem Einheitskreise noch unbedingt und gleichmässig convergirt, denn man hat:

$$\sum_0^\infty {}^{\lambda} |A_\lambda x^\lambda|_{|x|=1} = \sum_0^\infty {}^{\lambda} \left| \sum_0^\infty {}^{\nu} \frac{c_\nu}{\alpha_\nu^{\lambda+1}} \right|$$

$$\leqq \sum_0^\infty {}^{\nu} |c_\nu| \sum_0^\infty {}^{\lambda} \left| \frac{1}{\alpha_\nu} \right|^{\lambda+1}$$

$$= \sum_0^\infty {}^{\nu} \frac{|c_\nu|}{|\alpha_\nu| - 1}.$$

Ferner folgt aus (1) und (2) durch n malige Differentiation:

(3) $$f^{(n)}(x) = n! \sum_0^\infty {}^{\nu} \frac{c_\nu}{(\alpha_\nu - x)^{n+1}}$$

$$= \sum_n^\infty {}^{\lambda} \lambda(\lambda - 1) \cdots (\lambda - n + 1) A_\lambda x^{\lambda-n}$$

zunächst wieder für das Innere des Einheitskreises. Es werden aber auch diese beiden Reihen für irgend ein bestimmtes n noch auf dem Einheitskreise unbedingt und gleichmässig convergiren und demgemäss dort auch noch die n^{te} Ableitung von $f(x)$ darstellen, wenn die c_ν so gewählt werden, dass die Reihe:

$$\sum \frac{|c_\nu|}{(|\alpha_\nu| - 1)^{n+1}}$$

convergirt, was man offenbar wiederum erzielen kann, wenn man setzt:

$$c_\nu = (|\alpha_\nu| - 1)^{n+1} \cdot c_\nu' \quad \text{wo} \quad \Sigma |c_\nu'| \text{ convergirt.}$$

Man erkennt zugleich, dass bei dieser Wahl der c_ν die obige Reihe auch *a fortiori* für jedes kleinere n convergirt, falls schlechthin $\lim |\alpha_\nu| = 1$ ist; hat dagegen nur die *untere Unbest.-Grenze* von $|\alpha_\nu|$ den Werth 1, so erzielt man dasselbe durch die Substitution:

$$c_\nu = \left(\frac{|\alpha_\nu| - 1}{|\alpha_\nu|}\right)^{n+1} \cdot c_\nu.$$

Daraus folgt dann zunächst wieder ohne Weiteres die unbedingte und gleichmässige Convergenz der Reihe $\sum \frac{c_\nu}{(\alpha_\nu - x)^{n+1}}$ für alle Punkte der Peripherie, während das Gleiche für die entsprechende Potenzreihe erkannt wird aus der Beziehung:

$$\sum_n^\infty{}^\lambda \lambda \cdot (\lambda - 1) \cdots (\lambda - n + 1) \, |A_\lambda|$$

$$\leqq \sum_n^\infty{}^\lambda \lambda \cdot (\lambda - 1) \cdots (\lambda - n + 1) \sum_0^\infty \frac{|c_\nu|}{|\alpha_\nu|^{\lambda+1}}$$

$$\leqq \sum_0^\infty{}^\nu c_\nu \cdot \left|\frac{1}{\alpha_\nu}\right|^{n+1} \sum_0^\infty{}^\lambda (\lambda + 1)(\lambda + 2) \cdots (\lambda + n) \left|\frac{1}{\alpha_\nu}\right|^\lambda$$

$$= n! \sum_0^\infty{}^\nu \frac{|c_\nu|}{(|\alpha_\nu| - 1)^{n+1}}.$$

Nun lassen sich aber die c_ν in mannigfacher Weise geradezu so fixiren, dass die Reihe:

$$\sum \frac{|c_\nu|}{(|\alpha_\nu| - 1)^m}$$

nicht nur für alle Werthe m bis zu irgend einem bestimmten hin, sondern geradezu für *jedes* m (ohne obere Grenze) convergirt.

Man erzielt dieses Resultat im Falle $\lim |\alpha_\nu| = 1$ (d. h. falls die Punktmenge α_ν keine weiteren Grenzpunkte besitzt, als die auf der Peripherie des Einheitskreises gelegenen) in der einfachsten Weise, indem man setzt:

(4) $$c_\nu = (|\alpha_\nu| - 1)^\nu \cdot b_\nu,$$

wo die b_ν ganz beliebige Grössen bedeuten, deren absolute Beträge unter einer endlichen Grenze g bleiben. Hierbei ergiebt sich nämlich:

$$\sum_0^\infty{}^\nu \frac{|c_\nu|}{(|\alpha_\nu|-1)^m} = \sum_0^\infty{}^\nu |b_\nu| (|\alpha_\nu|-1)^{\nu-m},$$

also:

(5) $$\sum_m^\infty{}^\nu \frac{|c_\nu|}{(|\alpha_\nu|-1)^m} = \sum_0^\infty{}^\nu |b_{m+\nu}| (|\alpha_{m+\nu}|-1)^\nu$$

$$< g \cdot \sum_0^\infty{}^\nu (|\alpha_{m+\nu}|-1)^\nu,$$

wo die rechts stehende Reihe wegen: $\lim (|\alpha_\nu|-1) = 0$ von einer bestimmten Stelle ab stärker convergirt, als jede convergente geometrische Reihe.

Besitzt dagegen die Punktmenge α_ν auch Grenzpunkte *ausserhalb* des Einheitskreises, so genügt es offenbar, wenn man in (4) b_ν durch: $\frac{b_\nu}{|\alpha_\nu|^\nu}$ ersetzt, wobei in dem besonderen Falle, dass auch der Punkt ∞ ein Grenzpunkt der α_ν ist, die b_ν nöthigenfalls als Glieder einer beliebigen absolut convergirenden Reihe zu wählen sind, während sie in jedem anderen Falle wieder nur der Bedingung $|b_\nu| < g$ zu genügen haben.

Andere Bestimmungsweisen für die Coefficienten c_ν ergeben sich folgendermassen. Man setze zur Abkürzung:

(6) $$\frac{1}{|\alpha_\nu|-1} = q_\nu \quad \text{d. h.} \quad |\alpha_\nu| = 1 + \frac{1}{q_\nu},$$

wo also q_ν wesentlich positiv und für $\nu = \infty$ entweder geradezu $\lim q_\nu = \infty$ oder zum mindesten die obere Unbestimmtheitsgrenze von q_ν unendlich wird. Alsdann hat man identisch:

(7) $$\frac{|c_\nu|}{(|\alpha_\nu|-1)^m} = |c_\nu| \cdot q_\nu^m = |c_\nu \cdot r_\nu| \cdot \frac{q_\nu^m}{r_\nu}$$

und wenn daher r_ν positiv und so gewählt wird, dass für jeden noch so grossen Werth von m:

(8) $$\lim_{\nu=\infty} \frac{q_\nu^m}{r_\nu} = \lim \frac{(e^m)^{\lg q_\nu}}{r_\nu} = 0$$

wird — was z. B. für $\lim q_\nu = \infty$ stets der Fall ist, wenn man setzt: *)

---

*) Wäre nur die obere Unbestimmtheitsgrenze von $q_\nu = \infty$, so würde man der Forderung beispielsweise genügen können, indem man setzt:

$$r_\nu = b^{-\nu \cdot q_\nu}$$

oder:

$$r_\nu = \nu \cdot [\lg q_\nu]!$$

(9) $$r_\nu = b^{-q_\nu} \qquad (b < 1)$$

oder auch:

(10) $r_\nu = [\lg q_\nu]!$ (wo $[x]$ die grösste in x enthaltene ganze Zahl), so genügt es nach Gleichung (7) für den gewünschten Zweck in jedem Falle, wenn sodann:

(11) $$|c_\nu| \cdot r_\nu = |c_\nu'| \quad \text{also:} \quad c_\nu = \frac{c_\nu'}{r_\nu}$$

genommen wird, wo $|c_\nu'|$ das Glied einer convergenten Reihe bedeutet. Wenn aber hierbei schon $\frac{q_\nu^m}{r_\nu}$ für jedes noch so grosse m das Glied einer convergenten Reihe bildet, was z. B. stets der Fall ist für $q_\nu \gtrsim \nu$ und $r_\nu = b^{-q_\nu}$, ebenso für $q_\nu \gtrsim a^\nu$ $(a > 1)$ und $r_\nu = \nu!$, so reicht es schon hin, wenn man setzt:

(12) $$|c_\nu| \,.\, r_\nu = 1 \quad \text{also:} \quad |c_\nu| = \frac{1}{r_\nu} \cdot$$

Hiernach ergiebt sich aber in Verbindung mit dem Satze des § 2 das folgende Resultat:

Besitzt die durchweg ausserhalb des Einheitskreises gelegene abzählbare Menge (α_ν) auf dem Einheitskreise beliebig viele Grenzpunkte, so lassen sich auf mannigfache Weise unendliche Reihen von Grössen c_ν stets so bestimmen, dass die Reihen:

$$f(x) = \sum_0^\infty{}^{\nu} \frac{c_\nu}{\alpha_\nu - x} \qquad f^{(n)}(x) = n! \sum_0^\infty{}^{\nu} \frac{c_\nu}{(\alpha_\nu - x)^{n+1}}$$

nicht nur im Innern, sondern auch **auf der Peripherie** unbedingt und gleichmässig convergiren und in die eben daselbst unbedingt und gleichmässig convergirenden Potenzreihen:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \sum_0^\infty{}^{\lambda} A_\lambda x^\lambda \\ f^{(n)}(x) &= \sum_n^\infty{}^{\lambda} \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1) A_\lambda x^{\lambda-n} \end{aligned}\right\} \quad \text{wo:} \ A_\lambda = \sum_0^\infty{}^{\nu} \frac{c_\nu}{\alpha_\nu^{\lambda+1}}$$

umgeformt werden können.

Bedeutet dann α einen auf der Peripherie befindlichen Grenzpunkt der α_ν von solcher Beschaffenheit, dass in jeder Nähe von α stets Punkte α_ν vorhanden sind, welche höchstens in Linien, nicht aber

in Flächentheilen, überall dicht liegen, so existirt keine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x-\alpha)$ derart, dass die Gleichung $f(x) = \mathfrak{P}(x-\alpha)$ besteht für Punkte in beliebiger Nähe von α, die im Innern oder auf der Peripherie des Einheitskreises liegen.

Wenn also solche Punkte α auf der Peripherie überall dicht liegen (sodass schliesslich jeder Punkt der Peripherie als ein Grenzpunkt der Menge (α_ν) anzusehen ist), so existirt für $f(x)$ keine analytische Fortsetzung über die Peripherie des Einheitskreises hinaus, obschon $f(x)$ mit sämmtlichen Ableitungen jeder endlichen Ordnung dort noch endlich und stetig ist.

Der Vollständigkeit halber sei hierzu noch bemerkt, dass der Convergenzbezirk der Reihe $\sum \frac{c_\nu}{a_\nu - x}$ in Folge der den Punkten α_ν auferlegten Beschränkung mit dem Einheitskreise noch nicht erschöpft sein wird, sondern je nach der Wahl der α_ν noch aus einem oder mehreren (eventuell auch unendlich vielen) Stücken *ausserhalb* des Einheitskreises bestehen muss. Alsdann stellt also auf Grund der von Herrn Weierstrass gegebenen Begriffsbestimmung der analytische Ausdruck $\sum \frac{c_\nu}{a_\nu - x}$ in verschiedenen Gebieten *verschiedene* analytische Functionen dar.

Um mit Hülfe des oben ausgesprochenen allgemeinen Satzes bestimmte Beispiele von Functionen zu construiren, die trotz der Endlichkeit der Ableitungen über den Einheitskreis nicht fortgesetzt werden können, mögen etwa die am Schlusse des vorigen Paragraphen angeführten Punktmengen benützt werden. Sei also:

$$\alpha_\nu = p_\nu \cdot \varepsilon^\nu \quad \left(\begin{array}{l}\text{wo } \varepsilon = e^{2s\pi i},\ s \text{ eine Irrationalzahl} \\ p_\nu > 1,\ \lim p_\nu = 1\end{array}\right)$$

so kann man nach Gl. (4) setzen:

$$f(x) = \sum_0^\infty{}_\nu \frac{(p_\nu - 1)^\nu}{p_\nu \varepsilon^\nu - x},$$

oder auch nach Gl. (9) und (12):

$$f(x) = \sum_1^\infty{}_\nu \frac{b^{\frac{1}{p_\nu - 1}}}{p_\nu \varepsilon^\nu - x} \quad (b < 1).$$

Setzt man in der letzten Formel speciell:

$$p_\nu = 1 + \frac{1}{\nu} \quad (\nu = 1, 2, 3 \cdots)$$

so wird:

$$f(x) = \sum_1^\infty{}^{\nu} \frac{b^\nu}{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)\varepsilon^\nu - x} = \sum_0^\infty{}^{\lambda} A_\lambda x^\lambda,$$

wo

$$A_\lambda = \sum_1^\infty{}^{\nu} \left(\frac{\nu}{\varepsilon^\nu(\nu+1)}\right)^{\lambda+1} b^\nu.$$

Nimmt man $p_\nu = e^{\frac{1}{\nu}}$, also $\frac{1}{p_\nu - 1} \cong \nu$, so ergiebt sich, wenn man für ε seinen Werth einsetzt:

$$f(x) = \sum_1^\infty{}^{\nu} \frac{b^\nu}{e^{\frac{1}{\nu}+2\nu s\pi} - x} = \sum_0^\infty{}^{\lambda} A_\lambda x^\lambda,$$

wo

$$A_\lambda = \sum_1^\infty{}^{\nu} \frac{b^\nu}{e^{\left(\frac{1}{\nu}+2\nu s\pi i\right)(\lambda+1)}}.$$

Diese Reihen convergiren dann auch noch gleichmässig für das ganze Gebiet ausserhalb des Einheitskreises mit Ausschluss der unmittelbaren Umgebung der Punkte $\alpha_\nu = p_\nu \varepsilon^\nu$, welche ausserhalb des Einheitskreises keine weiteren Grenzpunkte besitzen. Zwischen den Werthen der Reihen $f(x)$ im Innern und ausserhalb des Einheitskreises existirt jedoch kein „analytischer" Zusammenhang.

Es werde ferner gesetzt:

$$\alpha_{\mu,\nu} = p_\mu \varepsilon^\nu$$

wo etwa wiederum $p_\mu = 1 + \frac{1}{\mu}$ oder $p_\mu = e^{\frac{1}{\mu}}$ $(p = 1, 2, 3 \cdots)$ und ε gleichfalls die frühere Bedeutung hat. Bildet man alsdann:

$$f(x) = \sum_1^\infty{}^{\mu} \sum_1^\infty{}^{\nu} \frac{c_{\mu,\nu}}{p_\mu \varepsilon^\nu - x},$$

so erkennt man leicht, dass die gleichmässige Convergenz von $f(x)$ und $f^{(n)}(x)$ auf der Peripherie wiederum erhalten bleibt, wenn man etwa setzt:

$$c_{\mu,\nu} = b^{\mu+\nu} \quad (b < 1).$$

Alsdann ergiebt sich:

$$f(x) = \sum_1^\infty{}^{\mu} \sum_1^\infty{}^{\nu} \frac{b^{\mu+\nu}}{p_\mu \varepsilon^\nu - x} = \sum_0^\infty{}^{\lambda} A_\lambda x^\lambda$$

wo:

$$A_\lambda = \sum_1^\infty{}_\mu \sum_1^\infty{}_\nu \frac{b^{\mu+\nu}}{(p_\mu \varepsilon^\nu)^{\lambda+1}} = \sum_1^\infty{}_\mu \frac{b^\mu}{p_\mu^{\lambda+1}} \sum_1^\infty{}_\nu \frac{b^\nu}{\varepsilon^{(\lambda+1)\nu}}$$

$$= \frac{b}{\varepsilon^{\lambda+1} - b} \sum_1^\infty{}_\mu \frac{b^\mu}{p_\mu^{\lambda+1}}.$$

Der Convergenzbereich von $f(x)$ besteht hier — abgesehen von dem Innern des Einheitskreises — aus dem ganzen Ebenenstücke ausserhalb des Kreises mit dem Radius p_1 (wobei für die oben getroffene specielle Wahl $p_1 = 2$ bez. $p_1 = e$ ist), sodann aus unendlich vielen concentrischen Ringen, welche begrenzt werden von Kreisen mit den Radien p_μ und $p_{\mu+1}$ ($\mu = 1, 2, 3 \cdots$). Auf allen diesen Kreisen liegen die Punkte $\alpha_{\mu,\nu}$ überall dicht, sodass also die Reihe $f(x)$ in diesen sämmtlichen Stücken ihres Convergenzbereiches lauter verschiedene analytische Functionen darstellt. Jedoch besitzt sie nur auf dem Einheitskreise die Eigenschaft mit allen Ableitungen endlicher Ordnung endlich und stetig zu sein, während sie auf den sämmtlichen übrigen Begrenzungen divergirt.

Will man Functionen construiren, welche in der einen Halbebene z. B. der oberen — einschliesslich der reellen Axe mit sämmtlichen Ableitungen stetig und dennoch nicht analytisch fortsetzbar sind, so braucht man nur das Innere des Einheitskreises mit Hülfe der Substitution:

$$x = \frac{z - i}{z + i}$$

auf die obere z-Halbebene abzubilden.

§ 4.

Ich gehe nun dazu über, einen weiteren Typus von Reihen anzugeben, welche auf der Grenze eines gewissen Bereiches noch mit allen Ableitungen endlich und stetig, dennoch nicht analytisch fortsetzbar sind. Obschon dieselben mit den Untersuchungen der beiden letzten Paragraphen nicht in unmittelbarem Zusammenhange stehen, so liefern sie doch eine sehr brauchbare Illustration zu den im § 1 entwickelten Principien, indem sie bei ausserordentlicher formaler Einfachheit auf dem Wege ganz elementarer Rechnung deutlich erkennen lassen, *warum* die Entwickelbarkeit auf jeder Grenzlinie vollständig aufhört: nämlich, *weil die Ableitungen n^{ter} Ordnung für unendlich viele, überall dicht liegende Stellen mit n so stark zunehmen, dass die Taylor'sche Reihe nicht mehr convergirt.*

Es werde gesetzt:

(1) $$\psi(t) = \sum_0^\infty{}^{\nu} \frac{1}{\nu!} e^{a^\nu ti} = \sum_0^\infty{}^{\nu} u_\nu$$

wo a eine positive ganze Zahl $\geqq 2$, $t = \tau_1 + \tau_2 i$ eine complexe Variable bedeutet. Um den Convergenzbereich dieser Reihe zu erkennen, hat man:

$$\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu} = \frac{1}{\nu+1} \cdot e^{a^\nu (a-1) ti}$$

$$= \frac{1}{\nu+1} \cdot e^{-a^\nu (a-1) \cdot \tau_2} \cdot e^{a^\nu (a-1) \tau_1 i}$$

und daher für $\nu = \infty$:

$$\lim \left| \frac{u_{\nu+1}}{u_\nu} \right| = \lim \frac{e^{-a^\nu (a-1) \cdot \tau_2}}{\nu+1} \begin{cases} = 0, & \text{wenn } \tau_2 \geqq 0, \\ = \infty, & \text{wenn } \tau_2 < 0 \end{cases}$$

d. h. die Reihe convergirt absolut für alle t mit nicht-negativem imaginärem Bestandtheil, also innerhalb der oberen Halbebene *einschliesslich der reellen Axe.* Das Gleiche gilt auch für sämmtliche Ableitungen von $\psi(t)$. Man hat nämlich:

(2) $$\psi^{(n)}(t) = i^n \sum_0^\infty{}^{\nu} \frac{1}{\nu!} a^{n\nu} \cdot e^{a^\nu ti}$$

und daher insbesondere für reelle t:

$$\sum_0^\infty{}^{\nu} \left| \frac{1}{\nu!} a^{n\nu} \cdot e^{a^\nu ti} \right| = \sum_0^\infty{}^{\nu} \frac{1}{\nu!} a^{n\nu} = e^{a^n}$$

sodass also die Reihe für $\psi^{(n)}(t)$ auch auf der ganzen reellen Axe absolut convergirt. Es stellt hiernach $\psi(t)$ für die obere Halbebene eine analytische Function von t dar, welche noch auf der Grenze dieses Bereiches, nämlich der reellen Axe, mit allen Ableitungen jeder endlichen Ordnung endlich und stetig ist.

Nichtsdestoweniger lässt sich leicht zeigen, dass $\psi(t)$ über diesen Bereich nicht analytisch fortgesetzt werden kann.

Setzt man zunächst in (2) $t = 2\varkappa\pi$ ($\varkappa = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots$), so folgt:

$$|\psi^{(n)}(2\varkappa\pi)| = e^{a^n}$$

und ebenso für $t = (2\varkappa + 1)\pi$:

$$\left|\psi^{(n)}\big((2\varkappa+1)\pi\big)\right| = e^{a^n} \text{ bezw. } = e^{a^n} - 2 \text{ (ersteres, wenn } a \text{ ungerade,}$$
$$\text{letzteres, wenn } a \text{ gerade).}$$

Daraus erkennt man aber zunächst, dass die Taylor'sche Reihe für

sämmtliche Stellen $t = \mu\pi$ $(\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ divergirt (cf. § 1, Gl. (5)).

Das Gleiche findet nun aber statt für alle Stellen $t = \frac{\mu\pi}{a^p}$, wenn p eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet. Setzt man nämlich $\psi^{(n)}(t)$ in die Form:

$$\psi^{(n)}(t) = i^n \cdot \sum_0^{p-1} {}_\nu \frac{a^{n\nu}}{\nu!} e^{a^\nu t i} + i^n \cdot \sum_p^\infty {}_\nu \frac{a^{n\nu}}{\nu!} e^{a^\nu t i}$$

$$= i^n \cdot \sum_0^{p-1} {}_\nu \frac{a^{n\nu}}{\nu!} e^{a^\nu t i} + i^n \cdot \sum_0^\infty {}_\nu \frac{a^{n(p+\nu)}}{(p+\nu)!} e^{a^{p+\nu} t i}$$

so ergiebt sich zunächst für $t = \frac{2\varkappa\pi}{a^p}$ $(\varkappa = \pm 1, \pm 2 \cdots)$:

$$\psi^{(n)}\left(\frac{2\varkappa\pi}{a^p}\right) = i^n \cdot \sum_0^{p-1} {}_\nu \frac{a^{n\nu}}{\nu!} e^{a^{\nu-p} \cdot 2\varkappa\pi i} + i^n \cdot \sum_0^\infty {}_\nu \frac{a^{n(p+\nu)}}{(p+\nu)!} \tag{3}$$

$$= i^n \{C_{p,n} + e^{a^n}\}$$

wo:

$$C_{p,n} = \sum_0^{p-1} {}_\nu \frac{a^{n\nu}}{\nu!} \{e^{a^{\nu-p} \cdot 2\varkappa\pi i} - 1\}.$$

Nun ist aber:

$$|C_{p,n}| < 2 \cdot \sum_0^{p-1} {}_\nu a^{n\nu} < 2 \cdot \frac{a^{pn} - 1}{a - 1} < 2 \cdot a^{pn} \tag{4}$$

folglich wird, wie gross man auch p annehmen mag, n stets so gross genommen werden können, dass der in (3) vorkommende Term e^{a^n} beliebig viel grösser ist als $|C_{p,n}|$; dies gilt selbst dann noch, wenn man p über alle Grenzen wachsen lässt, sobald man nur $n \geqq p$ nimmt. Somit folgt aus (3) und (4), dass für unendlich wachsende n:

$$\psi^{(n)}\left(\frac{2\varkappa\pi}{a^p}\right) \cong e^{a^n} \tag{5}$$

wird, und das Nämliche ergiebt sich auf analoge Weise auch für $\psi^{(n)}\left(\frac{(2\varkappa+1)\pi}{a^p}\right)$. In Folge dessen muss aber die Taylor'sche Reihe für $\psi(t)$ an allen Stellen $t = \frac{m\pi}{a^p}$ divergiren, wie gross man auch p nehmen mag, und da diese Stellen auf der reellen Axe überall dicht liegen, so ergiebt sich in der That, dass $\psi(t)$ für keinen einzigen reellen Werth t_0 nach Potenzen von $t - t_0$ entwickelt werden kann.

Die Reihe (1) ist aber auch noch in einer weiteren Beziehung lehrreich, insofern man daran erkennen kann, dass auch die zweite

der beiden in § 1 erörterten Möglichkeiten, nämlich die *Convergenz* der Taylor'schen Reihe

$$\sum \frac{\psi^{(\nu)}(t_0)}{\nu!}(t-t_0)^\nu$$

aber *ohne* die Gültigkeit der Beziehung:

$$\sum \frac{\psi^{(\nu)}(t_0)}{\nu!}(t-t_0)^\nu = \psi(t)$$

geradezu *in unendlich vielen Punkten jedes noch so kleinen Intervalles* stattfinden kann.

Angenommen nämlich, es sei jetzt speciell a eine ungerade Zahl von der Form $4k+3$ ($k=0,1,2\cdots$). Alsdann bemerke man zunächst, dass alle *ungeraden* Potenzen von a gleichfalls von der Form $4k+3$, dagegen alle *geraden* von der Form $4k+1$ sind, sodass also:

$$e^{\frac{1}{2}a^{2\mu-1}\pi i} = -i, \quad e^{\frac{1}{2}a^{2\mu}\pi i} = +i$$

d. h. allgemein:

$$e^{\frac{1}{2}a^\nu \pi i} = (-1)^\nu \cdot i$$

wird. Setzt man daher in (2) $t=\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi$, so ergiebt sich:

$$\psi^{(n)}\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi\right) = i^n \cdot \sum_0^\infty{}_\nu \frac{a^{n\nu}}{\nu!} e^{ma^\nu \pi i} \cdot e^{\frac{1}{2}a^\nu \cdot \pi i}$$

$$= (-1)^m \cdot i^{n+1} \sum_0^\infty{}_\nu (-1)^\nu \cdot \frac{a^{n\nu}}{\nu!}$$

also:

$$\left|\psi^{(n)}\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi\right)\right| = e^{-a^n} \tag{6}$$

sodass die Taylor'sche Reihe zunächst an allen Stellen

$$t_0 = \left(m+\frac{1}{2}\right)\pi \quad (m=0, \pm 1, \pm 2\cdots)$$

für jedes noch so grosse $(t-t_0)$ *convergirt.*

Man findet nun aber ganz analog wie oben Gl. (5), dass

$$\left|\psi^{(n)}\left(\frac{m+\frac{1}{2}}{a^p}\pi\right)\right| \leq C'_{p,n} + e^{-a^n} \tag{7}$$

wo:

$$C'_{p,n} < a^{pn} \tag{8}$$

und da, wie gross man auch p nehmen möge, die Reihe mit dem allgemeinen Gliede: $\frac{1}{n!}\left\{a^{pn}+e^{-a^n}\right\} r^n$ für jedes noch so grosse r con-

vergirt, so folgt, dass die Taylor'sche Reihe $\sum \frac{\psi^{(\nu)}(t_0)}{\nu!}(t-t_0)^\nu$ für alle Stellen $t_0 = \frac{\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi}{a^p}$ d. h. schliesslich für unendlich viele, überall dicht liegende Punkte der reellen Axe *convergirt* und zwar sogar *beständig convergirt.* Da aber in beliebiger Nähe jeder solchen Stelle andere liegen, für welche nach dem zuvor gesagten die Taylor'sche Reihe *divergirt*, so kann sie nicht die Summe $\psi(t)$ haben.

Hieran knüpft sich naturgemäss die Frage, ob es denkbar wäre, *dass die Taylor'sche Reihe für alle Stellen eines gewissen Intervalles einer reellen Variablen convergirte oder genauer gesagt, ein Convergenzintervall besitzt, dessen Ausdehnung unter eine bestimmte angebbare Grösse nicht herabsinkt, und dass ihre Summe nichtsdestoweniger mit der erzeugenden Function nicht übereinstimmte?*

Diese Frage ist aber zu *verneinen.* Angenommen nämlich, es convergire die Reihe:

$$\sum_0^\infty{}_\nu \frac{\psi^{(\nu)}(t)}{\nu!} \cdot r^\nu$$

für $t_0 \leqq t \leqq t_1$ und $r \leqq r_1$, so hat man sicher für alle Werthepaare (t, r) aus dem angegebenen Bereiche:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\psi^{(n)}(t)}{n!} r^n = 0$$

und daher insbesondere, wenn ϱ die kleinere der beiden Grössen $(t_1 - t_0)$ und r_1 bezeichnet:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\psi^{)n)}(t_0+\vartheta\varrho)}{n!} \cdot \varrho^n = 0 \quad (0 \leqq \vartheta \leqq 1). \tag{9}$$

Nun gilt aber mit Benützung der Lagrange'schen Restform die Entwickelung:

$$\psi(t_0+h) = \sum_0^{n-1}{}_\nu \frac{\psi^{(\nu)}(t)}{\nu!} h^\nu + \frac{\psi^{(n)}(t_0+\vartheta h)}{n!} h^n \tag{10}$$

und man erkennt aus Gl. (9), dass dieses Restglied für $h \leqq \varrho$ mit unendlich wachsenden n verschwindet, sodass also in der That die Beziehung gilt:

$$\psi(t_0+h) = \sum_0^\infty{}_\nu \frac{\psi^{(\nu)}(t_0)}{\nu!} h^\nu \quad \text{für } h \leqq \varrho. \tag{11}$$

Damit ist also bewiesen, dass die Taylor'sche Reihe nicht für *alle* Stellen eines beliebigen kleinen Intervalles einen Convergenzbereich von angebbarer Grösse besitzen kann, ohne dort auch die betreffende Function darzustellen. Mithin gilt der Satz:

Wenn die Taylor'sche Reihe $\sum \frac{\psi^{(\nu)}(t_0)}{\nu!} h^\nu$ für irgend einen bestimmten Werth t_0 der reellen Variablen t und für $h \leq \varrho$ convergirt, ohne die Summe $\psi(t_0+h)$ zu besitzen, so müssen entweder in jeder beliebigen Nähe von t_0 Stellen t' existiren, sodass $\sum \frac{\psi^{(\nu)}(t')}{\nu!} h^\nu$ für jedes noch so kleine h divergirt; oder es muss zum mindesten die untere Grenze für die Convergenzintervalle aller möglichen Reihen: $\sum \frac{\psi^{(\nu)}(t')}{\nu!} h^\nu$ für Werthe t' in der Nähe von t_0 den Werth Null haben.*)

Der Satz gilt offenbar auch für den Fall einer complexen Variablen t. Denn man kann die Gesammtheit der Stellen, welche auf irgend einer im Punkte t_0 beginnenden geradlinigen Strecke liegen, durch eine ganze lineare Substitution auf ein Stück der reellen Axe congruent abbilden und sodann wieder die oben benützte Schlussweise anwenden.

Bei dem oben betrachteten Beispiel:

$$\psi(t) = \sum_0^\infty {}^{\nu} \frac{1}{\nu!} e^{a^\nu t i} \tag{1}$$

tritt also — wenn $a = 4k + 3$ — thatsächlich der Fall ein, dass in jedem noch so kleinen Intervalle Stellen liegen, für welche der Convergenzradius der Taylor'schen Reihe *unendlich gross* ist

*) Da der Convergenzradius von $\sum \frac{\psi^{(\nu)}(t)}{\nu!} h^\nu$ in dem vorliegenden Falle offenbar eine *unstetige* Function von t ist, so brauchte in der That *keine bestimmte Stelle* t' zu existiren, wo derselbe wirklich $= 0$ wird. Ein Beispiel für diese Art des Verhaltens giebt die in § 1 betrachtete Function;

$$f(t) = \sum_0^\infty {}^{\nu} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \cdot \frac{1}{1 + a^\nu t},$$

für welche die Mac Laurin'sche Reihe convergirte, ohne die Function darzustellen. Hier existirt für jedes noch so kleine positive t eine convergente Taylor'sche Entwickelung:

$$f(t+h) = \sum \frac{f^{(\nu)}(t)}{\nu!} h^\nu,$$

deren Convergenzbezirk sich nach links nur bis zur Nullstelle erstreckt, also mit t selbst unter jede noch so kleine Grösse herabsinkt, ohne aber jemals wirklich $= 0$ zu werden, da ja für $t = 0$ die *beständig convergirende* Reihe

$$\sum (-1)^\nu \cdot e^{-a^\nu} h^\nu$$

resultirt.

$\left(\text{nämlich für } t = \frac{(m+\frac{1}{2})\pi}{a^p}\right)$, und ebenfalls solche, für welche dieselbe *gleich Null* ist $\left(\text{nämlich für } t = \frac{m\pi}{a^p}\right)$.

Ersetzt man in (1) t durch $(-t)$, so wird die Reihe:

$$(12) \qquad \psi(-t) = \sum_0^\infty {}^\nu \frac{1}{\nu!} e^{-a^\nu t i}$$

eine analytische Function darstellen, welche nur für die untere Halbebene einschliesslich der reellen Axe mit sämmtlichen Ableitungen existirt, und es ergeben sich durch Addition und Subtraction von $\psi(t)$ und $\psi(-t)$ (wobei, wie man leicht erkennt, die fraglichen Singularitäten sich nicht etwa herausheben), die Reihen:

$$(13) \qquad \psi_1(t) = \sum_0^\infty {}^\nu \frac{\cos a^\nu t}{\nu!}, \quad \psi_2(t) = \sum_0^\infty {}^\nu \frac{\sin a^\nu t}{\nu!}$$

als Beispiele von Functionen, welche für alle reellen t mit sämmtlichen Ableitungen jeder noch so grossen endlichen Ordnung endlich und stetig sind, und dennoch nicht in das complexe Gebiet der Variablen t fortgesetzt werden können.*)

Ist hierbei insbesondere a eine ungerade Zahl von der Form $4k+3$, so besitzen jene Functionen wiederum noch die merkwürdige Eigenschaft, dass in der Umgebung *jeder* Stelle t_0 sowohl Stellen t' liegen, für welche die Taylor'sche Reihe bei beliebig kleinem $(t-t')$ *divergirt*, als auch solche, für welche dieselbe bei beliebig grossem $(t-t')$ *convergirt* – letzteres natürlich, *ohne* die Function $\psi_1(t)$ bezw. $\psi_2(t)$ darzustellen.

Setzt man schliesslich in (1) noch $e^{ti} = x$, so folgt, dass die Function:

$$(14) \qquad f(x) = \sum_0^\infty {}^\nu \frac{1}{\nu!} x^{a^\nu}$$

nicht über den Einheitskreis hinaus analytisch fortgesetzt werden kann, obschon sie noch auf der Peripherie derselben mit allen Ableitungen jeder endlichen Ordnung endlich und stetig ist.

Der allgemeine Typus derartiger Reihen lautet offenbar:

$$(15) \qquad f(x) = \sum_0^\infty {}^\nu c_\nu \cdot x^{m_\nu}$$

*) Wie ich nachträglich bemerkt habe, findet sich die erste dieser beiden Reihen mit der Beschränkung auf *ungerade* ganzzahlige Werthe von a schon in einem Aufsatze des Herrn Lerch: „*Ueber die Nichtdifferentiirbarkeit gewisser Functionen.*" Journ. f. Math. Bd. 103, S. 136.

wo die m_ν positive ganze Zahlen von der Beschaffenheit bezeichnen, dass der grösste gemeinsame Theiler von $m_\nu, m_{\nu+1}, m_{\nu+2}, \ldots$ mit ν selbst in's Unendliche wächst, während die Coefficienten c_ν so beschaffen sein müssen, dass die Reihe:

$$\sum_0^\infty{}^\nu c_\nu m_\nu^n = S_n$$

für jedes endliche n zwar *convergirt*, aber ihre Summe mit n so stark zunimmt, dass:

$$\sum_0^\infty{}^n \frac{S_n}{n!} \varrho^n$$

für jeden noch so kleinen Werth ϱ *divergirt.*

Ich möchte diese Gelegenheit benützen, um einer Stelle in meinem Aufsatze: „*Ueber die Convergenz unendlicher Producte*" (Bd. XXXIII dieser Zeitschr.) eine etwas schärfere Fassung zu geben. Es handelt sich dort (a. a. O. p. 140) um den Beweis des folgenden Satzes:

Bei einem unbedingt convergenten Product convergirt auch jedes beliebig herausgehobene Partialproduct.

Sei also

$$\prod_1^\infty{}^\nu (1+u_\nu) = U$$

ein *unbedingt* convergentes Product, so muss zunächst, wenn man die Reihe der u_ν in zwei Partien zerlegt, deren Glieder mit v_ν, w_ν bezeichnet werden mögen, und:

$$\prod_1^m{}^\nu (1+v_\nu) = V_m, \quad \prod_1^n{}^\nu (1+w_\nu) = W_\nu$$

setzt:

$$\lim V_m W_n = U$$

d. h. *endlich bestimmt und von Null verschieden* sein, wenn m und n in beliebiger Weise und *unabhängig von einander* in's Unendliche wachsen. Es ist also einerseits für alle ganzzahligen m:

(1) $\qquad |V_m W_n| \geqq g$, wo g eine von Null verschiedene positive Grösse bedeutet,

und andererseits müssen sich zu jeder beliebig klein vorgelegten positiven Grösse δ zwei ganze positive Zahlen M, N so bestimmen lassen, dass für $m \geqq M$, $n \geqq N$:

(2) $$|V_{m+\varrho} W_{n+\sigma} - V_m W_n| < g\delta$$

wird, wobei für ϱ, σ jede beliebige Combination aus der Zahlenreihe: 0, 1, 2, ... gewählt werden kann. Setzt man nun speciell einmal $\sigma = 0$, das andere Mal $\varrho = 0$, und dividirt die so resultirenden Ungleichungen durch Ungl. (1), so ergeben sich die Beziehungen:

$$\left| \frac{V_{m+\varrho}}{V_m} - 1 \right| < \delta \quad (m \geqq M, \ \varrho = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$\left| \frac{W_{n+\sigma}}{W_n} - 1 \right| < \delta \quad (n \geqq N, \ \sigma = 0, 1, 2, \ldots)$$

welche in der That die Convergenz der Producte V_m, W_n nach sich ziehen. —

München, März und November 1892.

Ueber die Darstellung einiger Fälle der automorphen Primformen durch specielle Thetareihen.

Von

HEINRICH BURKHARDT in Göttingen.

Sind die Exponentendifferenzen einer hypergeometrischen Differentialgleichung reciproke Werthe von ganzen Zahlen:

$$\lambda = \frac{1}{l}, \quad \mu = \frac{1}{m}, \quad \nu = \frac{1}{n},$$

so ist bekanntlich das Argument x eine eindeutige automorphe Function des Verhältnisses η zweier Particularlösungen. Geeignete Spaltung in homogene Bestandtheile:*)

$$x = x_1 : x_2, \qquad \eta = \eta_1 : \eta_2$$

liefert den Satz, dass x_1 und x_2 (und damit alle ganzen rationalen homogenen Functionen von x_1 und x_2) unverzweigte automorphe Formen von η_1 und η_2 sind. Aber dieselbe Eigenschaft kommt auch, wie zuerst Halphen**) gezeigt hat, den in den x irrationalen Formen:

$$\Phi = (xa)^{\frac{1}{l}}, \quad \Psi = (xb)^{\frac{1}{m}}, \quad X = (xc)^{\frac{1}{n}}$$

zu; a, b, c bedeuten dabei die drei Verzweigungspunkte. Wie bereits mehrfach geschehen, sollen dieselben im folgenden als „*Primformen*" bezeichnet werden. Analytische Ausdrücke für solche Functionen hat Hr. Poincaré***) gegeben; in formentheoretische Gestalt hat dieselben Hr. Ritter umgesetzt und dabei sowohl Vereinfachungen, als Erweiterungen ihres Gültigkeitsgebietes erzielt; aberauch so reichen sie noch nicht für alle Fälle aus.

Andrerseits hat Hr. Klein†) die Aufmerksamkeit auf die Dar-

*) Vgl. hier und im folgenden: Ritter, die eindeutigen automorphen Formen vom Geschlecht Null, dieser Ann. Bd. 41; insbes. p. 8. 16 ff. 41.

**) Comptes Rendus de l'acad. des sciences Bd. 92, p. 856 (1881). Halphen verwendet dort übrigens keine homogene Variablen und es bedürfen also seine Angaben, um mit den im Text gebrauchten Formeln vergleichbar zu sein, noch einer leichten Umsetzung.

***) Acta mathematica I (1882).

†) In einer Vorlesung über lineare Differentialgleichungen, W. S. 1890/91.

stellung der η_1, η_2 durch Perioden von Abel'schen Integralen I. Gattung gelenkt und die Vermuthung ausgesprochen, die zu diesen Integralen gehörenden Thetareihen könnten vielleicht zu analytischen Ausdrücken für die Halphen'schen Formen führen. In den beiden einfachsten Fällen habe ich diese Vermuthung in der That bestätigt gefunden, während in andern Fällen Schwierigkeiten auftreten, die zu überwinden mir bisher nicht gelungen ist. Da aber einerseits gerade die erstgenannten Fälle zu denjenigen gehören, in welchen die Convergenz der zunächst in Betracht kommenden Poincaré'schen Reihen nicht bewiesen ist und man daher bis jetzt eine directe analytische Darstellung der Primformen überhaupt nicht besitzt; da andrerseits die in Frage stehenden Specialfälle Abel'scher Integrale auch als solche ein gewisses Interesse besitzen, so glaube ich meine Untersuchung hier mittheilen zu dürfen.

Wird zur Abkürzung gesetzt:

$$\begin{aligned} -1+\lambda-\mu-\nu &= 2\mathfrak{a}, \\ -1-\lambda+\mu-\nu &= 2\mathfrak{b}, \\ -1-\lambda-\mu+\nu &= 2\mathfrak{c}, \\ -1+\lambda+\mu+\nu &= 2\mathfrak{d}, \end{aligned}$$

so sind die erwähnten Integrale die folgenden:

$$\int (za)^{\mathfrak{a}}(zb)^{\mathfrak{b}}(zc)^{\mathfrak{c}}(zx)^{\mathfrak{d}}(z\,dz).$$

Sie gehören zu einer Classe von Integralen, die unter dem Namen der *binomischen* vielfach behandelt worden sind;*) insbesondere hat Herr Netto**) bereits alle diejenigen Fälle aufgezählt, welche unter $p=2$ und $p=3$ fallen. Zwei von den ersteren gehören zu den hier zu betrachtenden, nämlich:

$$\int \frac{(z\,dz)}{\sqrt[4]{(za)^2(zb)^2(zc)^3(zx)}} \quad \left(\text{für } \lambda=\frac{1}{4},\ \mu=\frac{1}{4},\ \nu=0\right)$$

und:

$$\int \frac{(z\,dz)}{\sqrt[3]{(za)\,(zb)^2\,(zc)^2\,(zx)}} \quad \left(\text{für } \lambda=\frac{1}{3},\ \mu=0,\ \nu=0\right);$$

und diese beiden sind es eben, welche den hier zu untersuchenden Fällen entsprechen. Dass in ihnen ein, resp. zwei Exponentendifferenzen den Werth 0 haben, bedingt, dass eine, resp. zwei Prim-

*) Zuletzt von Hrn. Osgood, zur Theorie der zum algebraischen Gebilde $y^m = R(x)$ gehörigen Abel'schen Functionen, Diss. Erlangen 1890. Dort p. 5 die ältere Litteratur zusammengestellt.

**) De transformatione aequationis $y^2 = R(x)$ in aequationem $\eta^2 = R_1(\xi)$, Diss. Berol. 1870, p. 7.

formen ausarten; für die zwei, resp. eine nicht ausgeartete werden wir analytische Ausdrücke finden, deren Convergenzbereich sich bis an ihre natürliche Grenze erstreckt.

I. Der Fall $\lambda = \frac{1}{4}$, $\mu = \frac{1}{4}$, $\nu = 0$.

§ 1.

Construction und canonische Zerschneidung der Riemann'schen Fläche.

Im Falle $\lambda = \frac{1}{4}$, $\mu = \frac{1}{4}$, $\nu = 0$ war es das Integral:

$$(1) \qquad \int \frac{(z\,dz)}{\sqrt[4]{(za)^2(zb)^2(zc)^3(zx)}},$$

dessen Perioden wir zu betrachten hatten. Wir müssen uns vor allem die Riemann'sche Fläche construiren, auf der die zu integrirende Function eindeutig ist. Diese ist dadurch definirt, dass wir neben z_1, z_2 die algebraische Form:

$$(2) \qquad y = \sqrt[4]{(za)^2\,(zb)^2\,(zc)^3\,(zx)}$$

stellen; wir sehen vor allem, dass sie *vier Blätter* wird besitzen müssen, die bei $z = c$ und $z = x$ alle vier, bei $z = a$ und $z = b$ zweimal zu je zweien zusammenhängen. Die Fläche ist sonach eine *reguläre*.*) Wir können ihre vier Blätter sehr bequem dadurch unterscheiden, dass wir festsetzen: *wenn y_k der Werth von y ist, welcher in dem über einer bestimmten Stelle z_0 der z-Ebene befindlichen Punkte des k^{ten} Blattes statt hat, soll:*

$$(3) \qquad y_2 = iy_1, \quad y_3 = -y_1, \quad y_4 = -iy_1$$

sein. Ist das für eine Stelle z_0 festgesetzt, so wird es für jede andere Stelle z auch gelten. *Alsdann führt die Umkreisung von a oder b in positivem Sinne aus dem* 1. *ins* 3., *dem* 2. *ins* 4., *dem* 3. *ins* 1., *dem* 4. *ins* 2. *Blatt; dagegen bei ebensolcher Umkreisung von c (bezw. x) werden die Blätter in der Reihenfolge* (1, 4, 3, 2), *bezw.* (1, 2, 3, 4) *durchlaufen.* Um diesen Zusammenhang der Blätter vor Augen zu haben, werden wir einen beliebigen Punkt o der Fläche mit den 4 Verzweigungspunkten durch Uebergangslinien verbinden; unbeschadet der Allgemeinheit dürfen

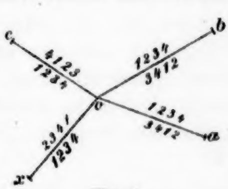


Fig. 1.

wir annehmen, dass dieselben bei Umkreisung von o in derselben Reihenfolge getroffen werden, wie in nebenstehender Figur 1. In der-

*) Vgl. Klein, dieser Ann. Bd. 14, p. 459 und dazu Dyck, dieser Ann. Bd. 17, p. 473.

selben deuten die an die Uebergangslinien einander gegenüber gesetzten Ziffern an, wie die Blätter in ihnen zusammenhängen.

Um nun auf dieser Fläche ein canonisches Querschnittsystem*) zu construiren, breiten wir sie zunächst in eine Ebene aus. Zu diesem Zwecke trennen wir die Blätter längs der Uebergangslinien oa, ob, ox von einander, sodass sie nur noch längs oc zusammenhängen, deformiren dann jedes einzelne Blatt in geeigneter Weise und legen sie schliesslich in einer Ebene nebeneinander, sodass nebenstehende Fig. 2 entsteht. Jedes Blatt stellt sich in derselben als Achteck dar (mit zwei Winkeln von je 180°); die Blätter liegen so um den Punkt c herum, dass sie bei positiver Umkreisung desselben in der richtigen Reihenfolge getroffen werden. Jede Seite ist bezeichnet mit den Buchstaben desjenigen Verzweigungspunktes, den sie enthält; als Indices sind ihr die Nummern derjenigen beiden Blätter beigefügt, die sie verbindet. Dabei steht die Nummer desjenigen Blattes voran, das zur *Rechten* der von o nach dem Verzweigungspunkt hin durchlaufenen Seite liegt; und ein Accent ist da beigesetzt, wo die Seite als Begrenzung des durch ihren zweiten Index bezeichneten Blattes auftritt.

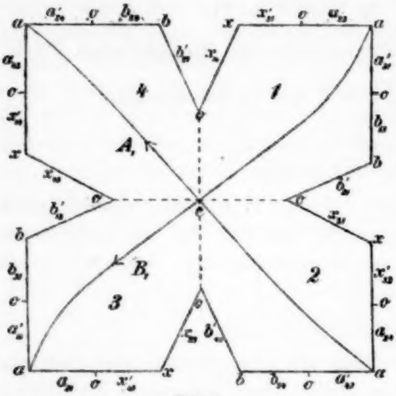


Fig. 2.

Auf Grund dieser Figur können wir *einen „elementaren Periodenweg" als eine Linie definiren, welche von einem Punkt einer nichtaccentuirten Seite nach dem entsprechenden Punkt der gleichbezeichneten accentuirten führt;* ein solcher soll mit demselben Zeichen versehen werden, wie die erstgenannte dieser Seiten. Wir können einen solchen Weg auch auffassen als zusammengesetzt aus zwei Wegstücken, deren jedes, ganz in einem Blatte liegend, c mit einem der übrigen Verzweigungspunkte verbindet; was wir z. B. durch folgende Gleichung ausdrücken wollen:

(4) $$a_{13} = ac_1 + ca_3.$$

Auf der Ebene, über welche die ursprüngliche Gestalt der Riemann'-

*) Für die folgenden Entwicklungen vgl. man Lüroth, über die kanonischen Perioden der Abel'schen Integrale, Abh. der bayr. Acad. II. Cl. Bd. 15, 16 (1885/87). Dabei folge ich dem von Herrn Lüroth (vgl. p. 333 der ersten Abh.) ursprünglich eingeschlagenen Gedankengang, nicht seiner auf Benutzung anschauungsmässiger Hilfsmittel möglichst verzichtenden Darstellung.

schen Fläche ausgebreitet ist, stellt sich ein solcher Weg dar als eine Curve, welche c und noch einen andern Verzweigungspunkt umschliesst und dabei eventuell c mehrmals umwindet, aber ausser den dadurch bedingten keine weiteren Uebergangslinien trifft.

Solcher elementaren Periodenwege haben wir in unserer Figur im ganzen 12; diese sind aber nicht alle von einander unabhängig. Vielmehr können *vollständige Umkreisungen sowohl der Verzweigungspunkte a, b, x als auch des Punktes o* aus ihnen zusammengesetzt werden; das liefert folgende *Relationen:*

$$(5)\qquad \begin{array}{ll} a_{13}+a_{31}=0, & a_{13}+b_{31}+x_{21}=0, \\ a_{24}+a_{42}=0; & a_{24}+b_{42}+x_{32}=0, \\ b_{13}+b_{31}=0, & a_{31}+b_{13}+a_{43}=0, \\ b_{24}+b_{42}=0; & a_{42}+b_{24}+x_{14}=0. \\ x_{14}+x_{43}+x_{32}+x_{21}=0; & \end{array}$$

In diesen Relationen drückt das $=0$ jedesmal aus, dass ein aus den links stehenden Elementarwegen zusammengesetzter Weg sich auf einen Punkt zusammenziehen lässt. Jeder Elementarweg kommt in einer Relation der ersten Gruppe und in einer der zweiten vor*); in Folge dessen ist *von den 9 Relationen* (5) *eine und nur eine eine Folge der andern, so dass alle Elementarwege sich aus vier geeignet gewählten unter ihnen zusammensetzen lassen. So ergiebt sich für das Geschlecht der Fläche:*

$$(6)\qquad p=2.$$

Aus diesen „elementaren Periodenwegen" können wir nun folgendermassen ein „canonisches Querschnittsystem" im Sinne Riemann's erhalten. Als erstes Querschnittspaar können immer zwei sich schneidende elementare Periodenwege gewählt werden; wir mögen etwa:

$$(7)\qquad A_1=a_{24},\quad B_1=a_{13}$$

nehmen. Zerschneiden wir unsere Figur 2 längs dieser Querschnitte (die bereits in sie eingetragen sind) und fügen die entstehenden Stücke in geeigneter Weise längs einander zugeordneter Seiten an einander, so können wir z. B. nebenstehende Figur 3 erhalten. Wege, welche

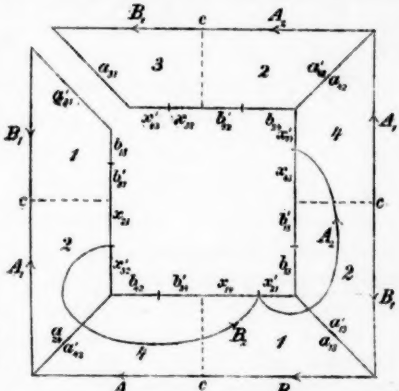


Fig. 3.

*) Vgl. Lüroth, a. a. O. Bd. 15, p. 342 ff.

ganz im Innern dieser Figur verlaufen (also weder A_1, noch B_1 schneiden), seien wie bei Fig. 2, aber mit einem übergesetzten Strich bezeichnet. Aus ihnen können wir wieder in mannigfacher Weise zwei sich schneidende auswählen, welche geeignet sind, als ein Paar eines canonischen Querschnittsystems zu dienen; z. B. die beiden folgenden:

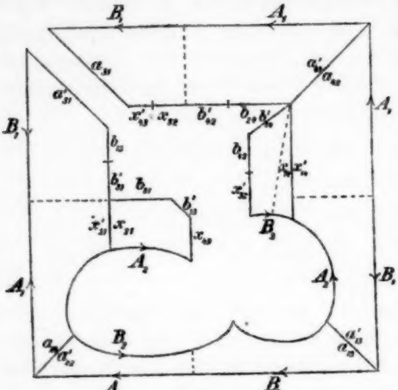


Fig. 4.

$$A_2 = \bar{x}_{14}, \quad B_2 = \bar{x}_{21},$$

welche in Fig. 3 bereits eingetragen sind. Zerschneiden wir Fig. 3 längs dieser Querschnitte und fügen wie vorhin die abgetrennten Stücke längs correspondirender Seiten an, so erhalten wir nebenstehende Figur 4.

Diese lässt sich nun dadurch vereinfachen, dass aneinanderstossende correspondirende Seiten zusammengeheftet werden: zunächst b_{24} mit b'_{24}, hierauf b_{42} mit b'_{42}, dann x_{32} mit x'_{32}; ausserdem b_{31} mit b'_{31} und dann b_{13} mit b'_{13}. Dadurch entsteht nebenstehende Figur 5.

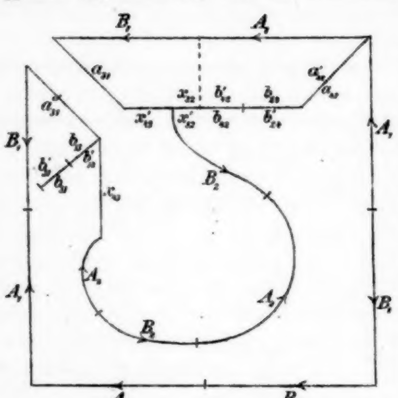


Fig. 5.

In derselben repräsentiren a_{31}, x'_{43} einerseits, a'_{31}, x_{43} andrerseits die beiden Ufer des von Riemann mit c_1 bezeichneten Verbindungsstückes zwischen den beiden Querschnittspaaren. *Die Reduction der Fläche auf eine einfach zusammenhängende ist damit vollendet.*

Es bleibt noch übrig, die Resultate zusammenzustellen. Wie man aus Figur 3 entnimmt, ist:

$$\text{(9)} \qquad \begin{aligned} \bar{x}_{14} &= x_{14} - a_{13}, \\ \bar{x}_{21} &= x_{21} - a_{24}; \end{aligned}$$

man erhält also als *Ausdrücke der canonischen Querschnitte durch die elementaren:*

$$\text{(10)}\quad \begin{aligned} A_1 &= a_{24}, & B_1 &= a_{13}, \\ A_2 &= x_{14} - a_{13}, & B_2 &= x_{21} - a_{24} \end{aligned}$$

und mit Hilfe der Relationen (5) umgekehrt als *Ausdrücke der elementaren Querschnitte durch die canonischen:*

$$\text{(11)}\quad \begin{aligned} a_{13} &= B_1, & b_{31} &= -A_1 - B_1 - B_2, & x_{21} &= A_1 + B_2, \\ a_{24} &= A_1, & b_{42} &= -A_1 + A_2 + B_1, & x_{32} &= -A_2 - B_1, \\ a_{31} &= -B_1, & b_{13} &= A_1 + B_1 + B_2, & x_{43} &= -A_1 - B_2, \\ a_{42} &= -A_1, & b_{24} &= A_1 - A_2 - B_1, & x_{14} &= A_2 + B_1. \end{aligned}$$

§ 2.

Transformationen der Fläche in sich.

Die speciellen Eigenschaften, welche unsere Flächen gegenüber der allgemeinen Fläche desselben Geschlechts besitzt, beruhen auf den *eindeutigen Transformationen in sich*, welche sie zulässt; diese müssen wir daher zunächst untersuchen. Dabei werden wir namentlich fragen, *welche Aenderungen unser canonisches Querschnittsystem bei jeder dieser Transformationen erfährt.*

Unmittelbar ersichtlich ist, dass *unsere Fläche die folgende eindeutige Transformation in sich gestattet:*

$$\text{(1)}\quad z' = z, \quad y' = iy.$$

Dieselbe ist von der Periode 4; sie vertauscht die Blätter der Fläche in der Reihenfolge (1 2 3 4) cyklisch, und zwar so, dass jedes Blatt als ganzes in ein anderes Blatt übergeführt wird. Dementsprechend setzen sich auch die elementaren Periodenwege sehr einfach um; und daraus erhält man mit Hilfe der Relationen (10) und (11) des § 1 die folgenden Umsetzungen der canonischen Querschnitte*):

$$\text{(2)}\quad \begin{aligned} A_1' &= a_{24}' &&= a_{31} &&= -B_1, \\ A_2' &= x_{14}' - a_{13}' &&= x_{21} - a_{24} &&= B_2, \\ B_1' &= a_{13}' &&= a_{24} &&= A_1, \\ B_2' &= x_{21}' - a_{24}' &&= x_{32} - a_{31} &&= -A_2. \end{aligned}$$

Bei der Transformation (1) *geht also nicht nur die Fläche in sich über, sondern auch das auf ihr gezeichnete canonische Querschnittsystem, indem die einzelnen Querschnitte desselben nur unter sich vertauscht und theilweise im Richtungssinn geändert werden.*

Eine *zweite Transformation* unserer Fläche in sich kommt zu Stande, wenn man z einer linearen Substitution unterwirft, welche

*) Dass Accente hier in anderer Bedeutung benutzt werden, als in § 1, wird nicht zu Verwechslungen Anlass geben.

a mit b, c mit x vertauscht, was bekanntlich möglich ist. In homogener Form kann eine solche durch folgende 4 Gleichungen dargestellt werden, von denen je zwei die beiden andern zur Folge haben:

$$(3)\qquad \begin{aligned} (cb)\,(z'a) &= (ac)\,(zb), \\ (ax)\,(z'b) &= (xb)\,(za), \\ (ax)\,(z'c) &= (ac)\,(zx), \\ (cb)\,(z'x) &= (xb)\,(zc). \end{aligned}$$

Die Determinante dieser Substitution ist entgegengesetzt gleich dem Doppelverhältniss von a und b gegen c und x:

$$(4)\qquad \Delta = -\frac{(ac)\,(bx)}{(ax)\,(bc)}.$$

Um zu zeigen, dass unsere Fläche bei dieser Substitution in sich übergeht, führen wir eine Function y' ein, welche von z' ebenso abhängt, wie y von z:

$$(5)\qquad y' = \sqrt[4]{(z'a)^2\,(z'b)^2\,(z'c)^3\,(z'x)}.$$

Setzen wir noch zur Abkürzung:

$$(6)\qquad \sigma = \sqrt[4]{\frac{(ac)\,(bc)}{(ax)(bx)}},$$

so finden wir:

$$(7)\qquad \begin{aligned} y' &= \sigma\Delta\sqrt[4]{(za)^2\,(zb)^2\,(zc)\,(zx)^3} = \sigma\Delta\,\frac{y^3}{(za)\,(zb)\,(zc)^2} \\ &= \sigma\Delta\,\frac{(za)\,(zb)\,(zc)\,(zx)}{y} \end{aligned}$$

und umgekehrt:

$$(8)\qquad \begin{aligned} y &= \frac{\sigma}{\Delta}\sqrt[4]{(z'a)^2(z'b)^2(z'c)\,(z'x)^3} = \frac{\sigma}{\Delta}\,\frac{y'^3}{(z'a)\,(z'b)\,(z'c)^2} \\ &= \frac{\sigma}{\Delta}\,\frac{(z'a)\,(z'b)\,(z'c)\,(z'x)}{y'}. \end{aligned}$$

Damit sind y' und z' rational durch y und z ausgedrückt und umgekehrt, während zwischen y' und z' dieselbe Gleichung besteht, wie zwischen y und z; d. h. *es ist in der That durch die Substitution* (3) *nicht nur die Ebene der z umkehrbar eindeutig auf sich selbst bezogen, sondern auch das algebraische Gebilde* (y, z). Aber diese letztere Beziehung kann, wenn (3) gegeben ist, noch auf 4 verschiedene Arten hergestellt werden; dieselben unterscheiden sich durch die Auswahl des in der Definition von σ (6) der 4. Wurzel beizulegenden Werthes. Sie gehen aus einander hervor, wenn man irgend eine von ihnen mit der Substitution (1) combinirt; es genügt daher, eine von ihnen zu betrachten und demgemäss von hier ab unter σ einen bestimmten Werth der 4. Wurzel zu verstehen.

Wollen wir nun weiter untersuchen, wie sich bei unserer Transformation das Querschnittsystem ändert, so haben wir vor allem zu beachten, dass *die Uebergangslinien unserer Figuren mit dem algebraischen Gebilde als solchem* (*mit der „idealen Riemann'schen Fläche*") *nichts zu thun haben* und folglich keineswegs in sich übergeführt zu werden brauchen. Vielmehr wird der Punkt o in einen andern o' übergehen und damit werden auch die Uebergangslinien sich ändern*). Um von den damit verbundenen Modificationen ein klares Bild zu bekommen, zeichnen wir beide Systeme von Uebergangslinien (die alten ausgezogen, die neuen punktirt) in eine und dieselbe Figur (den Punkt o' denken wir dabei ins unendliche verlegt). Die beiden Systeme

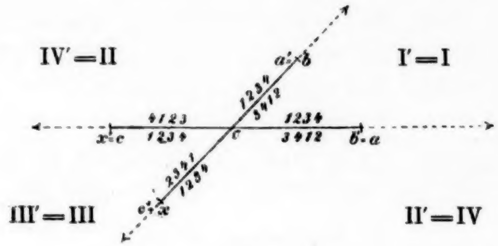


Fig. 6.

zerlegen zusammengenommen die z-Ebene in 4 Gebiete, die durch römische Ziffern bezeichnet sind; dieselben werden bei der Substitution (3) in der Weise vertauscht, wie es in der Figur angegeben ist. Diese Gebietseintheilung überträgt sich nun auch auf jedes Blatt unserer Fläche; dabei ist aber zu beachten, dass *die Gebiete in der transformirten Fläche in anderer Weise zu Blättern zusammengefasst sind, als in der ursprünglichen.* Ein Gebiet eines Blattes kann dem entsprechenden Gebiet eines beliebigen andern Blattes noch zugeordnet werden, da die Fläche regulär ist; ist das geschehen, so bestimmen sich die übrigen Zuordnungen entsprechender Gebiete durch Ueberschreitung entsprechender Uebergangslinien. Wir wollen etwa:

$$1\,\mathrm{I}' = 1\,\mathrm{I}$$

setzen; gehen wir dann von 1 I aus unter Ueberschreitung der Uebergangslinie oa nach 3 IV, so entspricht dem ein Weg, der von

*) Auch wenn man den Punkt o mit einem der Doppelpunkte der Substitution (3) zusammenfallen lässt, kann man nicht erreichen, dass das System der Uebergangslinien in sich transformirt wird, so lange man an der in Fig. 1 festgesetzten Aufeinanderfolge der Querschnitte um o herum festhält; ändert man aber diese, so werden die Figuren 2—5 viel weniger übersichtlich.

$1\,\mathrm{I}' = 1\,\mathrm{I}$ aus $o'a'$ überschreitet. Dort liegt aber $1\,\mathrm{II}$ an $1\,\mathrm{I}$ an, sodass wir:

$$3\,\mathrm{IV}' = 1\,\mathrm{II}$$

erhalten. So fortfahrend gewinnen wir die Tabelle:

$$(9)\quad \begin{array}{llll} 1\mathrm{I}' = 1\mathrm{I}, & 1\mathrm{II}' = 3\mathrm{IV}, & 1\mathrm{III}' = 4\mathrm{III}, & 1\mathrm{IV}' = 3\mathrm{II}, \\ 2\mathrm{I}' = 4\mathrm{I}, & 2\mathrm{II}' = 2\mathrm{IV}, & 2\mathrm{III}' = 3\mathrm{III}, & 2\mathrm{IV}' = 2\mathrm{II}, \\ 3\mathrm{I}' = 3\mathrm{I}, & 3\mathrm{II}' = 1\mathrm{IV}, & 3\mathrm{III}' = 2\mathrm{III}, & 3\mathrm{IV}' = 1\mathrm{II}, \\ 4\mathrm{I}' = 2\mathrm{I}, & 4\mathrm{II}' = 4\mathrm{IV}, & 4\mathrm{III}' = 1\mathrm{III}, & 4\mathrm{IV}' = 4\mathrm{II}. \end{array}$$

Unter Wiederaufnahme einer in § 1, Glchg. (4) erklärten Bezeichnung entnehmen wir dieser Tabelle die folgende:

$$(10)\quad \begin{array}{llll} a'b_1' = ba_1, & b'c_1' = ax_3, & c'x_1' = xc_4, & x'a_1' = cb_3, \\ a'b_2' = ba_4, & b'c_2' = ax_2, & c'x_2' = xc_3, & x'a_2' = cb_2, \\ a'b_3' = ba_3, & b'c_3' = ax_1, & c'x_3' = xc_2, & x'a_3' = cb_1. \\ a'b_4' = ba_2, & b'c_4' = ax_4, & c'x_4' = xc_1, & x'a_4' = cb_4. \end{array}$$

Damit sind wir nun im Stande, die Aenderung des Querschnittsystems bei unserer Transformation abzuleiten. Man hat z. B. nach § 1, (10):

$$A_1' = a_{24}' = a'c_2' + c'a_4'.$$

Die hier rechts stehenden Wegstücke kommen in der Tabelle (10) nicht unmittelbar vor, man kann aber etwa $a'c_2'$ durch $a'x_2' + x'c_2'$, $c'a_4'$ durch $c'x_4' + x'a_4'$ ersetzen und erhält dann aus (10):

$$A_1' = bc_2 + cx_3 + xc_1 + cb_4.$$

Fügt man rechts $xc_2 + cx_4$ zu, so kann man wieder $bc_2 + cb_4$ zu b_{24}, $xc_4 + cx_3$ zu x_{43}, $xc_1 + cx_4$ zu x_{14} zusammenziehen und erhält aus § 1, Glchgen (11) $A_1' = -B_2$. So gewinnt man die folgende Umsetzung der canonischen Querschnitte:

$$(11)\quad \begin{array}{ll} A_1' = -B_2, & B_1' = A_2, \\ A_2' = B_1, & B_2' = -A_1. \end{array}$$

Auch bei unserer zweiten Transformation geht sonach unser canonisches Querschnittsystem in sich über, abgesehen von Vertauschungen der Querschnitte unter einander und Aenderung ihres Richtungssinnes.

§ 3.

Die Integrale I. Gattung und ihre Perioden.

Alle Integrale I. Gattung unserer Fläche lassen sich linear und homogen durch zwei geeignete unter ihnen ausdrücken; als solche mögen wir etwa die beiden folgenden wählen:

(1) $$w_1 = \sqrt[4]{(ac)(bc)} \int \frac{(z\,dz)}{y},$$

(2) $$w_2 = \sqrt[4]{(ax)(bx)} \int \frac{(za)(zb)(zc)^2(z\,dz)}{y^3}.$$

Die Factoren vor den Integralzeichen sind zunächst im Interesse der Vereinfachung späterer Formeln hinzugefügt; man erkennt aber, dass dadurch w_1 und w_2 in den 4 Paaren homogener Variablen $a_1 a_2$, $b_1 b_2$, $c_1 c_2$, $x_1 x_2$ von derselben Dimension $-\frac{1}{4}$ werden. Die Perioden, welche diese Integrale bei *Durchlaufung* der Querschnitte unseres canonischen Systems annehmen, seien bezeichnet mit:

(3)

	A_1	A_2	B_1	B_2
w_1	ω_{11}	ω_{12}	ω_{13}	ω_{14}
w_2	ω_{21}	ω_{22}	ω_{23}	ω_{24}

Zur Ableitung von Relationen zwischen diesen Perioden benutzen wir die Resultate des vorigen Paragraphen über die eindeutigen Transformationen in sich, welche unsere Fläche zulässt. Bei der ersten Transformation haben wir:

(4) $$w_1' = -iw_1, \quad w_2' = iw_2.$$

Es ist aber z. B:

(5) $$\int\limits_{A_1'} dw_1' = \int\limits_{A_1} dw_1;$$

also folgt aus den Gleichungen (4) und § 2, (2):

$$+i\omega_{13} = \omega_{11}, \quad -i\omega_{14} = \omega_{12}, \quad -i\omega_{11} = \omega_{13}, \quad +i\omega_{12} = \omega_{14},$$
$$-i\omega_{23} = \omega_{21}, \quad +i\omega_{24} = \omega_{22}, \quad +i\omega_{21} = \omega_{23}, \quad -i\omega_{22} = \omega_{24};$$

Gleichungen, die sich auf die vier folgenden reduciren:

(6) $$\begin{aligned} \omega_{13} &= -i\omega_{11}, & \omega_{14} &= i\omega_{12}, \\ \omega_{23} &= i\omega_{21}, & \omega_{24} &= -i\omega_{22}. \end{aligned}$$

Die erste Transformation liefert also Relationen zwischen den verschiedenen Perioden desselben Integrals.

Bei der Substitution (3), (7) des § 2 dagegen wird:

(7) $$w_1' = w_2, \quad w_2' = w_1$$

(unter der Voraussetzung, dass über die Werthe der 4. Wurzeln in § 2, Glchg (6) und § 3, Glchgn (1), (2) in übereinstimmender Weise verfügt ist); also folgt aus § 2, (11):

$$-\omega_{24} = \omega_{11}, \quad \omega_{23} = \omega_{12}, \quad \omega_{22} = \omega_{13}, \quad -\omega_{21} = \omega_{14},$$
$$-\omega_{14} = \omega_{21}, \quad \omega_{13} = \omega_{22}, \quad \omega_{12} = \omega_{23}, \quad -\omega_{11} = \omega_{24};$$

Gleichungen die sich mit Rücksicht auf (6) auf die beiden folgenden reduciren:

(8) $$\omega_{21} = -i\omega_{12}, \quad \omega_{22} = -i\omega_{11}.$$

Die zweite Transformation liefert also Relationen zwischen den Perioden verschiedener Integrale.

Die Tabelle der Perioden wird demnach:

(9)

	A_1	A_2	B_1	B_2
w_1	ω_{11}	ω_{12}	$-i\omega_{11}$	$i\omega_{12}$
w_2	$-i\omega_{12}$	$-i\omega_{11}$	ω_{12}	$-\omega_{11}$

;

dabei ist bemerkenswerth, dass die bekannte Bilinearrelation zwischen den Perioden durch die angegebenen Werthe derselben von selbst erfüllt wird.

Statt der bisher benutzten Perioden führen wir nun neue ein, bei welchen die am Schlusse des § 2 hervorgehobene einfache Eigenschaft nicht mehr gilt, welche aber dafür im folgenden einfachere Formeln geben; wir setzen nämlich):*

(10) $$\begin{aligned} A_1 &= B_1 = a_{13}, & B_1 &= -A_1 - B_2 = x_{13}, \\ A_2 &= B_2 = x_{21} - a_{24}, & B_2 &= -A_2 - B_1 = x_{21}. \end{aligned}$$

Für diese wird das Periodenschema:

	A_1	A_2	B_1	B_2
w_1	$-i\omega_{11}$	$i\omega_{12}$	$-\omega_{11}-i\omega_{12}$	$-\omega_{12}+i\omega_{11}$
w_2	ω_{12}	$-\omega_{11}$	$i\omega_{12}+\omega_{11}$	$i\omega_{11}-\omega_{12}$

oder wenn**):

$$-\omega_{11} - i\omega_{12} = \eta_1,$$
$$-i\omega_{11} = \eta_2$$

gesetzt wird:

(11)

	A_1	A_2	B_1	B_2
w_1	$-\eta_2$	$-\eta_1+i\eta_2$	η_1	$-i\eta_1$
w_2	$i\eta_1+\eta_2$	$i\eta_2$	$-\eta_1$	$-i\eta_1$

.

*) Die Transformation (10) erfüllt in der That die Bedingungen, welche erforderlich sind, damit A_1, A_2, B_1, B_2 ebenfalls ein „canonisches" Querschnittsystem bilden.

**) An Integrale II. G. ist bei der Bezeichnung η natürlich nicht zu denken; es handelt sich darum, Anschluss an eine in der Theorie der Differentialgleichungen 2. O. gebrauchte Bezeichnung zu gewinnen.

Die 8 Perioden von w_1 und w_2 setzen sich also aus nur zwei Grössen mit Hilfe complexer ganzer Zahlen als Coefficienten linear zusammen.

§ 4.

Reduction auf die Normalform hyperelliptischer Gebilde.

Um unser Gebilde vom Geschlechte 2 auf die Normalform $(\lambda, \sqrt{f_6(\lambda)})$ zu reduciren, haben wir das Verhältniss zweier Differentiale I. G. als neue Variable einzuführen. Indem wir uns homogener Schreibweise bedienen, mögen wir etwa setzen:

$$(1)\qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= y^2, \\ \lambda_2 &= (za)(zb)(zc)^2. \end{aligned}$$

Um aus diesen Gleichungen umgekehrt z_1, z_2, y durch λ_1, λ_2 auszudrücken, führen wir einen Proportionalitätsfactor σ ein und erhalten zunächst:

$$(2)\qquad \begin{aligned} (zc) &= \sigma\lambda_2^2, \\ (zx) &= \sigma\lambda_1^2 \end{aligned}$$

und daraus weiter:

$$(3)\qquad \begin{aligned} (cx)(za) &= \sigma[(ax)\lambda_2^2 - (ac)\lambda_1^2], \\ (cx)(zb) &= \sigma[(bx)\lambda_2^2 - (bc)\lambda_1^2]. \end{aligned}$$

Irgend zwei dieser Formeln geben z_1, z_2; um y zu erhalten, definiren wir die *binäre Form* 6. *Grades* Λ durch:

$$(4)\qquad \Lambda = \lambda_1\lambda_2[(ax)\lambda_2^2 - (ac)\lambda_1^2][(bx)\lambda_2^2 - (bc)\lambda_1^2]$$

und erhalten:

$$(5)\qquad y = \frac{\sigma^2\lambda_2\sqrt{\Lambda}}{(cx)},$$

$$(6)\qquad \frac{y^3}{(za)(zb)(zc)^2} = \frac{\sigma^2\lambda_1\sqrt{\Lambda}}{(cx)},$$

sowie umgekehrt:

$$(7)\qquad \sqrt{\Lambda} = (cx)\,.\,(za)^3(zb)^3(zc)^4\,y.$$

Durch die Formeln (1) *und* (7) *sind* λ_1, λ_2, $\sqrt{\Lambda}$ *rational durch* z_1, z_2, y *ausgedrückt; durch* (2) *und* (5) *umgekehrt* $z_1 : z_2$ *und* $y : z_2^2$ *durch* $\lambda_1 : \lambda_2$ *und* $\sqrt{\Lambda} : \lambda_2^3$ *); es ist also dadurch die vierblättrige Riemann'sche Fläche des § 1 umkehrbar eindeutig auf eine zweiblättrige mit 6 Verzweigungspunkten bezogen.

---

*) Es scheint nicht möglich zu sein, auch die *Formen* des einen Gebildes ohne Benutzung eines Proportionalitätsfactors wie hier das σ umkehrbar eindeutig durch die des andern auszudrücken.

Um auf Grund dieser Formeln die Integrale des § 3 in die neue Fläche zu übertragen, bilden wir noch:

$$d \log \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{(dz\,x)}{(zc)} - \frac{(dz\,x)}{(zx)}\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\,\frac{(cx)\,(z\,dz)}{(zc)\,(zx)},$$

oder mit Rücksicht auf (2):

(8) $$(cx)\,(z\,dz) = 2\sigma^2\lambda_1\lambda_2(\lambda\,d\lambda);$$

damit erhalten wir:

(9)
$$w_1 = 2\sqrt[4]{(ac)\,(bc)}\int\frac{\lambda_1(\lambda\,d\lambda)}{\sqrt{\Lambda}},$$
$$w_2 = 2\sqrt[4]{(ax)\,(bx)}\int\frac{\lambda_2(\lambda\,d\lambda)}{\sqrt{\Lambda}}.$$

Was die beiden *Transformationen in sich* betrifft, welche unsere neue Fläche gemäss § 2 ebenfalls zulassen muss, so lautet die erste derselben:

(10) $$\lambda_1' = \lambda_1,\quad \lambda_2' = -\lambda_2,\quad \sqrt{\Lambda'} = i\sqrt{\Lambda},$$

die zweite:

(11)
$$\lambda_1' = \sqrt{(ax)\,(bx)}\,\lambda_2,\qquad \lambda_2' = \sqrt{(ac)\,(bc)}\,\lambda_1,$$
$$\sqrt{\Lambda'} = \sqrt[4]{(ac)^3\,(bc)^3\,(ax)^3\,(bx)^3}\cdot\sqrt{\Lambda}.$$

Wir müssen noch zusehen, wie sich das auf unserer ursprünglichen Fläche eingetragene Querschnittsystem auf die neue zweiblättrige Fläche überträgt; dazu werden wir am bequemsten zu unhomogener Schreibweise übergehen. Zu diesem Zwecke werde gesetzt:

$$a = 0,\quad b = \infty,\quad c = 1;$$

dann erhalten wir statt der Formeln (1) — (8): *)

(1a) $$\lambda = -\frac{y^2}{z(z-1)^2} = \sqrt{\frac{z-x}{z-1}};$$

(2a) $$z - 1 = (x-1)\cdot\frac{1}{1-\lambda^2},\qquad z - x = (x-1)\,\frac{\lambda^2}{1-\lambda^2};$$

(3a) $$z = \frac{x-\lambda^2}{1-\lambda^2};$$

(4a) $$\Lambda = -\lambda(\lambda^2-1)\,(\lambda^2-x);$$

(5a) $$y = (1-x)\,\frac{\sqrt{\Lambda}}{(1-\lambda^2)^2};$$

(6a) $$\frac{y^3}{-z(z-1)^2} = (1-x)\,\frac{\lambda\sqrt{\Lambda}}{(1-\lambda^2)^2};$$

---

*) Wir führen für die Functionen $y : z_2^2$ und $\Lambda : \lambda_2^6$ keine neuen Zeichen ein, sondern behalten y und Λ bei.

$$\text{(7a)} \qquad \sqrt{\Lambda} = (1-x)\,\frac{y}{(z-1)^2};$$

$$\text{(8a)} \qquad \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{1}{2}\,(1-x)\,\frac{dz}{(z-x)\,(z-1)}.$$

Aus diesen Formeln entnehmen wir zunächst, dass *die Verzweigungspunkte beider Flächen sich gegenseitig entsprechen*, und zwar wie folgt:*)

$$\begin{array}{cccc}
z = 0, & y = z^{\frac{1}{2}}\sqrt[4]{x}, & \lambda = -\sqrt{x}, & \sqrt{\Lambda} = 0, \\
0, & iz^{\frac{1}{2}}\sqrt[4]{x}, & +\sqrt{x}, & 0, \\
\infty, & z^{\frac{3}{2}}, & -1, & 0, \\
\infty, & iz^{\frac{3}{2}}, & +1, & 0, \\
1, & 0, & \infty, & \infty, \\
x, & 0, & 0, & 0.
\end{array}$$

Um uns bestimmter ausdrücken und bestimmte Figuren zeichnen zu können, nehmen wir

$$x \text{ positiv, reell, } < 1$$

an. (Den allgemeinen Fall können wir durch stetige Aenderung von x auf diesen zurückführen.) Alsdann nehmen die Querschnitte des § 3 folgende Gestalt an: **)

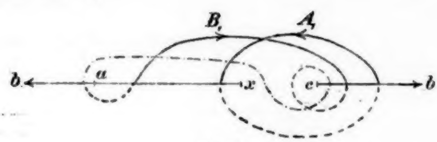


Fig. 7.

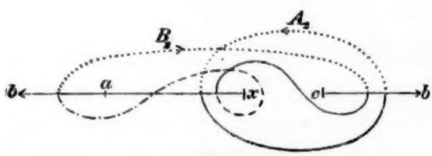


Fig. 8.

---

*) Die bei $z = 0$ und bei $z = \infty$ übereinanderliegenden Verzweigungspunkte sind durch die Anfangsglieder der zugehörigen Reihenentwicklungen von y nach Potenzen von z unterschieden; $\sqrt[4]{x}$ bedeutet einen bestimmten aber willkürlichen Werth der 4. Wurzel, $\sqrt{x}$ das Quadrat desselben. Wird in dem nachher untersuchten speciellen Fall $\sqrt[4]{x}$ positiv reell genommen, so verbinden der erste und der dritte Verzweigungspunkt das erste und dritte, der zweite und der vierte das zweite und vierte Blatt.

**) Der Deutlichkeit wegen ist jedes Paar Querschnitte in einer besonderen Figur gezeichnet; Linien des ersten Blattes sind ausgezogen, des 2. mit Strichen, des 3. mit Strichen und Punkten, des 4. mit Punkten bezeichnet.

In der Ebene λ können wir ein System von Uebergangslinien annehmen wie folgt: *)

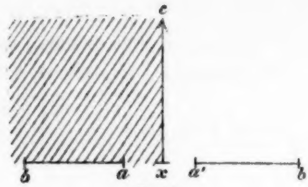


Fig. 9.

das schraffirte Gebiet des ersten Blattes der Fläche $(\lambda, \sqrt{\Lambda})$ entspricht dann derjenigen Halbebene des ersten Blattes der Fläche (z, y), in welcher z einen positiv imaginären Bestandtheil hat.

Verfolgen wir etwa, wie sich z. B. B_1 in diese Fig. 9 überträgt. Dabei haben wir nur zu beachten, dass in c und x die Winkel auf der λ-Fläche nur halb so gross sind als auf der z-Fläche, während sonst überall (auch in a und b) die Abbildung conform ist. Zieht man also den Querschnitt B_1 in Fig. 7 bis dicht an die geraden Verbindungslinien der Verzweigungspunkte zusammen, so entspricht ihm folgende Linie auf der λ-Fläche: **)

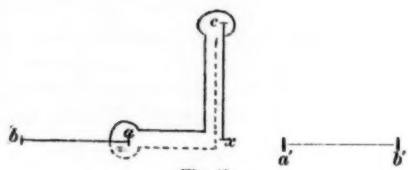


Fig. 10.

die mit der folgenden äquivalent ist:

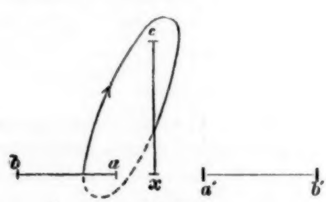


Fig. 11.

*) Die Verzweigungspunkte in Fig. 9 sind mit denselben Buchstaben bezeichnet, wie die entsprechenden in Fig. 8; entsprechen zwei Punkte von (9) demselben von (8), so sind sie durch Accente unterschieden.

**) In Figg. 10—12 ist der Bequemlichkeit halber c im Endlichen gezeichnet.

Führt man dasselbe mit den übrigen Querschnitten aus, so erhält man folgende Figur:

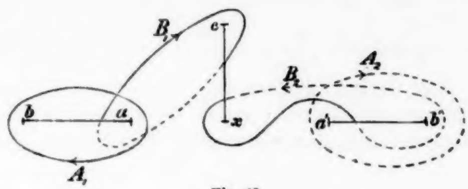


Fig. 12.

Damit ist das § 3, *Glchgen.* 10 *definirte Querschnittsystem auf die zweiblättrige Fläche übertragen.*

Wir fragen noch, *wie bei dieser Zerschneidung der Fläche die Zerlegungen von* Λ *in zwei cubische Factoren* φ, ψ, *wie sie in den geraden Sigma-, bezw. Thetafunctionen auftreten, sich den transcendenten Charakteristiken dieser Functionen zuordnen.* Auf Grund der von Hrn. Klein*) gegebenen Regel finden wir insbesondere:

den Zerlegungen:

$$\varphi = (ac)\,\lambda_1^3 - (ax)\,\lambda_1\lambda_2^2, \qquad \varphi = (ac)\,\lambda_1^2\lambda_2 - (ax)\,\lambda_2^3,$$
$$\psi = (bc)\,\lambda_1^2\lambda_2 - (bx)\,\lambda_2^3; \qquad \psi = (bc)\,\lambda_1^3 - (bx)\,\lambda_1\lambda_2^2$$

entsprechen bezw. die Charakteristiken:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

§ 5.

Thetanullwerthe und automorphe Primformen.

Nunmehr sind alle Vorbereitungen getroffen, um zu der in Aussicht genommenen Darstellung der Primformen durch Thetanullwerthe übergehen zu können. Wir knüpfen dabei an an die Formel des Hrn. Thomae:**)

$$(1) \qquad \vartheta = \frac{1}{2\pi i}\sqrt{p_{12}}\,\sqrt[8]{\Delta_\varphi\,\Delta_\psi}$$

und haben nur die aus unseren Entwicklungen sich ergebenden Werthe der auftretenden Grössen in dieselbe einzusetzen. Dazu müssen wir uns vor allem die Periodendeterminanten und Thetanullwerthe verschaffen; wir schreiben die § 3, 11 gegebene Tabelle, die sich auf

*) Dieser Ann. Bd. 32, p. 358.

**) Journal f. d. r. u. a. Math. Bd. 71, p. 216.

Durchlaufung von Periodenwegen bezieht, um in die folgende auf *Ueberschreitung* von Querschnitten bezügliche:

	A_1	A_2	B_1	B_2
w_1	η_1	$-i\eta_1$	η_2	$\eta_1 - i\eta_2$
w_2	$-\eta_1$	$-i\eta_1$	$-i\eta_1 - \eta_2$	$-i\eta_2$

Aus dieser entnehmen wir die folgenden Werthe der Periodendeterminanten:

$$(2)\quad \begin{array}{lll} p_{12} = -2i\eta_1^2, & p_{13} = -i\eta_1^2, & p_{14} = \eta_1^2 - 2i\eta_1\eta_2, \\ p_{34} = i\eta_1^2 + 2i\eta_1\eta_2 - 2i\eta_2^2, & p_{42} = -i\eta_1^2, & p_{23} = -\eta_1^2 + 2i\eta_1\eta_2, \end{array}$$

und der Thetamoduln:

$$(3)\qquad \tau_{11} = \frac{i}{2} + \eta, \quad \tau_{12} = \frac{1}{2}, \quad \tau_{22} = \frac{i}{2} + \eta;$$

indem

$$(4)\qquad \eta = \eta_1 : \eta_2$$

gesetzt ist. Es ist aber zu beachten, dass in Glchg. (1) unter p_{12} die Periodendeterminante der *Normalintegrale*

$$\int \frac{\lambda_1(\lambda d\lambda)}{\sqrt{\Lambda}}, \quad \int \frac{\lambda_2(\lambda d\lambda)}{\sqrt{\Lambda}}$$

verstanden ist, welche sich von unsern Integralen w_1, w_2 durch die in § 4, Glchgn. (9) angegebenen Factoren unterscheiden; in Folge dessen ist in (1) für p_{12} das Product des unter (2) angegebenen Werthes in:

$$(5)\qquad \frac{1}{4}\,[(ac)\,(bc)\,(ax)\,(bx)]^{-\frac{1}{4}}$$

zu setzen. Setzt man dann noch zur Abkürzung:

$$(6)\qquad e^{\pi i\left(\eta + \frac{i}{2}\right)} = p,$$

so gehen aus (1), je nachdem man die eine oder die andere der beiden am Schlusse des vorigen Paragraphen hervorgehobenen Zerlegungen anwendet, die beiden Formeln hervor:

$$(7)\quad (ax)^{\frac{1}{4}}\,(bc)^{\frac{1}{4}} = 4\pi\sqrt{i}\,\eta_1^{-1} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m_1} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m_2} (-1)^{m_1 m_2}\, p^{m_1^2 + m_2^2},$$

$$(8)\quad (ac)^{\frac{1}{4}}\,(bx)^{\frac{1}{4}} = 4\pi\sqrt{i}\,\eta_1^{-1} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m_1} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m_2} (-1)^{\left(m_1 + \frac{1}{2}\right)\left(m_2 + \frac{1}{2}\right)}\, p^{\left(m_1 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(m_2 + \frac{1}{2}\right)^2}.$$

Diese beiden Formeln geben in der That die gesuchten analytischen Ausdrücke der beiden in diesem Fall existirenden Primformen durch Reihen, welche für alle in Betracht kommenden Werthe von η convergiren.

II. Der Fall $\lambda = \frac{1}{3}$, $\mu = 0$, $\nu = 0$.

§ 1.

Construction und kanonische Zerschneidung der Riemann'schen Fläche.

Nach der ausführlichen Discussion des vorigen Falles werden wir uns bei dem jetzigen kürzer fassen dürfen, um so mehr, als verschiedene Verhältnisse sich bei demselben einfacher gestalten. Das Integral, dessen Perioden wir zu betrachten haben, ist:

$$(1) \qquad \int \frac{(z\,dz)}{\sqrt[3]{(za)\,(zb)^2\,(zc)^2\,(zx)}}.$$

Die zugehörige Riemann'sche Fläche ist definirt durch die Irrationalität:

$$(2) \qquad y = \sqrt[3]{(za)\,(zb)^2\,(zc)^2\,(zx)};$$

ihre drei Blätter hängen in den vier Verzweigungspunkten a, b, c, x cyklisch zusammen. Wir unterscheiden die drei Blätter dadurch, dass wir festsetzen: *wenn y_k der Werth von y ist, welcher in dem über einer bestimmten Stelle z_0 der z-Ebene befindlichen Punkte des k^{ten} Blattes stattfindet, soll:*

$$(3) \qquad y_2 = \varepsilon y_1, \quad y_3 = \varepsilon^2 y_1$$

sein. (Unter ε soll in diesem Abschnitt stets die *bestimmte* dritte Einheitswurzel:

$$(4) \qquad \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}$$

verstanden werden). *Alsdann führt Umkreisung von a oder x in positivem Sinne aus dem ersten in's zweite, aus diesem in's dritte Blatt; dagegen ebensolche Umkreisung von b oder c aus dem* 1. *in's* 3., *aus diesem in's* 2. *Blatt.* Unter diesen Umständen werden wir die einfachste Uebersicht über die Gestalt der Fläche erhalten, wenn wir a mit b, c mit x durch Uebergangslinien verbinden; der Zusammenhang der Blätter längs derselben findet dann so statt, wie in der nachfolgenden Figur angegeben:

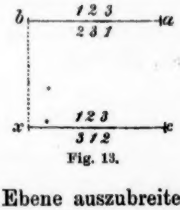


Fig. 13.

Um diese Fläche in eine Ebene auszubreiten, trennen wir die Blätter längs der Uebergangslinien von einander, schneiden jedes längs einer von b nach x führenden (in Fig. 13 punktirten) Linie auf, deformiren

sie in geeigneter Weise und legen sie schliesslich längs ab wieder so aneinander, wie sie dort ursprünglich zusammenhingen, sodass folgende Figur entsteht:

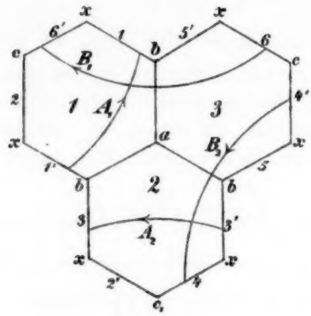


Fig. 14.

Die Seiten in dieser Figur sind einfach numerirt; zusammengehörige Seiten sind mit derselben Nummer bezeichnet und durch einen Accent unterschieden. *Als elementaren Periodenweg* (k) *bezeichnen wir dann eine Linie, welche von einem Punkt der Seite k' nach dem entsprechenden Punkt der Seite k führt.* Solcher elementaren Periodenwege haben wir in unserer Figur 6; zwischen ihnen bestehen (vgl. I, § 1, Glchgen (5)) die drei Relationen:

$$(5) \qquad \begin{aligned} (1) + (3) + (5) &= 0, \quad (\text{Umkreisung von } b), \\ (2) + (4) + (6) &= 0, \quad (\quad\text{,,}\quad\text{,,}\quad c), \\ (1) + (2) + (3) + (4) + (5) + (6) &= 0, \quad (\quad\text{,,}\quad\text{,,}\quad x), \end{aligned}$$

welche mit 2 unabhängigen äquivalent sind; *es bleiben also vier unabhängige Periodenwege und das Geschlecht der Fläche ergibt sich zu:*

$$p = 2.$$

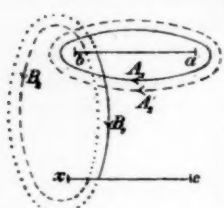


Fig. 15.

Aus diesen elementaren Periodenwegen kann in unserem Falle ein *kanonisches Querschnittsystem* ohne weiteres zusammengesetzt werden; z. B. in der in Fig. 14 bereits angegebenen Weise, nämlich:

$$(6) \qquad \begin{aligned} A_1 &= (1), \quad & B_1 &= -(6), \\ A_2 &= (3), \quad & B_2 &= (4). \end{aligned}$$

Auf die ursprüngliche Riemann'sche Fläche rückübertragen sieht dasselbe folgendermassen (Fig. 15) aus. *)

*) Im ersten, zweiten, dritten Blatt verlaufende Linien sind bezw. ausgezogen, gestrichelt, punktirt.

Umgekehrt erhält man aus (6) mit Rücksicht auf die Relationen (5) die folgenden *Ausdrücke der elementaren Perioden durch die kanonischen:*

$$(7)\qquad \begin{array}{llll} (1) = & A_1, & (2) = & B_1 - B_2, \\ (3) = & A_2, & (4) = & B_2, \\ (5) = & -A_1 - A_2, & (6) = & -B_1. \end{array}$$

§ 2.

Transformationen der Fläche in sich.

Unsere Riemann'sche Fläche gestattet drei von einander unabhängige cyklische Transformationen in sich.

Die *erste* derselben, von der Periode 3:

$$(1)\qquad z' = z, \quad y' = \varepsilon y$$

ist unmittelbar ersichtlich. Sie kann aufgefasst werden als eine Drehung der Fig. (14) um 120^0 in positivem Sinne um den Punkt a; sodass also bei ihr jedes Blatt der Fläche als ganzes in das nächste Blatt übergeführt wird. Dem entsprechend hat man bei ihr die folgende *Umsetzung der kanonischen Querschnitte:* *)

$$(2)\qquad \begin{array}{ll} A_1' = (1)' = (3) = A_2, & B_1' = -(6)' = -(2) = -B_1 + B_2, \\ A_2' = (3)' = (5) = -A_1 - A_2, & B_2' = \ (4)' = \ (6) = -B_1. \end{array}$$

Ebenfalls sofort ersichtlich ist, dass unsere Fläche *zweitens* auch in sich selbst übergeht, wenn man mit z die *lineare Substitution* vornimmt, die sich durch die Gleichungen ausdrückt:

$$(3)\qquad \begin{cases} (cx)\,(z'a) = (ac)\,(zx), \\ (cx)\,(z'b) = (bx)\,(zc), \\ (ab)\,(z'c) = (ac)\,(zb), \\ (ab)\,(z'x) = (bx)\,(za), \end{cases}$$

und deren Determinante:

$$(4)\qquad \Delta = -\frac{(ac)\,(bx)}{(ab)\,(cx)}$$

ist; setzt man nämlich:

$$(5)\qquad y' = \sqrt[3]{(z'a)\,(z'b)^2\,(z'c)^2\,(z'x)},$$

so findet man:

$$(6)\qquad y = -\Delta^{-1} y', \quad y' = -\Delta y.$$

*) Wegen der Bedeutung der Accente vgl. die erste Fussnote zu I, § 2.

Dabei wird jedes einzelne Blatt der Fläche in sich transformirt; die neue Figur der Querschnitte wird:

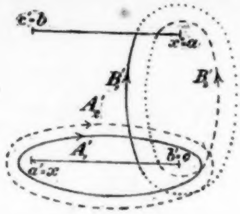


Fig. 16.

also die *zugehörige kanonische Periodentransformation:*

$$(7)\qquad \begin{aligned} A_1' &= -A_1, & B_1' &= -B_1, \\ A_2' &= -A_2, & B_2' &= -B_2. \end{aligned}$$

Weniger in die Augen fallend ist die *dritte* Transformation der Fläche in sich, welche folgendermassen erhalten wird: Wir nehmen mit z die lineare Substitution vor:

$$(8)\qquad \begin{aligned} (cb)\,(z'a) &= (ac)\,(zb), \\ (ax)\,(z'b) &= (xb)\,(za), \\ (ax)\,(z'c) &= (ac)\,(zx), \\ (cb)\,(z'x) &= (xb)\,(zc), \end{aligned}$$

deren Determinante:

$$\Delta = -\frac{(ac)\,(bx)}{(ax)\,(bc)}$$

ist; führen wir dann wieder die Function:

$$(10)\qquad y' = \sqrt[3]{(z'a)\,(z'b)^2\,(z'c)^2\,(z'x)}$$

ein, welche von z' ebenso abhängt wie y von z, so erhalten wir:

$$(11)\qquad y' = -\sigma\Delta\cdot\frac{(za)\,(zb)\,(zc)\,(zx)}{y} = -\sigma\Delta\,\frac{y^2}{(zb)\,(zc)}$$

und umgekehrt:

$$(12)\qquad y = -\frac{\sigma}{\Delta}\,\frac{(z'a)\,(z'b)\,(z'c)\,(z'x)}{y'} = -\frac{\sigma}{\Delta}\,\frac{y'^2}{(z'b)\,(z'c)}.$$

Dabei ist σ ein willkürlicher aber bestimmter Werth der 3. Wurzel:

$$(13)\qquad \sigma = \sqrt[3]{\frac{(bc)}{(ax)}}.$$

Es wird also in der That bei der Substitution (8) *nicht nur die z-Ebene, sondern auch unsere dreiblättrige Fläche umkehrbar eindeutig auf sich selbst bezogen;* von den 3 Arten, auf welche das noch möglich ist, ist durch die Verfügung über die dritte Wurzel in (13) eine ausgewählt. Dabei können die Uebergangslinien von Anfang an so gezogen werden,

dass sie bei (4) in sich übergehen; dann wird jedes ganze Blatt der Fläche wieder in ein ganzes Blatt übergeführt. *Aber wenn man etwa festsetzt, dass das erste Blatt der alten Fläche dem ersten der neuen entsprechen soll, wird das zweite der alten dem dritten der neuen, das dritte der alten dem zweiten der neuen entsprechen müssen;* wie man sieht, wenn man Umkreisungen entsprechender Verzweigungspunkte verfolgt (vgl. I, § 2). In Folge dessen wird das Querschnittsystem der Fig. 15 in das folgende neue (Fig. 17) übergeführt.

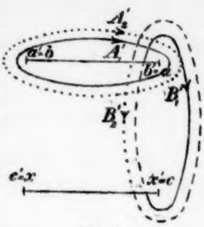


Fig. 17.

Aus dieser Figur entnimmt man mit Rücksicht auf die Relationen (5) des § 1, dass die *zugehörige kanonische Periodentransformation* folgendermassen lautet:

$$(14)\qquad \begin{aligned} A_1' &= A_1, & B_1' &= B_1 - B_2, \\ A_2' &= -A_1 - A_2, & B_2' &\qquad - B_2. \end{aligned}$$

Zum Schlusse dieses Paragraphen möge noch eine allgemeinere Bemerkung Platz finden: *es ist in dem jetzt behandelten Falle nicht möglich, das Querschnittsystem so zu wählen, dass es bei den eindeutigen Transformationen der Fläche in sich ebenfalls in sich übergeführt wird.*

§ 3.

Die Integrale I. Gattung und ihre Perioden.

Unter den Integralen erster Gattung auf unserer Fläche mögen wir etwa die beiden folgenden wählen, welche analog wie I, § 3 normirt sind:

$$(1)\qquad w_1 = \sqrt[3]{(bc)} \int \frac{(z\,dz)}{y}.$$

$$(2)\qquad w_2 = \sqrt[3]{(ax)} \int \frac{(zb)\,(zc)\,(z\,dz)}{y^2}.$$

Die Perioden, welche diese Integrale bei *Durchlaufung* der Querschnitte unseres kanonischen Systems annehmen, seien bezeichnet mit:

(3)

	A_1	A_2	B_1	B_2
w_1	ω_{11}	ω_{12}	ω_{13}	ω_{14}
w_2	ω_{21}	ω_{22}	ω_{23}	ω_{24}

Wir untersuchen wieder das Verhalten dieser Functionen gegenüber den linearen Transformationen des vorigen Paragraphen. Bei der Substitution (1) desselben haben wir:

(4) $$w_1 = \varepsilon w_1', \quad w_2 = \varepsilon^2 w_2';$$

also folgt mit Rücksicht auf § 2 (2):

$$\begin{array}{ll}
\omega_{11} = \quad \varepsilon\omega_{12}, & \omega_{21} = \quad \varepsilon^2\omega_{22}, \\
\omega_{12} = -\varepsilon\omega_{11} - \varepsilon\omega_{12}, & \omega_{22} = -\varepsilon^2\omega_{21} - \varepsilon^2\omega_{22}, \\
\omega_{13} = -\varepsilon\omega_{13} + \varepsilon\omega_{14}, & \omega_{23} = -\varepsilon^2\omega_{23} + \varepsilon^2\omega_{24}, \\
\omega_{14} = -\varepsilon\omega_{13}, & \omega_{24} = -\varepsilon^2\omega_{23}.
\end{array}$$

Die erste Transformation liefert also die folgenden Relationen je zwischen den Perioden eines und desselben Integrals:

(5) $$\begin{array}{ll}
\omega_{12} = \varepsilon^2\omega_{11}, & \omega_{14} = -\varepsilon\,\omega_{13}; \\
\omega_{22} = \varepsilon\,\omega_{11}, & \omega_{24} = -\varepsilon^2\omega_{23}.
\end{array}$$

Die *zweite* Transformation des § 2 liefert:

(6) $$w_1 = -w_1', \quad w_2 = -w_2',$$

also *keine Relationen zwischen den Perioden.*

Bei der *dritten* Transformation endlich ist:

(7) $$w_1 = w_2', \quad w_2 = w_1';$$

also wegen § 2 (14):

$$\begin{array}{ll}
\omega_{11} = \quad \omega_{21}, & \omega_{21} = \quad \omega_{11}, \\
\omega_{12} = -\omega_{21} - \omega_{22}, & \omega_{22} = -\omega_{11} - \omega_{12}, \\
\omega_{13} = \quad \omega_{23} - \omega_{24}, & \omega_{23} = \quad \omega_{13} - \omega_{14}, \\
\omega_{14} \qquad\quad - \omega_{24}; & \omega_{24} = \qquad\quad - \omega_{14}.
\end{array}$$

Diese Transformation liefert also folgende Ausdrücke der Perioden des zweiten Integrals durch die des ersten:

(8) $$\omega_{21} = \omega_{11}, \quad \omega_{23} = \varepsilon^2\omega_{13}.$$

Setzen wir also:

(9) $$\omega_{11} = -\eta_2, \quad \omega_{13} = +\eta_1,$$

so wird die Tabelle der Perioden:

(10)

	A_1	A_2	B_1	B_2
w_1	$-\eta_2$	$-\varepsilon^2\eta_2$	η_1	$-\varepsilon\eta_1$
w_2	$-\eta_2$	$-\varepsilon\,\eta_2$	$-\varepsilon^2\eta_1$	$\varepsilon\eta_1$

Auch in diesem Fall ist die Bilinearrelation zwischen den Perioden durch die angegebenen Werthe derselben von selbst erfüllt.

§ 4.

Reduction auf die Normalform hyperelliptischer Gebilde.

Die Reduction auf die Normalform hyperelliptischer Gebilde ist in diesem Falle etwas umständlicher als im ersten. Setzen wir wieder

$$dw_1 : dw_2 = \lambda_1 : \lambda_2,$$

also etwa:

$$(1)\qquad \begin{aligned}\lambda_1 &= y,\\ \lambda_2 &= (zb)(zc),\end{aligned}$$

so erhalten wir zunächst:

$$(2)\qquad -\frac{(\lambda d\lambda)}{\lambda_1\lambda_2} = d\log\lambda_1 - d\log\lambda_2 = \frac{1}{3}\,\frac{q(zdz)}{(za)(zb)(zc)(zx)}.$$

Die rechts im Zähler stehende Form:

$$(3)\qquad q = -(ab)(zc)(zx) + (cx)(za)(zb)$$

ist nicht selbst rational durch λ_1, λ_2 ausdrückbar, wohl aber ihr Quadrat; mit Rücksicht auf die Relationen:

$$(ab)^2(zc)^2 = (bc)^2(za)^2 - (ac)^2(zb)^2 + 2(ab)(ac)(zb)(zc),$$

$$(cx)^2(za)^2 = (ax)^2(zc)^2 + (ac)^2(zx)^2 - 2(ac)(ax)(zc)(zx),$$

sowie:

$$(ab)(zx) - (ax)(zb) = (xb)(za)$$

folgt nämlich:

$$(4)\qquad \begin{aligned}q^2 = {}&(bc)^2(za)^2(zx)^2 + (ax)^2(zb)^2(zc)^2\\ &+ 2[(ab)(xc) + (ac)(xb)](za)(zb)(zc)(zx).\end{aligned}$$

Definirt man also die Form 6. Grades Λ durch:

$$(5)\qquad \Lambda = (bc)^2\lambda_1^6 + 2(ab)(xc) + (ac)(xb)]\,\lambda_1^3\lambda_2^3 + (ax)^2\lambda_2^6,$$

so erhält man:

$$(6)\qquad q = \frac{\sqrt{\Lambda}}{\lambda_2^3},\qquad \sqrt{\Lambda} = (zb)^3(zc)^3\,q$$

und damit aus (2):

$$(7)\qquad \frac{(\lambda d\lambda)}{\sqrt{\Lambda}} = -\frac{1}{3}\,\frac{(zdz)}{y^2}.$$

Durch (1) *und* (6) *sind* $\lambda_1, \lambda_2, \sqrt{\Lambda}$ *rational durch* z_1, z_2, y *ausgedrückt.* Um die Umkehrung dieser Formeln zu erzielen, leiten wir aus ihnen andere ab, welche sowohl in z_1, z_2, als in λ_1, λ_2 homogen sind, zunächst:

$$(8)\qquad (zb)(zc)\,\lambda_1^3 = (za)(zx)\,\lambda_2^3;$$

$$(9)\qquad (zb)(zc)\sqrt{\Lambda} = \lambda_2^3[-(ab)(zc)(zx) + (cx)(za)(zb)].$$

Aus diesen können wir auf verschiedene Weisen weitere Relationen erhalten, von welchen sich ein in den z linearer Factor abspalten lässt, z. B. durch Multiplication von (8) mit (bc) und Subtraction von (9) die folgende:

$$(zb)\,(zc)\left[(bc)\,\lambda_1^3 - \sqrt{\Lambda}\right] = \lambda_2^3 \cdot (zb)\,[2(ac)\,(zx) - (ax)\,(zc)]$$

oder nach Division mit (zb):

$$(10)\qquad \frac{(zx)}{(zc)} = \frac{(bc)\,\lambda_1^3 + (ax)\,\lambda_2^3 - \sqrt{\Lambda}}{2(ac)\,\lambda_2^3}.$$

Ganz ebenso wird erhalten:

$$(11)\qquad \frac{(za)}{(zb)} = \frac{(bc)\,\lambda_1^3 + (ax)\,\lambda_2^3 + \sqrt{\Lambda}}{2(bx)\,\lambda_2^3}.$$

und endlich erhält man aus (1) direct:

$$(12)\qquad \frac{y}{(zb)\,(zc)} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Durch (11) *und* (12) *sind auch umgekehrt die Functionen der alten Fläche rational durch die der neuen ausgedrückt**).

Wir fügen noch die Formeln für die Transformation der Integrale bei, welche sich unmittelbar aus (7) ergeben:

$$(13)\qquad \begin{aligned} w_1 &= -3\sqrt[3]{bc}\int \frac{\lambda_1(\lambda\,d\lambda)}{\sqrt{\Lambda}},\\ w_2 &= -3\sqrt[3]{ax}\int \frac{\lambda_2(\lambda\,d\lambda)}{\sqrt{\Lambda}}, \end{aligned}$$

sowie die Formeln für die in § 2 untersuchten *Transformationen der Fläche in sich*, ausgedrückt in λ_1, λ_2, $\sqrt{\Lambda}$; nämlich:

für die *erste:*

$$(14)\qquad \lambda_1' = \varepsilon\lambda_1,\quad \lambda_2' = \lambda_2,\quad \sqrt{\Lambda'} = \sqrt{\Lambda};$$

für die *zweite:*

$$(15)\qquad \lambda_1' = -\Delta\lambda_1,\quad \lambda_2' = -\Delta\lambda_2,\quad \sqrt{\Lambda'} = -\Delta^3\sqrt{\Lambda'};$$

für die *dritte*, unter σ einen Proportionalitätsfactor verstanden:

$$(16)\qquad \lambda_1' = \sigma\sqrt[3]{(ax)^2}\,\lambda_2,\qquad \lambda_2' = \sigma\sqrt[3]{(bc)^2}\,\lambda_1,$$
$$\sqrt{\Lambda'} = \sigma^3(ax)\,(bc)\sqrt{\Lambda}.$$

*) Wegen der *Formen* vgl. man die erste Fussnote zu I, § 4.

Endlich müssen wir noch das auf unserer ursprünglichen Fläche gezogene *Querschnittsystem* auf die neue Fläche übertragen. Wir schreiben (vgl. I, § 4) unsere Formeln unhomogen wie folgt:

$$(1\text{a})\qquad \lambda = -\frac{y}{z-1} = -\frac{z(z-1)(z-x)}{y^2} = -\sqrt[3]{\frac{z(z-x)}{z-1}};$$

$$(5\text{a})\qquad \Lambda = \lambda^6 + 2(2-x)\lambda^3 + x^2;$$

$$(6\text{a})\qquad \sqrt{\Lambda} = \frac{(z-1)(z-x)-(1-x)z}{-(z-1)} = -\frac{z^2-2z+x}{z-1};$$

$$(10\text{a})\qquad \frac{z-x}{z-1} = \frac{\lambda^3 - x - \sqrt{\Lambda}}{-2},$$

$$(11\text{a})\qquad z = \frac{\lambda^3 - x + \sqrt{\Lambda}}{-2}.$$

Aus diesen Formeln entnehmen wir zunächst, dass den Verzweigungspunkten der ersten Fläche die folgenden Punkte der zweiten entsprechen:

$$(17)\qquad \begin{array}{llll} z = 0, & \lambda = 0, & \sqrt{\Lambda} = x, \\ \infty, & \infty, & \infty \text{ wie } -\lambda^3, \\ 1, & \infty, & \infty \text{ wie } +\lambda^3, \\ x, & 0, & -x. \end{array}$$

Die Verzweigungspunkte der neuen Fläche liegen bei:

$$(18)\qquad \begin{aligned} \lambda_0 &= -(1+\sqrt{1-x})^{\frac{2}{3}}, \\ \lambda_1 &= -(1-\sqrt{1-x})^{\frac{2}{3}}; \\ \lambda_2 &= -\varepsilon\,(1+\sqrt{1-x})^{\frac{2}{3}}, \\ \lambda_3 &= -\varepsilon\,(1-\sqrt{1-x})^{\frac{2}{3}}; \\ \lambda_4 &= -\varepsilon^2(1+\sqrt{1-x})^{\frac{2}{3}}; \\ \lambda_5 &= -\varepsilon^2(1-\sqrt{1-x})^{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

Ihnen entsprechen auf der alten Fläche:

$$(19)\qquad z = 1 + \sqrt{1-x} \quad \text{und} \quad z = 1 - \sqrt{1-x}.$$

Damit können wir nun die Querschnitte von Figur 15 her übertragen. Wir nehmen wieder:

$$a = 0, \quad b = \infty, \quad c = 1, \quad \text{dagegen } x \text{ diesmal reell } > 1,$$

sodass wir zunächst folgende Figur erhalten:

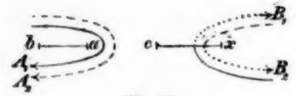


Fig. 18.

Ihr entspricht in der neuen Fläche

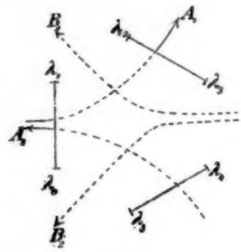


Fig. 19.

oder wenn wir die Querschnitte in geeigneter Weise zusammenziehen:

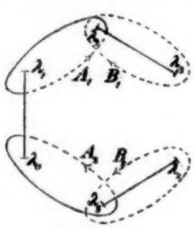


Fig. 20.

Aus dieser Figur entnehmen wir insbesondere, dass der Charakteristik:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

die folgende Zerlegung von Λ in zwei cubische Factoren entspricht:

$$\varphi = \lambda^3 + (1 + \sqrt{1-x})^2,$$
$$\psi = \lambda^3 + (1 - \sqrt{1-x})^2;$$

oder homogen geschrieben:

$$\varphi = (bc)\,\lambda_1^3 + \frac{1}{(bc)}\left[\sqrt{(ab)\,(xc)} + \sqrt{(ac)(xb)}\right]^2 \lambda_2^3,$$

$$\psi = (bc)\,\lambda_1^3 + \frac{1}{(bc)}\left[\sqrt{(ab)\,(xc)} - \sqrt{(ac)\,(xb)}\right]^2 \lambda_2^3.$$

§ 5.

Thetanullwerthe und automorphe Primformen.

Wir knüpfen wieder an (vgl. I, § 5) an die Formel:

$$\vartheta = \frac{1}{2\pi i}\sqrt{p_{12}}\,\sqrt[8]{\Delta\varphi\,\Delta\psi}, \tag{1}$$

indem wir die aus unseren Entwicklungen folgenden Werthe der vorkommenden Grössen in dieselbe einsetzen. Wir setzen zunächst die Tabelle § 3 (10) um in die folgende, die sich auf *Ueberschreitung* von Querschnitten bezieht:

(2)

	A_1	A_2	B_1	B_2
w_1	η_1	$-\varepsilon\eta_1$	η_2	$\varepsilon^2\eta_2$
w_2	$-\varepsilon^2\eta_1$	$\varepsilon\eta_1$	η^2	$\varepsilon\;\eta_2$

und entnehmen ihr die nachstehenden Werthe der Periodendeterminanten:

$$\begin{aligned} &p_{12} = (\varepsilon - 1)\,\eta_1^2, && p_{13} = -\,\varepsilon\eta_1\eta_2, && p_{14} = \;\;2\varepsilon\eta_1\eta_2, \\ &p_{34} = (\varepsilon - \varepsilon^2)\,\eta_2^2, && p_{42} = -\,\varepsilon\eta_1\eta_2, && p_{23} = -2\varepsilon\eta_1\eta_2 \end{aligned} \tag{3}$$

und der Thetamoduln:

$$\begin{aligned} \tau_{11} = \tau_{22} &= \;\;\frac{2}{3}(1-\varepsilon)\,\eta, \\ \tau_{12} &= -\frac{1}{3}(1-\varepsilon)\,\eta. \end{aligned} \tag{4}$$

In (1) ist jedoch wegen § 4, Glchgen. (13) für p_{12} das Product aus dem unter (3) angegebenen Werthe in:

$$\frac{1}{9}\,(ax)^{-\frac{1}{3}}\,(bc)^{-\frac{1}{3}} \tag{5}$$

zu setzen. Schreibt man noch:

$$p \text{ für } e^{\frac{2\pi i}{3}(1-\varepsilon)\eta},$$

so erhält man schliesslich:

$$(6) \qquad (ax)^{\frac{1}{3}} (bc)^{\frac{1}{3}} = 2\sqrt[4]{-3}\,\pi i\, \eta_1^{-1} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m_1} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m_2}\, p^{m_1^2 + m_1 m_2 + m_2^2}.$$

Auch in diesem Falle ist also die eine hier existirende Primform ausgedrückt durch eine Reihe, welche für alle in Betracht kommenden Werthe von η convergirt.

Göttingen, August 1892.

[In den beiden untersuchten Fällen haben sich für die Primformen Reihen der Form $\Sigma\Sigma p^{am_1^2 + bm_1 m_2 + cm_2^2}$ ergeben. Hrn. H. Weber verdanke ich die Bemerkung, dass bereits Dirichlet auf solche Reihen aufmerksam geworden ist, vgl. Bd. I seiner ges. Werke p. 467 ff. Neuerdings spielen sie eine grosse Rolle in der Theorie der elliptischen Modulfunctionen; vgl. z. B. p. 318 des inzwischen erschienenen II. Bandes des Werkes von Klein und Fricke über dieselben. In der That gehen die betrachteten Integrale durch Transformationen höherer Ordnung in elliptische Integrale über. Dec. 1892].

Zur Integration der Systeme totaler linearer Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen.

Von

J. Horn in Berlin.

In meinen früheren Arbeiten über Systeme linearer Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen*) habe ich ein gewisses System linearer partieller Differentialgleichungen mit drei linear unabhängigen Integralen

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a_0 z + a_1 \frac{\partial z}{\partial x} + a_2 \frac{\partial z}{\partial y},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = b_0 z + b_1 \frac{\partial z}{\partial x} + b_2 \frac{\partial z}{\partial y},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = c_0 z + c_1 \frac{\partial z}{\partial x} + c_2 \frac{\partial z}{\partial y}$$

in den Mittelpunkt gestellt, um an einem Beispiele zu zeigen, wie man bei der Behandlung linearer Differentialgleichungensysteme mit mehreren Veränderlichen nach dem Vorbild der Fuchs'schen Theorie verfahren kann. Ich habe damals das betrachtete System partieller linearer Differentialgleichungen auf ein System totaler linearer Differentialgleichungen zurückgeführt; ausserdem habe ich mich nicht unmittelbar auf die Fuchs'sche Theorie einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung gestützt, sondern schon im Falle einer unabhängigen Veränderlichen die Systeme linearer Differentialgleichungen erster Ordnung mit mehreren abhängigen Veränderlichen als Grundlage der ganzen Theorie behandelt.**)

*) Ueber ein System linearer partieller Differentialgleichungen (Act. math. Bd. 12). — Beiträge zur Ausdehnung der Fuchs'schen Theorie u. s. w, (Act. math. Bd. 14). — Ueber Systeme linearer Differentialgleichungen mit mehreren Veränderlichen, Habilitationsschrift der Univ. Freiburg i. Br. 1890 (Berlin, Mayer und Müller).

**) In einer neuerdings erschienenen Arbeit von Herrn Fuchs „Ueber lineare Differentialgleichungen, welche von Parametern unabhängige Substitutionsgruppen

Es erscheint mir zweckmässig, im Falle einer unabhängigen Veränderlichen von dem System

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy_\alpha}{dx} = \sum_\beta F_{\alpha\beta}(x) \, . \, y_\beta \quad (\alpha, \beta = 1, \dots m)$$

auszugehen, im Falle zweier unabhängigen Veränderlichen von dem System

$$\text{(B)} \quad dz_\alpha = \sum_\beta F_{\alpha\beta}(x,y) z_\beta \cdot dx + \sum_\beta G_{\alpha\beta}(x,y) z_\beta \cdot dy \quad (\alpha, \beta = 1, \dots m),$$

dessen Coefficienten die Integrabilitätsbedingungen

$$\sum_\gamma (F_{\alpha\gamma} G_{\gamma\beta} - G_{\alpha\gamma} F_{\gamma\beta}) = \frac{\partial G_{\alpha\beta}}{\partial x} - \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial y}$$

erfüllen.

In zwei Arbeiten „zur Theorie der Systeme linearer Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Veränderlichen"*) habe ich zur Ergänzung der früheren Untersuchungen über diesen Gegenstand**) eine Methode angegeben, durch welche sich jedes an einer singulären Stelle $x = 0$ reguläre System (A) in die canonische Form

$$x \frac{dy_\alpha}{dx} = \sum_\beta A_{\alpha\beta} y_\beta \quad (\alpha, \beta = 1, \dots m),$$

$$A_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} + a'_{\alpha\beta} x + a''_{\alpha\beta} x^2 + \cdots$$

überführen lässt***), und habe weiter die Form der Lösungen eines solchen canonischen Systems in der Umgebung der singulären Stelle $x = 0$ im Zusammenhang mit den Elementartheilern der charakteristischen Determinante $|a_{\alpha\beta} - p\delta_{\alpha\beta}|$ untersucht.†)

Ich beabsichtige nun, die Theorie der regulären Lösungen der Systeme totaler linearer Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen von der Form (B) zu behandeln.

Die Coefficienten $F_{\alpha\beta}(x, y)$, $G_{\alpha\beta}(x, y)$ seien rationale Functionen von x, y, deren Nenner die irreductiblen ganzen Functionen

---

besitzen" (Sitzungsberichte der Berl. Ac. 25. Febr. 1892) wird die Untersuchung von Systemen linearer partieller Differentialgleichungen auf diejenige einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung zurückgeführt.

*) Math. Ann. Bd. 39 (I) und 40 (II).

**) Königsberger, Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen. — Sauvage, Ann. de l'Éc. norm. 1886, 1888, 1889. — Grünfeld, Denkschriften der Wiener Academie, math.-nat. Classe 1888.

***) Bd. 40.

†) Bd. 39.

$$\varphi(x, y),\ \varphi'(x, y), \ldots$$

als Factoren enthalten. Wir bezeichnen dann die irreductiblen algebraischen Gebilde $\varphi(x, y) = 0$, $\varphi'(x, y) = 0, \ldots$ als singuläre Gebilde*) des Differentialgleichungensystems (B). Zunächst ist die allgemeine Form derjenigen Systeme (B) zu ermitteln, deren Lösungen sich an den Stellen eines singulären Gebildes $\varphi(x, y) = 0$ regulär verhalten. Sodann handelt es sich um die Untersuchung der Form und um die Berechnung der regulären Lösungen in der Umgebung der singulären Stellen, und zwar beschränken wir uns in der vorliegenden Arbeit auf die Umgebung solcher Stellen (a, b) des singulären Gebildes $\varphi(x, y) = 0$, an welchen $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ nicht gleichzeitig verschwinden und durch welche keines der übrigen singulären Gebilde hindurchgeht.

Um die Lösungen des Differentialgleichungensystems (B) in der Umgebung einer Stelle (a, b) des singulären Gebildes $\varphi(x, y) = 0$ zu untersuchen, führen wir an Stelle der unabhängigen Veränderlichen x, y neue Veränderliche φ, ψ ein, wo ψ eine passend gewählte (lineare) Function von x, y ist. Dadurch erhält das System (B) die Gestalt:

$$(\mathrm{B}')\qquad \begin{aligned} \varphi^{h+1}\frac{\partial z_\alpha}{\partial \varphi} &= \sum_\beta L_{\alpha\beta} z_\beta, \\ \varphi^{h+1}\frac{\partial z_\alpha}{\partial \psi} &= \sum_\beta M_{\alpha\beta} z_\beta. \end{aligned} \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots m).$$

In § 1 wird das System

$$\varphi^{h+1}\frac{\partial z_\alpha}{\partial \varphi} = \sum_\beta L_{\alpha\beta} z_\beta \quad (\alpha, \beta = 1, \ldots m)$$

mit der einzigen unabhängigen Veränderlichen φ unter der Voraussetzung, dass es an der singulären Stelle $\varphi = 0$ regulär ist, durch eine Reihe von Transformationen auf die Form:

$$\varphi\frac{\partial z_\alpha}{\partial \varphi} = \sum_\beta (P_{\alpha\beta}^{(0)} + \varphi P'_{\alpha\beta} + \cdots) z_\beta \quad (\alpha, \beta = 1 \ldots m)$$

gebracht.**) Auf diese Weise möge das ganze System (B') übergehen in

$$(\mathrm{B}'')\qquad \begin{aligned} \varphi\frac{\partial z_\alpha}{\partial \varphi} &= \sum_\beta (P_{\alpha\beta}^{(0)} + \varphi P'_{\alpha\beta} + \cdots) z_\beta, \\ \varphi^k\frac{\partial z_\alpha}{\partial \psi} &= \sum_\beta (Q_{\alpha\beta}^{(0)} + \varphi Q'_{\alpha\beta} + \cdots) z_\beta. \end{aligned} \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots m).$$

---

*) Vgl. Act. math. Bd. 12 und Habilitationsschrift.

**) Unter Benutzung der Arbeit Math. Ann. Bd. 40.

Die weitere Untersuchung wird nur unter der Annahme durchgeführt, dass die charakteristische Determinante

$$|P_{\alpha\beta}^{(0)} - p\delta_{\alpha\beta}|$$

lauter einfache Elementartheiler $p - p_1, \ldots, p - p_m$ besitzt, wobei, wie sich zeigen wird, $p_1, \ldots, p_m$ constante Grössen sein müssen. In § 2 wird durch eine Reihe weiterer Substitutionen die Zahl k auf Null reducirt, so dass unser Differentialgleichungensystem die canonische Form erhält:

$$(\mathrm{B}''') \qquad \begin{aligned} \varphi \frac{\partial z_\alpha}{\partial \varphi} &= \sum_\beta (R_{\alpha\beta}^{(0)} + \varphi R'_{\alpha\beta} + \cdots) z_\beta, \\ \frac{\partial z_\alpha}{\partial \psi} &= \sum_\beta (S_{\alpha\beta}^{(0)} + \varphi S'_{\alpha\beta} + \cdots) z_\beta. \end{aligned} \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots m).$$

In § 3 wird aus dieser canonischen Form des Differentialgleichungensystems die Beschaffenheit der Lösungen hergeleitet, unter Benutzung der entsprechenden Untersuchung für ein canonisches System mit einer unabhängigen Veränderlichen.*)

§ 4 beschäftigt sich mit dem Differentialgleichungensystem (B) unter der Voraussetzung, dass die Nenner der rationalen Functionen $F_{\alpha\beta}$, $G_{\alpha\beta}$ den irreductiblen Factor $\varphi(x, y)$ nur in der ersten Potenz enthalten, dass also das System von vornherein die Gestalt hat:

$$(\mathrm{B}^0) \qquad \begin{aligned} \varphi \frac{\partial z_\alpha}{\partial x} &= \sum_\beta A_{\alpha\beta} z_\beta, \\ \varphi \frac{\partial z_\alpha}{\partial y} &= \sum_\beta B_{\alpha\beta} z_\beta. \end{aligned} \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots m).$$

§ 1.

Erster Theil der Transformation.

Die Coefficienten des Differentialgleichungensystems (B) seien rationale Functionen von x, y von der Form

$$F_{\alpha\beta} = \frac{\mathfrak{F}_{\alpha\beta}(x, y)}{\varphi^{h+1}\,\varphi'^{\,h'+1}\cdots}, \qquad G_{\alpha\beta} = \frac{\mathfrak{G}_{\alpha\beta}(x, y)}{\varphi^{h+1}\,\varphi'^{\,h'+1}\cdots},$$

wo $\mathfrak{F}_{\alpha\beta}(x, y)$, $\mathfrak{G}_{\alpha\beta}(x, y)$ ganze Functionen, $\varphi(x, y)$, $\varphi'(x, y)$, ... irreductible ganze Functionen und $h, h' \ldots$ ganze positive Zahlen (einschliesslich Null) bezeichnen. In der Umgebung einer Stelle (a, b)

*) Math. Ann. Bd. 39.

des singulären Gebildes $\varphi(x, y) = 0$, *welches nicht zugleich einem der anderen singulären Gebilde* $\varphi'(x, y) = 0, \ldots$ *angehört*, kann man schreiben:

$$F_{\alpha\beta} = \frac{A_{\alpha\beta}}{\varphi^{h+1}}, \quad G_{\alpha\beta} = \frac{B_{\alpha\beta}}{\varphi^{h+1}},$$

wo $A_{\alpha\beta}$, $B_{\alpha\beta}$ in Potenzreihen von $x - a$, $y - b$ entwickelbar sind. Das System (B) erhält also die Form

$$(1) \qquad \begin{aligned} \varphi^{h+1} \frac{\partial z_\alpha}{\partial x} &= \sum_\beta A_{\alpha\beta} z_\beta, \\ \varphi^{h+1} \frac{\partial z_\alpha}{\partial y} &= \sum_\beta B_{\alpha\beta} z_\beta. \end{aligned} \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots m).$$

Unter (a, b) wird im Folgenden immer eine Stelle des algebraischen Gebildes $\varphi = 0$ verstanden, *an welcher* $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ *und* $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ *nicht gleichzeitig verschwinden.* An Stelle von x, y führen wir zwei neue Veränderliche φ, ψ ein, indem wir mit ψ eine lineare Function von x, y

$$\psi = \mathfrak{a}(x - a) + \mathfrak{b}(y - b) + c$$

von der Beschaffenheit bezeichnen, dass

$$\Delta = \mathfrak{b} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \mathfrak{a} \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

an der Stelle (a, b) einen von Null verschiedenen Werth hat. Dadurch geht das System (1) über in

$$(2) \qquad \begin{aligned} \varphi^{h+1} \frac{\partial z_\alpha}{\partial \varphi} &= \sum_\beta L_{\alpha\beta} z_\beta, \\ \varphi^{h+1} \frac{\partial z_\alpha}{\partial \psi} &= \sum_\beta M_{\alpha\beta} z_\beta, \end{aligned} \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots m),$$

dessen Coefficienten

$$L_{\alpha\beta} = \frac{A_{\alpha\beta}\mathfrak{b} - B_{\alpha\beta}\mathfrak{a}}{\Delta},$$

$$M_{\alpha\beta} = -\frac{A_{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - B_{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\Delta}$$

in Potenzreihen von φ, ψ entwickelbar sind, wenn wir $c = 0$ annehmen, wenn also ψ für $x = a$, $y = b$ verschwindet. Wir können diese Annahme machen, wenn wir uns auf eine bestimmte singuläre Stelle (a, b) beschränken. Gehen wir aber von (a, b) zu einer benachbarten singulären Stelle (a', b') über, so treten, wenn $\psi(a', b') = c'$ ist, an

Stelle der Potenzreihen von φ, ψ Potenzreihen von $\varphi, \psi - c'$. Wir betrachten zunächst das System

$$(3) \qquad \varphi^{\lambda+1} \frac{\partial z_\alpha}{\partial \varphi} = \sum_\beta L_{\alpha\beta} z_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots m),$$

in welchem wir φ als einzige unabhängige Veränderliche, ψ als Constante ansehen. Setzt man

$$L_{\alpha\beta} = L_{\alpha\beta}^{(0)} + \varphi L'_{\alpha\beta} + \varphi^2 L''_{\alpha\beta} + \cdots,$$

so sind $L_{\alpha\beta}^{(0)}, L'_{\alpha\beta}, L''_{\alpha\beta} \ldots$ Potenzreihen von ψ. Jede Lösung des Systems (2) ist auch eine Lösung des Systems (3) mit der einzigen unabhängigen Veränderlichen φ. Wir suchen die Bedingungen, unter welchen sich sämmtliche Lösungen des Systems (3) als Functionen von φ allein betrachtet an der singulären Stelle $\varphi = 0$ regulär verhalten, indem wir von der Arbeit „zur Theorie der Systeme linearer Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Veränderlichen II." (Math. Ann. Bd. 40) Gebrauch machen.

Wenn das System (3) an der singulären Stelle $\varphi = 0$ regulär ist, so ist die Determinante

$$\Delta(s) = \left| L_{\alpha\beta}^{(0)} - s\,\delta_{\alpha\beta} \right| \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots m)$$

durch s^m theilbar. Sie möge bei unbestimmtem ψ die mehrfachen Elementartheiler $s^{e'}, s^{e''}, \ldots s^{e^{(i)}}$ $(e' \geqq e'' \geqq \cdots \geqq e^{(i)})$ und ausserdem k einfache Elementartheiler s besitzen.*) Ist die Determinante $\Delta(s)$ durch s^m, alle Unterdeterminanten vom Grade $m-1, m-2, \ldots$ $\ldots m - i - k + 1$ bezw. durch $s^{l'}, s^{l''}, \ldots s^{l^{(i+k-1)}}$ theilbar, während nicht alle Unterdeterminanten $(i+k)^{\text{ten}}$ Grades durch s theilbar sind — alles bei unbestimmtem ψ, — so stimmen die Differenzen $m - l'$, $l' - l'', \ldots l^{(i+k-1)}$ abgesehen von der Anordnung mit den Zahlen $e', e'', \ldots e^{(i)}$ und den k Zahlen 1 überein. Immerhin ist denkbar, dass für einen speciellen Werth $\psi = \psi_0$ die Elementartheiler von $\Delta(s)$ anders ausfallen als bei unbestimmtem ψ, nämlich dann, wenn für irgend einen Werth von λ die durch $s^{l^{(\lambda)}}$ getheilten Unterdeterminanten $(m-\lambda)^{\text{ten}}$ Grades, welche für $s = 0$ nicht alle identisch in ψ verschwinden, für $\psi = \psi_0$ sämmtlich noch einmal durch s theilbar sind. Diese Unterdeterminanten sind aber Potenzreihen von ψ, welche nur für einzelne Werthe $\psi = \psi_0$ verschwinden können.

Durch Einführung der von φ unabhängigen unbestimmten Grössen $u_1, \ldots u_m$ fassen wir die m Gleichungen (3) zusammen in die Gleichung

---

*) Weierstrass, Berliner Monatsberichte, 1868, S. 310 ff.

$$\varphi \frac{\partial \sum\limits_\alpha u_\alpha z_\alpha}{\partial \varphi} = \sum_{\alpha\beta} L_{\alpha\beta}^{(0)} u_\alpha z_\beta + \cdots$$

und bringen das bilineare Formpaar

$$\sum_\alpha u_\alpha z_\alpha, \qquad \sum_\beta L_{\alpha\beta}^{(0)} u_\alpha z_\beta$$

durch lineare Transformation der beiden Variablenreihen $u_1, \ldots u_m$ und $z_1, \ldots z_m$ auf die Weierstrass'sche Normalform. Wir dürfen die Voraussetzung machen, dass für $\lambda = 1, 2 \ldots$ keine Unterdeterminante $(m-\lambda)^{\text{ten}}$ Grades durch eine höhere als die $l^{(\lambda)\text{te}}$ Potenz von s theilbar ist; denn durch eine lineare Transformation unseres Formenpaares kann dies stets erreicht werden. Einem beliebigen Elementartheiler s^e von $\Delta(s)$, für welchen $e = l^{(\varkappa-1)} - l^{(\varkappa)}$ ist, entsprechen die Variablen der Normalform

$$\begin{aligned} U_\mu &= \frac{1}{S_0^{(\varkappa-1)}}(C_{\varkappa\mu} u_\varkappa + \cdots + C_{m\mu} u_m), \\ Z_\nu &= \frac{1}{S_0^{(\varkappa)}}\;(C'_{\varkappa\nu} z_k + \cdots + C'_{m\nu} z_m), \end{aligned} \qquad (\mu = 0, 1, \ldots e-1)$$

welche den in denBerliner Monatsberichten 1868, S. 318, mit $X_{\lambda\mu}$, $Y_{\lambda\nu}$ bezeichneten Ausdrücken abgesehen von einer kleinen Aenderung entsprechen. Die Coefficienten $C_{\varkappa\mu}, \ldots C_{m\mu}$; $C'_{\varkappa\nu}, \ldots C'_{m\nu}$ sind ganze Functionen der $L_{\alpha\beta}^{(0)}$, also Potenzreihen von ψ, ebenso wie die durch

$$S^{(\varkappa-1)} = |L_{\alpha\beta}^{(0)} - s\delta_{\alpha\beta}| = S_0^{(\varkappa-1)} s^{l(\varkappa-1)} + \cdots,$$
$$(\alpha, \beta = \varkappa, \ldots m)$$
$$S^{(\varkappa)} \;= |L_{\alpha\beta}^{(0)} - s\delta_{\alpha\beta}| = S_0^{(\varkappa)} s^{l(\varkappa)} + \cdots,$$
$$(\alpha, \beta = \varkappa + 1, \ldots m)$$

definirten Grössen $S_0^{(\varkappa-1)}$, $S_0^{(\varkappa)}$. Die Potenzreihen von ψ $S_0^{(\varkappa-1)}$ und $S_0^{(\varkappa)}$ können nur für die oben mit ψ_0 bezeichneten Werthe von ψ verschwinden. Mithin sind, wenn $\psi = 0$ nicht zu den Werthen $\psi = \psi_0$ gehört, die Coefficienten von U_μ und Z_ν in gewöhnliche Potenzreihen von ψ entwickelbar, nur wenn $\psi = 0$ einer der Ausnahmswerthe ψ_0 ist, sind sie Potenzreihen von ψ mit einer endlichen Anzahl negativer Potenzen.

Die Variablen $U_1, \ldots U_m$; $Z_1, \ldots Z_m$ der Normalform, welche wir auch mit

$$U_1', \dots U_{\varrho}'; \dots; U_1^{(i)}, \dots U_{\varrho(i)}^{(i)}; U', \dots U^{(k)},$$

$$Z_1', \dots Z_{\varrho}'; \dots; Z_1^{(i)}, \dots Z_{\varrho(i)}^{(i)}; Z', \dots Z^{(k)},$$

bezeichnen, sind hiernach lineare Functionen von $u_1, \dots u_m$ bezw. $z_1, \dots z_m$, welche Potenzreihen von ψ (im Ausnahmefall Potenzreihen von ψ mit einer endlichen Anzahl negativer Potenzen) zu Coefficienten haben. Die zusammenfassende Gleichung geht über in

$$\varphi^{h+1} \frac{\partial \sum_\alpha U_\alpha Z_\alpha}{\partial \varphi} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=i} \left(U_2^{(\lambda)} Z_1^{(\lambda)} + \dots + U_{\varrho(\lambda)}^{(\lambda)} Z_{\varrho(\lambda)-1}^{(\lambda)}\right) + \cdots$$

und zerfällt wegen der Unbestimmtheit von $U_1, \dots U_m$ in die Gleichungen

$$(4)\quad \begin{aligned} &\varphi^{h+1} \frac{\partial Z_1^{(\lambda)}}{\partial \varphi} = \qquad + \cdots, \\ &\varphi^{h+1} \frac{\partial Z_2^{(\lambda)}}{\partial \varphi} = Z_1^{(\lambda)} + \cdots, \quad (\lambda = 1, \dots i), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\varphi^{h+1} \frac{\partial Z_{\varrho(\lambda)}^{(\lambda)}}{\partial \varphi} = Z_{\varrho(\lambda)-1}^{(\lambda)} + \cdots, \\ &\varphi^{h+1} \frac{\partial Z^{(\mu)}}{\partial \varphi} = \qquad + \cdots, \quad (\mu = 1, \dots k), \end{aligned}$$

deren Coefficienten Potenzreihen von ψ sind (im Ausnahmefall Potenzreihen von ψ mit einer endlichen Anzahl negativer Potenzen).

Durch die Substitution

$$(5)\quad \begin{aligned} &Z_1^{(\lambda)} = \varphi z_1^{(\lambda)}, \dots Z_{\varrho(\lambda)-1}^{(\lambda)} = \varphi z_{\varrho(\lambda)-1}^{(\lambda)}, \; Z_{\varrho(\lambda)}^{(\lambda)} = z_{\varrho(\lambda)}^{(\lambda)} \\ &\qquad\qquad (\lambda = 1, \dots i) \\ &Z^{(\mu)} = z^{(\mu)} \qquad (\mu = 1, \dots k) \end{aligned}$$

geht das System (4), wenn man zugleich zur Vereinfachung noch eine lineare Substitution anwendet, über in die Form

$$(6)\quad \begin{aligned} \varphi^{h+1} \frac{\partial z_1^{(\lambda)}}{\partial \varphi} &= A_{\lambda 1} z_{\varrho}' + \dots + A_{\lambda i} z_{\varrho(i)}^{(i)} \\ &\quad + B_{\lambda 1} z' + \dots + B_{\lambda k} z^{(k)} + \cdots, \\ \varphi^{h+1} \frac{\partial z_2^{(\lambda)}}{\partial \varphi} &= z_1^{(\lambda)} + \cdots, \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& \varphi^{h+1} \frac{\partial z^{(\lambda)}_{e(\lambda)-1}}{\partial \varphi} = Z^{(\lambda)}_{e(\lambda)-2} + \cdots, \\
(6) \qquad & \varphi^{h} \frac{\partial z^{(\lambda)}_{e(\lambda)}}{\partial \varphi} = z^{(\lambda)}_{e(\lambda)-1} + \cdots, \\
& \varphi^{h} \frac{\partial z^{(\mu)}}{\partial \varphi} = C_{\mu 1} z'_{e'} + \cdots + C_{\mu i} z^{(i)}_{e(i)} \\
& \qquad + D_{\mu 1} z' + \cdots + D_{\mu k} z^{(k)} + \cdots.
\end{aligned}
$$

Auch die Coefficienten des Systems (6) sind Potenzreihen von ψ (im Ausnahmefall Potenzreihen von ψ mit einer endlichen Anzahl negativer Potenzen). Die Aufsuchung der Bedingungen der Regularität und die weitere Transformation wird jetzt ebenso durchgeführt, wie es in der angeführten Arbeit im Falle einer einzigen unabhängigen Veränderlichen geschehen ist, mit dem Unterschied, dass an Stelle der dortigen unabhängigen Veränderlichen x die unabhängige Veränderliche φ tritt und dass die Coefficienten, welche früher constant waren, jetzt Functionen von ψ sind. Man muss nur bei jeder Transformation untersuchen, in welcher Weise die Substitutionscoefficienten und in Folge dessen die Coefficienten des transformirten Systems von ψ abhängen. Es genügt, wenn wir dies für die nächstfolgende Transformation andeuten. Wenn wir uns nur überall x durch φ ersetzt denken, können wir die Bezeichnungen der früheren Arbeit unverändert beibehalten; damit keine Verwechslung entsteht, wollen wir die Nummern der aus jener Arbeit anzuführenden Formeln in eckige Klammern setzen.

Zunächst muss die Bedingung [10]

$$
\begin{vmatrix} A_{11} & \ldots & A_{1i} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{i1} & \ldots & A_{ii} \end{vmatrix} = 0
$$

erfüllt sein und zwar identisch in ψ. Die Determinante habe den Rang p, und zwar sei $\varrho_1, \ldots \varrho_p$ die niedrigste Zeilencombination, zu welcher eine nicht identisch verschwindende Determinante R vom Grad p gehört. Die Coefficienten der nunmehr auszuführenden Substitution [11] sind rationale Functionen der A mit dem Nenner R. Als Potenzreihe von ψ kann die Determinante R nur für vereinzelte Werthe von ψ verschwinden, welche wir zu den Ausnahmswerthen ψ_0 hinzufügen. Gehört $\psi = 0$ nicht zu den Ausnahmswerthen, so sind sowohl die in den Coefficienten der Substitution [11] auftretenden Nenner als auch die Substitutionsdeterminante für $\psi = 0$ von Null verschieden. Somit sind die Coefficienten des transformirten Systems

[12] in Potenzreihen von ψ entwickelbar. (Sie sind Potenzreihen von ψ mit einer endlichen Anzahl negativer Potenzen, wenn $\psi = 0$ ein Ausnahmswerth ist) u. s. w.

Ueberhaupt müssen, wenn das System (3) regulär sein soll, die Gleichungen [10], [19], [22] . . . identisch in ψ bestehen. Sind diese Bedingungen erfüllt, so lässt sich das System (3) durch eine Reihe von Substitutionen, theils von der Form

$$z_\alpha = \sum_\beta h_{\alpha\beta} Z_\beta \quad (\alpha, \beta = 1, \ldots m),$$

theils von der Form

$$z_\alpha = \varphi Z_\alpha,$$

überführen in ein System von der Gestalt

$$\varphi \frac{\partial z_\alpha}{\partial \varphi} = \sum_\beta P_{\alpha\beta} z_\beta \quad (\alpha, \beta = 1, \ldots m), \tag{7}$$

dessen Coefficienten

$$P_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta}^{(0)} + \varphi P'_{\alpha\beta} + \varphi^2 P''_{\alpha\beta} + \cdots$$

Potenzreihen von φ sind. Im Laufe der Transformation tritt eine Anzahl in Potenzreihen von ψ entwickelbarer Determinanten auf, deren Nullstellen ψ_0 als Ausnahmswerthe erscheinen. Ist $\psi = 0$ kein solcher Ausnahmswerth, so sind sämmtliche Substitutionscoefficienten $h_{\alpha\beta}$ Potenzreihen von ψ, sämmtliche Substitutionsdeterminanten haben für $\psi = 0$ von Null verschiedene Werthe, und sämmtliche Coefficienten $P_{\alpha\beta}^{(0)}, P'_{\alpha\beta}, P''_{\alpha\beta}, \ldots$ des transformirten Differentialgleichungensystems (7) sind in Potenzreihen von ψ entwickelbar. Diese Coefficienten sind jedoch Potenzreihen von ψ mit einer endlichen Anzahl negativer Potenzen, wenn $\psi = 0$ eine der Stellen ψ_0 ist.

Wir wollen vorübergehend eine Stelle des singulären Gebildes $\varphi = 0$, für welche ψ keinen der Werthe ψ_0 annimmt, als eine gewöhnliche singuläre Stelle, eine Stelle jedoch, zu welcher einer der Werthe ψ_0 gehört, als eine Ausnahmestelle bezeichnen.

Durch die ausgeführten Transformationen möge das Differentialgleichungensystem

$$\varphi^{k+1} \frac{\partial z_\alpha}{\partial \psi} = \sum_\beta M_{\alpha\beta} z_\beta \quad (\alpha, \beta = 1, \ldots m)$$

übergehen in

$$\varphi^k \frac{\partial z_\alpha}{\partial \psi} = \sum_\beta Q_{\alpha\beta} z_\beta \quad (\alpha, \beta = 1, \ldots m), \tag{8}$$

wo k eine ganze positive Zahl (einschliesslich Null) bedeutet und

$$Q_{\alpha\beta} = Q_{\alpha\beta}^{(0)} + \varphi Q'_{\alpha\beta} + \varphi^2 Q''_{\alpha\beta} + \cdots$$

eine Potenzreihe von φ ist, deren Coefficienten $Q_{\alpha\beta}^{(0)}$, $Q'_{\alpha\beta}$, $Q''_{\alpha\beta}\cdots$ Potenzreihen von ψ sind, wenn $\psi=0$ eine gewöhnliche Stelle ist, dagegen Potenzreihen von ψ mit einer endlichen Anzahl negativer Potenzen, wenn $\psi=0$ zu den Ausnahmestellen gehört.

Wir können also den Satz aussprechen:

Wenn das Differentialgleichungensystem (1) *an dem singulären Gebilde* $\varphi=0$ *regulär ist, so geht es, wenn man sich auf die Umgebung einer bestimmten singulären Stelle* (a, b) *beschränkt, (für welche* $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ *und* $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ *nicht beide verschwinden und durch welche kein anderes singuläres Gebilde hindurchgeht) durch Einführung neuer Variablen* φ, ψ *über in die Form* (2) *und durch eine Reihe von Substitutionen theils von der Form*

$$z_\alpha=\sum_\beta h_{\alpha\beta}Z_\beta\quad(\alpha,\beta=1,\ldots m),$$

theils von der Form

$$z_\alpha=\varphi Z_\alpha,$$

in ein System von der Gestalt

$$(9)\qquad \begin{aligned}\varphi\frac{\partial z_\alpha}{\partial\varphi}&=\sum_\beta P_{\alpha\beta}z_\beta,\\ \varphi^k\frac{\partial z_\alpha}{\partial\psi}&=\sum_\beta Q_{\alpha\beta}z_\beta,\end{aligned}\qquad(\alpha,\beta=1,\ldots m),$$

dessen Coefficienten die Form

$$\begin{aligned}P_{\alpha\beta}&=P_{\alpha\beta}^{(0)}+\varphi P'_{\alpha\beta}+\cdots,\\ Q_{\alpha\beta}&=Q_{\alpha\beta}^{(0)}+\varphi Q'_{\alpha\beta}+\cdots\end{aligned}$$

haben. Die Substitutionscoefficienten $h_{\ \beta}$, *sowohl wie die Coefficienten* $P_{\alpha\beta}^{(0)}$, $P'_{\alpha\beta},\ldots$; $Q_{\alpha\beta}^{(0)}$, $Q'_{\alpha\beta}\ldots$. *sind in Potenzreihen von* ψ *entwickelbar; sie sind nur dann Potenzreihen von* ψ *mit einer endlichen Anzahl negativer Potenzen, wenn* (a, b) *eine der vereinzelt auftretenden Ausnahmestellen ist.*

§ 2.

Zweiter Theil der Transformation für den Fall einfacher Elementartheiler der charakteristischen Determinante.

Wir machen die Voraussetzung, die Determinante

$$(10)\qquad P(p)=\left|P_{\alpha\beta}^{(0)}-p\delta_{\alpha\beta}\right|,$$

die wir als charakteristische Determinante des Differentialgleichungen-

systems (9) bezeichnen, habe lauter einfache Elementartheiler $p-p_1, \ldots$ $\ldots p-p_m$. Die Grössen $p_1, \ldots p_m$ könnten als Wurzeln der Gleichung $P(p)=0$ Functionen von ψ sein, da die Grössen $P_{\alpha\beta}^{(0)}$ von ψ abhängen; im Verlauf der Untersuchung wird sich aber aus den Integrabilitätsbedingungen unseres Differentialgleichungensystems ergeben, dass $p_1, \ldots p_m$ constante Grössen sind, und weiter wird sich herausstellen, dass die Elementartheiler der Determinante (10) für keinen speciellen Werth von ψ andere sein können, als bei unbestimmtem ψ.

Wir nehmen zunächst keine Rücksicht darauf, in welcher Weise die Coefficienten $P_{\alpha\beta}^{(0)}, P'_{\alpha\beta}, \ldots; Q_{\alpha\beta}^{(0)}, Q'_{\alpha\beta}, \ldots$ von ψ abhängen. Durch eine lineare Substitution

$$z_\alpha = \sum_\beta h_{\alpha\beta} Z_\beta \quad (\alpha, \beta = 1, \ldots m),$$

deren Coefficienten Functionen von ψ sind, bringen wir das System (9) auf die Normalform, die wir, indem wir die transformirten Grössen ebenso bezeichnen wie die ursprünglichen, folgendermassen schreiben:

$$(11)\quad \begin{aligned} \varphi \frac{\partial z_\alpha}{\partial \varphi} &= p_\alpha z_\alpha + \varphi \sum_\beta P'_{\alpha\beta} z_\beta + \cdots, \\ \varphi^k \frac{\partial z_\alpha}{\partial \psi} &= \sum_\beta Q_{\alpha\beta}^{(0)} z_\beta + \varphi \sum_\beta Q'_{\alpha\beta} z_\beta + \cdots. \end{aligned} \quad (\alpha, \beta = 1, \ldots m).$$

Die Coefficienten des Systems (9) genügen den Integrabilitätsbedingungen

$$\sum_\gamma (P_{\alpha\gamma} Q_{\gamma\beta} - Q_{\alpha\gamma} P_{\gamma\beta}) + k Q_{\alpha\beta} = \varphi \frac{\partial Q_{\alpha\beta}}{\partial \varphi} - \varphi^k \frac{\partial P_{\alpha\beta}}{\partial \psi},$$

aus welchen, wenn man $\varphi = 0$ setzt, die Beziehungen

$$\sum_\gamma (P_{\alpha\gamma}^{(0)} Q_{\gamma\beta}^{(0)} - Q_{\alpha\gamma}^{(0)} P_{\gamma\beta}^{(0)}) + k Q_{\alpha\beta}^{(0)} = 0$$

hervorgehen. Setzt man für die Grössen $P_{\alpha\beta}^{(0)}$ die Werthe der Normalform (11), nämlich

$$P_{\alpha\alpha}^{(0)} = p_\alpha, \quad P_{\alpha\beta}^{(0)} = 0 \quad (\alpha \gtrless \beta),$$

so erhält man

$$Q_{\alpha\beta}^{(0)} (p_\alpha - p_\beta + k) = 0.$$

$Q_{\alpha\beta}^{(0)}$ kann also nur dann von Null verschieden sein, wenn $p_\beta - p_\alpha = k$ ist. Kommt unter den Wurzeln $p_1, \ldots p_m$ der charakteristischen Gleichung die Differenz k nicht vor, so sind die $Q_{\alpha\beta}^{(0)}$ sämmtlich gleich Null, der Exponent k lässt sich also erniedrigen. Dagegen bedarf der Fall, dass unter den Grössen $p_1, \ldots p_m$ die Differenz k auftritt, einer genaueren Betrachtung.

Es sei

$$
\begin{array}{llll}
p_{\lambda^0} = p^0 & \text{für } r^0 & \text{Indices } \lambda^0, \\
p_{\lambda'} = p' & \quad ,, \quad r' & \quad ,, \quad \lambda', \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
p_{\lambda^{(n)}} = p^{(n)} & \quad ,, \quad r^{(n)} & \quad ,, \quad \lambda^{(n)},
\end{array}
$$

$$p^0 - p' = p' - p'' = \cdots = p^{(n-1)} - p^{(n)} = k,$$

ohne dass $p^0 + k$ und $p^{(n)} - k$ der charakteristischen Gleichung genügen. Wir sagen dann vorübergehend, die $r^0 + r' + \cdots + r^{(n)}$ Grössen $p_{\lambda^0} = p^0$, $p_{\lambda'} = p'$, $\ldots p_{\lambda^{(n)}} = p^{(n)}$ bilden eine $(n+1)$-gliedrige Gruppe. Ist für die Indices $\bar{\lambda}$ $p_{\bar{\lambda}} = \bar{p}$, für die Indices $\bar{\bar{\lambda}}$ $p_{\bar{\bar{\lambda}}} = \bar{\bar{p}}$ u. s. w., ist keine der Differenzen $\bar{p} - p$, $\bar{\bar{p}} - p$ u. s. w. positiv und sind die den Indices $\bar{\lambda}$, $\bar{\bar{\lambda}}$ u. s. w. entsprechenden Differentialgleichungen von der Form

$$\varphi \frac{\partial z_{\bar{\lambda}}}{\partial \varphi} = \bar{p} z_{\bar{\lambda}} + \cdots, \quad \varphi^k \frac{\partial z_{\bar{\lambda}}}{\partial \psi} = \quad + \cdots,$$

$$\varphi \frac{\partial z_{\bar{\bar{\lambda}}}}{\partial \varphi} = \bar{\bar{p}} z_{\bar{\bar{\lambda}}} + \cdots, \quad \varphi^k \frac{\partial z_{\bar{\bar{\lambda}}}}{\partial \psi} = \quad + \cdots$$

u. s. w., so wollen wir die soeben gegebene Deformation der Gruppe, wo es zweckmässig erscheint, insofern abändern, dass wir $\bar{p}$; $\bar{\bar{p}}$ u. s. w. neben $(p^0, p', \ldots p^{(n)})$ als besondere Gruppen betrachten, auch dann, wenn $\bar{p} = p$ oder $= p - k$, $\bar{\bar{p}} = \bar{p} - k$ u. s, w. ist.

Wir stellen nun sämmtliche aus den Grössen $p_1, \ldots p_m$ gebildeten mehrgliedrigen Gruppen in der Form

$$p_{\lambda^0_\alpha} = p^0_\alpha, \; p_{\lambda'_\alpha} = p'_\alpha, \ldots p_{\lambda^{(n_\alpha)}_\alpha} = p^{(n_\alpha)}_\alpha,$$

sämmtliche eingliedrige Gruppen in der Form

$$p_\lambda = p_\alpha$$

dar. Die Gruppe

$$p_{\lambda^0} = p^0, \; p_{\lambda'} = p', \ldots p_{\lambda^{(n)}} = p^{(n)}$$

möge irgend einem Werth von α entsprechen. Statt $\lambda^{(n_\alpha)}_\alpha$ schreiben wir der Einfachheit halber bisweilen λ_α, statt $p^{(n_\alpha)}_\alpha$ einfach p_α, also auch λ statt $\lambda^{(n)}$ und p statt $p^{(n)}$.

Die Coefficienten

$$Q^{(0)}_{\lambda' \lambda^0}, \; Q^{(0)}_{\lambda'' \lambda'}, \; \ldots \; Q^{(0)}_{\lambda^{(n)} \lambda^{(n-1)}}$$

können von Null verschieden sein, während alle übrigen Grössen $Q^{(0)}_{\alpha\beta}$, für welche entweder α oder β eine der Zahlen $\lambda^0, \lambda', \ldots \lambda^{(n)}$ ist, verschwinden müssen. Die den Indices $\lambda^0, \lambda', \ldots \lambda^{(n)}$ entsprechende Gruppe von Differentialgleichungen (11) hat also die Gestalt

$$
\begin{aligned}
&\varphi \frac{\partial z_{\lambda^0}}{\partial \varphi} &&= p^0 z_{\lambda^0} + \varphi \sum_\beta P'_{\lambda^0 \beta} z_\beta + \cdots,\\
&\varphi \frac{\partial z_{\lambda'}}{\partial \varphi} &&= p' z_{\lambda'} + \varphi \sum_\beta P'_{\lambda' \beta} z_\beta + \cdots,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\varphi \frac{\partial z_{\lambda^{(n-1)}}}{\partial \varphi} &&= p^{(n-1)} z_{\lambda^{(n-1)}} + \varphi \sum_\beta P'_{\lambda^{(n-1)} \beta} z_\beta + \cdots,\\
&\varphi \frac{\partial z_{\lambda^{(n)}}}{\partial \varphi} &&= p^{(n)} z_{\lambda^{(n)}} + \varphi \sum_\beta P'_{\lambda^{(n)} \beta} z_\beta + \cdots,\\
(12)\quad &\varphi^k \frac{\partial z_{\lambda^0}}{\partial \psi} &&= \qquad\qquad \varphi \sum_\beta Q'_{\lambda^0 \beta} z_\beta + \cdots,\\
&\varphi^k \frac{\partial z_{\lambda'}}{\partial \psi} &&= \sum_{\lambda^0} Q^{(0)}_{\lambda' \lambda^0} z_{\lambda^0} + \varphi \sum_\beta Q'_{\lambda' \beta} z_\beta + \cdots,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\varphi^k \frac{\partial z_{\lambda^{(n-1)}}}{\partial \psi} &&= \sum_{\lambda^{(n-2)}} Q^{(0)}_{\lambda^{(n-1)} \lambda^{(n-2)}} z_{\lambda^{(n-2)}} + \varphi \sum_\beta Q'_{\lambda^{(n-1)} \beta} z_\beta + \cdots,\\
&\varphi^k \frac{\partial z_{\lambda^{(n)}}}{\partial \psi} &&= \sum_{\lambda^{(n-1)}} Q^{(0)}_{\lambda^{(n)} \lambda^{(n-1)}} z_{\lambda^{(n-1)}} + \varphi \sum_\beta Q'_{\lambda^{(n)} \beta} z_\beta + \cdots.
\end{aligned}
$$

Setzt man für alle Werthe von α

$$
(13\text{a})\qquad z_{\lambda^0_\alpha} = \varphi Z_{\lambda^0_\alpha},\ z'_{\lambda_\alpha} = \varphi Z'_{\lambda_\alpha},\ \ldots\ z_{\lambda_\alpha^{(n_\alpha-1)}} = \varphi Z_{\lambda_\alpha^{(n_\alpha-1)}},
$$
$$
z_{\lambda_\alpha} = Z_{\lambda_\alpha},
$$

bezw.

$$
(13\text{b})\qquad z_{\lambda_\alpha} = Z_{\lambda_\alpha},
$$

je nachdem die dem Index α entsprechende Gruppe mehrgliedrig oder eingliedrig ist, so gehen die Differentialgleichungen (12) über in

$$
\begin{aligned}
&\varphi \frac{\partial Z_{\lambda^0}}{\partial \varphi} &&= (p^0 - 1) Z_{\lambda^0} + \sum_\alpha P'_{\lambda^0 \lambda_\alpha} Z_{\lambda_\alpha} + \cdots,\\
&\varphi \frac{\partial Z_{\lambda'}}{\partial \varphi} &&= (p' - 1) Z_{\lambda'} + \sum_\alpha P'_{\lambda' \lambda_\alpha} Z_{\lambda_\alpha} + \cdots,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\varphi \frac{\partial Z_{\lambda^{(n-1)}}}{\partial \varphi} &&= (p^{(n-1)} - 1) Z_{\lambda^{(n-1)}} + \sum_\alpha P'_{\lambda^{(n-1)} \lambda_\alpha} Z_{\lambda_\alpha} + \cdots,\\
&\varphi \frac{\partial Z_{\lambda}}{\partial \varphi} &&= p Z_\lambda \qquad\qquad\qquad\qquad + \cdots,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi^k \frac{\partial Z_{\lambda^0}}{\partial \psi} &= \sum_\alpha Q'_{\lambda^0 \lambda_\alpha} Z_{\lambda_\alpha} + \cdots, \\
\varphi^k \frac{\partial Z_{\lambda'}}{\partial \psi} &= \sum_{\lambda^0} Q^{(0)}_{\lambda' \lambda^0} Z_{\lambda^0} + \sum_\alpha Q'_{\lambda' \lambda_\alpha} Z_{\lambda_\alpha} + \cdots, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\varphi^k \frac{\partial Z_{\lambda(n-1)}}{\partial \psi} &= \sum_{\lambda(n-2)} Q^{(0)}_{\lambda(n-1)\lambda(n-2)} Z_{\lambda(n-2)} + \sum_\alpha Q'_{\lambda(n-1)\lambda_\alpha} Z_{\lambda_\alpha} + \cdots, \\
\varphi^k \frac{\partial Z_\lambda}{\partial \psi} &= + \cdots,
\end{aligned}
$$

oder wenn man für

$$
\begin{aligned}
&Z_{\lambda^0} + \frac{1}{p^0 - 1} \sum_\alpha P'_{\lambda^0 \lambda_\alpha} Z_{\lambda_\alpha}, \\
&Z_{\lambda'} + \frac{1}{p' - 1} \sum_\alpha P'_{\lambda' \lambda_\alpha} Z_{\lambda_\alpha}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&Z_{\lambda(n-1)} + \frac{1}{p^{(n-1)} - 1} \sum_\alpha P'_{\lambda(n-1)\lambda_\alpha} Z_{\lambda_\alpha}
\end{aligned}
$$

neue Veränderliche einführt*) und die neuen Variablen und Coefficienten wieder mit den früheren Buchstaben bezeichnet, in

$$
(14) \quad
\begin{aligned}
\varphi \frac{\partial Z_{\lambda^0}}{\partial \varphi} &= (p^0 - 1) Z_{\lambda^0} + \cdots, \\
\varphi \frac{\partial Z_{\lambda'}}{\partial \varphi} &= (p' - 1) Z_{\lambda'} + \cdots, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\varphi \frac{\partial Z_{\lambda(n-1)}}{\partial \varphi} &= (p^{(n-1)} - 1) Z_{\lambda(n-1)} + \cdots, \\
\varphi \frac{\partial Z_\lambda}{\partial \varphi} &= p Z_\lambda + \cdots, \\
\varphi^k \frac{\partial Z_{\lambda^0}}{\partial \psi} &= \sum_\alpha Q'_{\lambda^0 \lambda_\alpha} Z_{\lambda_\alpha} + \cdots, \\
\varphi^k \frac{\partial Z_{\lambda'}}{\partial \psi} &= \sum_{\lambda^0} Q^{(0)}_{\lambda' \lambda^0} Z_{\lambda^0} + \sum_\alpha Q'_{\lambda' \lambda_\alpha} Z_{\lambda_\alpha} + \cdots, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\varphi^k \frac{\partial Z_{\lambda(n-1)}}{\partial \psi} &= \sum_{\lambda(n-2)} Q^{(0)}_{\lambda(n-1)\lambda(n-2)} Z_{\lambda(n-2)} + \sum_\alpha Q'_{\lambda(n-1)\lambda_\alpha} Z_\lambda + \cdots, \\
\varphi^k \frac{\partial Z_\lambda}{\partial \psi} &= + \cdots.
\end{aligned}
$$

*) Durch eine Transformation von der Form $z_\alpha = \varphi^e Z_\alpha$ $(\alpha = 1, \ldots m)$ kann man es stets erreichen, dass keine der Zahlen $p^0 - 1$, $p' - 1$, $\ldots p^{(n-1)} - 1$ verschwindet.

An Stelle der $(n+1)$-gliedrigen Gruppe $p^0, p', \ldots p^{(n)}$ tritt also die n-gliedrige Gruppe $p^0-1, p'-1, \ldots p^{(n-1)}-1$ und die eingliedrige Gruppe p, unter der Voraussetzung allerdings, dass keine der Grössen $p^0-1, p'-1, \ldots p^{(n-1)}$ und p mit einer der aus einer anderen Gruppe hervorgehenden Grössen $p_\alpha^0-1, p_\alpha'-1, \ldots p_\alpha^{(n_\alpha-1)}-1$ und p_α eine Differenz gleich k bildet. Wenn, wie wir *zuerst* annehmen wollen, zwischen den letzten Grössen der verschiedenen Gruppen $p_\alpha (\alpha=1,2\ldots)$ keine ganzzahlige Differenz auftritt, so verschwinden die Coefficienten $Q_{\lambda^0\lambda_\alpha}, Q_{\lambda'\lambda_\alpha}, \ldots Q'_{\lambda^{(n-1)}\lambda_\alpha}$ für alle Indices α, und die Gleichungen (14) werden

$$(15)\quad \begin{aligned}
\varphi\frac{\partial Z_{\lambda^0}}{\partial\varphi} &= (p^0-1)Z_{\lambda^0}+\cdots,\\
\varphi\frac{\partial Z_{\lambda'}}{\partial\varphi} &= (p'-1)Z_{\lambda'}+\cdots,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
\varphi\frac{\partial Z_{\lambda^{(n-1)}}}{\partial\varphi} &= (p^{(n-1)}-1)Z_{\lambda^{(n-1)}}+\cdots,\\
\varphi\frac{\partial Z_{\lambda}}{\partial\varphi} &= pZ_\lambda+\cdots,\\
\varphi^k\frac{\partial Z_{\lambda^0}}{\partial\psi} &= \quad +\cdots,\\
\varphi^k\frac{\partial Z_{\lambda'}}{\partial\psi} &= \sum_{\lambda^0} Q^{(0)}_{\lambda'\lambda^0}Z_{\lambda^0}+\cdots,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
\varphi^k\frac{\partial Z_{\lambda^{(n-1)}}}{\partial\psi} &= \sum_{\lambda^{(n-2)}} Q^{(0)}_{\lambda^{(n-1)}\lambda^{(n-2)}}Z_{\lambda^{(n-2)}}+\cdots,\\
\varphi^k\frac{\partial Z_{\lambda}}{\partial\psi} &= \quad +\cdots.
\end{aligned}$$

An Stelle der $(n+1)$-gliedrigen Gruppe $p^0, p', \ldots, p^{(n)}$ tritt also wirklich die n-gliedrige Gruppe $p^0-1, p'-1, \ldots p^{(n-1)}-1$, während sich die eingliedrige Gruppe p absondert. Wenn schon ursprünglich neben der mehrgliedrigen Gruppe $p^0, p', \ldots p^{(n)}$ eine oder mehrere eingliedrige Gruppen p_α derart auftreten, dass die Differenz $p-p_\alpha$, wenn ganzzahlig, nicht negativ war, so erfährt die eben durchgeführte Entwicklung keine Aenderung.

Da durch die angegebene Transformation die Gliederzahl einer jeden mehrgliedrigen Gruppe um 1 vermindert wird, während sich eine eingliedrige Gruppe absondert, so gelangt man durch wiederholte Anwendung dieses Transformationsverfahrens zu lauter eingliedrigen Gruppen, also zu einem System von der Form

$$(16)\qquad \begin{aligned} \varphi\frac{\partial z_\alpha}{\partial \varphi} &= p_\alpha z_\alpha + \varphi \sum_\beta P'_{\alpha\beta} z_\beta + \cdots, \\ \varphi^k \frac{\partial z_\alpha}{\partial \psi} &= \qquad\quad \varphi \sum_\beta Q'_{\alpha\beta} z_\beta + \cdots. \end{aligned}$$

Die Zahl k kann also um 1 vermindert werden, und man kann so lange fortfahren, bis $k = 0$ geworden ist.

Zweitens machen wir die Voraussetzung, dass ν mehrgliedrige Gruppen

$$\begin{gathered} p_1^0,\ p_1',\ \ldots\ p_1^{(n_1)}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ p_\nu^0,\ p_\nu',\ \ldots\ p_\nu^{(n_\nu)} \end{gathered}$$

derart existiren, dass die Differenzen $p_1 - p_2, \ldots p_1 - p_\nu$ ganze Zahlen sind. Wir brauchen wie früher keine Rücksicht auf etwa noch vorhandene eingliedrige Gruppen $\bar{p}$, $\bar{\bar{p}} \ldots$ zu nehmen, wenn für $\lambda = 1, 2, \ldots \nu$ keine der Differenzen $p_\lambda - \bar{p}$, $p_\lambda - \bar{\bar{p}}\,.\,,\,.$ eine ganze negative Zahl ist. Durch Anwendung unserer Transformation zerlegt sich die Gruppe $p_\lambda^0, p_\lambda', \ldots p_\lambda^{(n_\lambda)}$ in $p_\lambda^0 - 1, p_\lambda' - 1, \ldots p_\lambda^{(n_\lambda - 1)} - 1$ und p_λ, Sollen auch nach der Transformation ν Gruppen von den Gliederzahlen $n_1 + 1, \ldots n_\nu + 1$ vorhanden sein, so müssen dieselben folgende Form haben:

$$\begin{gathered} p_{\lambda_1},\ p_1^0 - 1,\ \ldots p_1^{(n_1 - 1)} - 1, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ p_{\lambda_\nu},\ p_\nu^0 - 1, \ldots p_\nu^{(n_\nu - 1)} - 1, \end{gathered}$$

wo $\lambda_1, \ldots \lambda_\nu$ irgend eine Permutation der Zahlen $1, \ldots \nu$ bedeutet; es ist also

$$\begin{gathered} p_{\lambda_1} = p_1^0 - 1 + k = p_1 + (n_1 + 1)\,k - 1, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ p_{\lambda_\nu} = p_\nu^0 - 1 + k = p_\nu + (n_\nu + 1)\,k - 1 \end{gathered}$$

und folglich

$$(n_1 + \cdots + n_\nu + \nu)\,k = \nu,$$

woraus $n_1 = 0, \ldots n_\nu = 0$ hervorgeht, was der Voraussetzung widerspricht. Es wird also auch hier die Gliederzahl mindestens einer Gruppe um 1 vermindert.

Es sei *drittens* neben den ν mehrgliedrigen Gruppen

$$\begin{gathered} p_1^0,\ p_1',\ \ldots\ p_1^{(n_1)}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ p_\nu^0,\ p_\nu',\ \ldots\ p_\nu^{(n_\nu)} \end{gathered}$$

eine eingliedrige Gruppe $p_{\nu+1}$ derart vorhanden, dass $p_1 - p_{\nu+1}, \ldots p_\nu - p_{\nu+1}$ ganze Zahlen sind. Wir sehen dabei ab von den eingliedrigen Gruppen $\bar{p}$ von der Art, dass $p_\lambda - \bar{p}$, $p_{\nu+1} - \bar{p}$ ganze, aber nicht negative Zahlen sind. Bei einer Transformation zerfällt die Gruppe $p_\lambda^0, p_\lambda', \ldots p_\lambda^{(n_\lambda)}$ in $p_\lambda^0 - 1, \ldots p^{(n_\lambda - 1)} - 1$ und p_λ. Sollen sich die durch die Transformation erhaltenen Grössen wieder zu Gruppen von den Gliederzahlen $n_1 + 1, \ldots n_\nu + 1$ zusammensetzen, so ist bei passender Wahl der Indices

$$(\alpha) \qquad \begin{aligned} p_2 &= p_1 + (n_1 + 1)\,k - 1, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_\nu &= p_{\nu-1} + (n_{\nu-1} + 1)\,k - 1, \\ p_{\nu+1} &= p_\nu + (n_\nu + 1)\,k - 1. \end{aligned}$$

Die ursprünglichen Gruppen gehen über in

$$\begin{array}{l} p_2,\ p_1^0 - 1,\ \ldots p_1^{(n_1-1)} - 1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_\nu,\ p_{\nu-1}^0 - 1,\ \ldots p_{\nu-1}^{(n_{\nu-1}-1)} - 1, \\ p_{\nu+1},\ p_\nu^0 - 1,\ \ldots p_\nu^{(n_\nu-1)} - 1 \end{array}$$

und p_1. Eine nochmalige Transformation zerlegt für $\lambda = 1, \ldots \nu$ die Gruppe $p_{\lambda+1}, p_\lambda^0 - 1, \ldots p_\lambda^{(n_\lambda-1)} - 1$ in $p_{\lambda+1} - 1$, $p_\lambda^0 - 2, \ldots p_\lambda^{(n_\lambda-2)} - 2$ und $p_\lambda^{(n_\lambda-1)} - 1$. Soll auch jetzt die Gliederzahl sämmtlicher Gruppen dieselbe sein wie ursprünglich, so muss für irgend einen Werth von λ

$$(\beta) \qquad p_1 = p_{\lambda+1} + k - 1$$

sein. Durch Addition der λ ersten Gleichungen (α) und der Gleichung (β) ergiebt sich

$$(n_1 + \cdots + n_\lambda + \lambda + 1)\,k = \lambda + 1,$$

also müsste entgegen der Voraussetzung $n_1 = 0, \ldots n_\lambda = 0$ sein.

Es wird also sicher durch zwei Transformationen die Gliederzahl einer mehrgliedrigen Gruppe um 1 vermindert. Auf diese Weise lässt sich zeigen, dass, wenn neben den mehrgliedrigen Gruppen p_1^0, $p_1', \ldots, p_1^{(n_1)}; \ldots; p_\nu^0, p_\nu', \ldots p_\nu^{(n_\nu)}$ noch ϱ eingliedrige Gruppen $p_{\nu+1}; \ldots; p_{\nu+\varrho}$ derart vorhanden sind, dass die Differenz zwischen je zwei der Zahlen $p_1, \ldots p_\nu, p_{\nu+1}, \ldots p_{\nu+\varrho}$ eine ganze Zahl ist, die Gliederzahl mindestens einer mehrgliedrigen Gruppe um 1 vermindert wird, wenn man nach einander $\varrho + 1$ Transformationen der betrachteten Art verwendet.

Das Differentialgleichungensystem (11) geht also durch eine Reihe von Transformationen von der Form (13) über in ein System von der Gestalt

$$(17)\qquad \begin{aligned} \varphi\frac{\partial z_\alpha}{\partial \varphi} &= \sum_\beta R_{\alpha\beta}\, z_\beta \\ \frac{\partial z_\alpha}{\partial \psi} &= \sum_\beta S_{\alpha\beta}\, z_\beta \end{aligned} \qquad (\alpha,\ \beta = 1, \ldots m),$$

dessen Coefficienten die Form

$$R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta}^{(0)} + \varphi R_{\alpha\beta}' + \cdots,$$
$$S_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta}^{(0)} + \varphi S_{\alpha\beta}' + \cdots$$

haben, wo $R_{\alpha\beta}^{(0)}$, $R_{\alpha\beta}'$, ...; $S_{\alpha\beta}^{(0)}$, $S_{\alpha\beta}'$, ..., Functionen von ψ sind. Insbesondere ist

$$R_{\alpha\alpha} = p_\alpha, \quad R_{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha \lesseqgtr \beta).$$

Nun ist leicht der Nachweis zu liefern, dass die Grössen $p_1, \ldots p_m$ von ψ unabhängig sind. Die Integrabilitätsbedingungen des Systems (17)

$$\sum_\gamma (R_{\alpha\gamma} S_{\gamma\beta} - S_{\alpha\gamma} R_{\gamma\beta}) = \varphi \frac{\partial S_{\alpha\beta}}{\partial \varphi} - \frac{\partial R_{\alpha\beta}}{\partial \psi}$$

gehen, wenn man $\varphi = 0$ setzt, über in

$$\sum_\gamma (R_{\alpha\gamma}^{(0)} S_{\gamma\beta}^{(0)} - S_{\alpha\gamma}^{(0)} R_{\gamma\beta}^{(0)}) = -\frac{dR_{\alpha\beta}^{(0)}}{d\psi},$$

oder, wenn man $R_{\alpha\alpha} = p_\alpha$, $R_{\alpha\beta} = 0$ setzt, in

$$\frac{dp_\alpha}{d\psi} = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots m),$$

woraus hervorgeht, dass $p_1, \ldots p_m$ constant sind.

Wir haben jetzt noch zu untersuchen, in welcher Weise die Grössen $R_{\alpha\beta}'$, ...; $S_{\alpha\beta}^{(0)}$, $S_{\alpha\beta}'$, ... von ψ abhängen. Zunächst zeigen wir, dass die Determinante (10), welche bei unbestimmtem ψ die einfachen Elementartheiler $p - p_1, \ldots p - p_m$ besitzt, für jeden speciellen Werth von ψ dieselben Elementartheiler hat. Tritt $p - p^0$ e-mal als einfacher Elementartheiler auf, so ist die Determinante (10) durch $(p - p^0)^e$, alle Unterdeterminanten $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades durch $(p-p^0)^{e-1}$ u. s. w. theilbar, alles bei unbestimmtem ψ. Nun kann die Determinante n^{ten} Grades für keinen speciellen Werth von ψ durch eine höhere als die e^{te} Potenz von $p - p^0$ theilbar sein; da auch für keinen speciellen Werth von ψ alle Unterdeterminanten $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades durch $(p - p^0)^e$ theilbar sein können, so ist für jeden Werth von ψ der grösste gemeinschaftliche Theiler aller Unterdeterminanten $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades gleich $(p - p^0)^{e-1}$ u. s. w.

Die am Anfang dieses Paragraphen vorgenommene Ueberführung des Systems (9) in die Normalform (11) kommt auf die Ueberführung des bilinearen Formenpaares

$$\sum_\alpha u_\alpha z_\alpha, \quad \sum_{\alpha\beta} P_{\alpha\beta}^{(0)} u_\alpha z_\beta$$

in die Normalform

$$\sum_\alpha U_\alpha Z_\alpha, \quad \sum_\alpha p_\alpha U_\alpha Z_\alpha$$

hinaus. Zunächst kann man es durch eine vorläufige Transformation erreichen, dass, wenn z. B. der grösste gemeinschaftliche Theiler der Unterdeterminanten $(m-\lambda)^{\text{ten}}$ Grades gleich $(p-p^0)^{e-\lambda}$ ist, keine dieser Unterdeterminanten durch eine höhere als die $(e-\lambda)^{\text{te}}$ Potenz von $p-p^0$ theilbar ist. Einem beliebigen Elementartheiler $p-p_\alpha$, für welchen

$$S^{(\varkappa-1)} = |P_{\alpha\beta}^{(0)} - p\,\delta_{\alpha\beta}| = S_0^{(\varkappa-1)}(p-p_\alpha)^{m-\varkappa+1} + \cdots$$
$$(\alpha, \beta = \varkappa, \ldots m),$$
$$S^{(\varkappa)} = |P_{\alpha\beta}^{(0)} - p\,\delta_{\alpha\beta}| = S_0^{(\varkappa)}(p-p_\alpha)^{m-\varkappa} + \cdots$$
$$(\alpha, \beta = \varkappa+1, \ldots m)$$

ist, entsprechen in der Normalform die Variablen

$$U_\alpha = \frac{1}{S_0^{(\varkappa-1)}}(C_{\varkappa\alpha} u_\varkappa + \cdots + C_{\lambda m} u_m),$$

$$Z_\alpha = \frac{1}{S_0^{(\varkappa)}}(C'_{\varkappa\alpha} z_\varkappa + \cdots + C'_{\lambda m} z_m),$$

wo $C_{\varkappa\alpha}, \ldots C_{\varkappa m}$; $C'_{\varkappa\alpha}, \ldots C'_{\varkappa m}$ ganze Functionen der $P_{\alpha\beta}^{(0)}$ sind. Ist nun $\psi = 0$ eine gewöhnliche Stelle (vgl. § 1), so sind die $P_{\alpha\beta}^{(0)}$ Potenzreihen von ψ, und $S_0^{(\varkappa-1)}$, $S_0^{(\varkappa)}$ sind Potenzreihen von ψ, welche für $\psi = 0$ nicht verschwinden. Mithin sind auch die Coefficienten $P'_{\alpha\beta}, \ldots$; $Q_{\alpha\beta}^{(0)}$, $Q'_{\alpha\beta}, \ldots$ Potenzreihen von ψ. Die Betrachtung der weiteren in § 2 ausgeführten Transformationen zeigt sofort, dass auch die Coefficienten $R'_{\alpha\beta}, \ldots$; $S_{\alpha\beta}^{(0)}$, $S'_{\alpha\beta}, \ldots$ des Systems (17) in Potenzreihen von ψ entwickelbar sind. Nur wenn $\psi = 0$ eine der in § 1 bezeichneten Ausnahmestellen ist, sind die Coefficienten von (17) ebenso wie diejenigen von (9) Potenzreihen von ψ mit einer endlichen Anzahl negativer Potenzen.

Als Resultat des gegenwärtigen Paragraphen haben wir also den Satz:

Das Differentialgleichungensystem (9) *geht unter Voraussetzung einfacher Elementartheiler der charakteristischen Determinante* (10) *durch eine Reihe von Substitutionen, theils von der Form*

$$z_\alpha = \sum_\beta h_{\alpha\beta} Z_\beta \quad (\alpha, \beta = 1, \ldots m),$$

theils von der Form

$$z_\alpha = \varphi Z_\alpha,$$

über in die kanonische Form

$$(17)\qquad \begin{aligned} \varphi \frac{\partial z_\alpha}{\partial \varphi} &= \sum_\beta R_{\alpha\beta} z_\beta, \\ \frac{\partial z_\alpha}{\partial \psi} &= \sum_\beta S_{\alpha\beta} z_\beta, \end{aligned}$$

deren Coefficienten die Gestalt

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} &= R_{\alpha\beta}^{(0)} + \varphi R'_{\alpha\beta} + \cdots, \\ S_{\alpha\beta} &= S_{\alpha\beta}^{(0)} + \varphi S'_{\alpha\beta} + \cdots \end{aligned}$$

haben. (In der Normalform ist

$$R_{\alpha\alpha}^{(0)} = p_\alpha, \quad R_{\alpha\beta}^{(0)} = 0.)\ ^{*})$$

Die Substitutionscoefficienten $h_{\alpha\beta}$ sowohl wie die Coefficienten $P_{\alpha\beta}^{(0)}$, $P'_{\alpha\beta}\ldots$; $Q_{\alpha\beta}^{(0)}$, $Q'_{\alpha\beta}, \ldots$ sind Potenzreihen von ψ; nur wenn (a, b) eine der in § 1 bezeichneten Ausnahmestellen ist, sind sie Potenzreihen von ψ mit einer endlichen Anzahl negativer Potenzen.

§ 3.

Berechnung der Lösungen aus der kanonischen Form unter Voraussetzung einfacher Elementartheiler der charakteristischen Determinante.

Der weiteren Untersuchung legen wir unser Differentialgleichungensystem in der kanonischen Form

$$(17)\qquad \begin{aligned} \varphi \frac{\partial z_\alpha}{\partial \varphi} &= \sum_\beta R_{\alpha\beta} z_\beta, \\ \frac{\partial z_\alpha}{\partial \psi} &= \sum_\beta S_{\alpha\beta} z_\beta \end{aligned}$$

zu Grunde, deren Coefficienten die Form

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} &= R_{\alpha\beta}^{(0)} + \varphi R'_{\alpha\beta} + \cdots, \\ S_{\alpha\beta} &= S_{\alpha\beta}^{(0)} + \varphi S'_{\alpha\beta} + \cdots \end{aligned}$$

haben. Das System möge die Normalform haben, so dass

$$R_{\alpha\alpha}^{(0)} = p_\alpha, \quad R_{\alpha\beta}^{(0)} = 0 \quad (\alpha \gtrless \beta)$$

ist. Wenn $x = a$, $y = b$ oder $\varphi = 0$, $\psi = 0$ eine gewöhnliche Stelle

*) Wie aus den Entwicklungen dieses Paragraphen hervorgeht, stimmen die in der kanonischen Form (17) vorkommenden Grössen $p_1, \ldots p_m$ mit den Grössen $p_1, \ldots p_m$ in dem System (9) nicht vollständig überein.

im Sinne des § 1 ist, wie wir es zunächst annehmen wollen, so sind $R'_{\alpha\beta}, \ldots; S^{(0)}_{\alpha\beta}, S'_{\alpha\beta}, \ldots$ in Potenzreihen von ψ entwickelbar.

Wir schreiben das System (17)

$$\begin{aligned}\varphi \frac{\partial z_\alpha}{\partial \varphi} &= p_\alpha z_\alpha + \varphi \sum_\beta R'_{\alpha\beta} z_\beta + \cdots, \\ \frac{\partial z_\alpha}{\partial \psi} &= \sum_\beta S^{(0)}_{\alpha\beta} z_\beta + \varphi \sum_\beta S'_{\alpha\beta} z_\beta + \cdots .\end{aligned} \tag{17}$$

Das Differentialgleichungensystem

$$\varphi \frac{\partial z_\alpha}{\partial \varphi} = p_\alpha z_\alpha + \varphi \sum_\beta R'_{\alpha\beta} z_\beta + \cdots \quad (\alpha, \beta = 1, \ldots, m), \tag{17a}$$

in welchem wir φ als einzige unabhängige Veränderliche, ψ als Constante betrachten, besitzt ein Fundamentalsystem $Z'_\alpha, \ldots Z^{(m)}_\alpha$, durch welches sich jedes andere Fundamentalsystem in der Form

$$\begin{aligned} z'_\alpha &= C_{11} Z'_\alpha + \cdots + C_{1m} Z^{(m)}_\alpha, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z^{(m)}_\alpha &= C_{m1} Z'_\alpha + \cdots + C_{mm} Z^{(m)}_\alpha \end{aligned}$$

darstellen lässt, wo $C_{11}, \ldots C_{mm}$ Functionen von ψ sind. Wenn die Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind, müssen sich $C_{11}, \ldots C_{mm}$ als Functionen von ψ so bestimmen lassen, dass die Lösungen $z'_\alpha, \ldots z^{(m)}_\alpha$ des Systems (17a) auch dem System

$$\frac{\partial z_\alpha}{\partial \psi} = \sum_\beta S^{(0)}_{\alpha\beta} z_\beta + \varphi \sum_\beta S'_{\alpha\beta} z_\beta + \cdots \tag{17b}$$

$$(\alpha, \beta = 1, \ldots m)$$

genügen.

I. *Wir nehmen zunächst an, dass zwischen den Grössen $p_1, \ldots, p_m$ keine ganzzahlige Differenz auftritt.* Ist $p_\lambda = p^0$ für $\lambda = \lambda_1, \ldots \lambda_r$, so besitzt das System (17a) r Lösungen von der Form

$$Z^{(\lambda)}_\alpha = \varphi^{p^0} \mathfrak{Z}_\alpha(\varphi)_\lambda \quad (\lambda = \lambda_1, \ldots \lambda_r),$$

wo die Grössen $\mathfrak{Z}_\alpha(\varphi)_\lambda$ Potenzreihen von φ sind, deren Coefficienten von ψ abhängen. Es müssen m Lösungen des Systems (17a) von der Form

$$z_\alpha = C_1 Z'_\alpha + \cdots + C_m Z^{(m)}_\alpha$$

existiren, welche auch dem System (17b) genügen. Dann wird aber das System (17b) auch schon durch

$$z_\alpha = C_{\lambda_1} Z^{(\lambda_1)}_\alpha + \cdots + C_{\lambda_r} Z^{(\lambda_r)}_\alpha = \varphi^{p^0} \zeta_\alpha(\varphi)$$

befriedigt. Denn wenn

$$z_\alpha = \varphi^{p^0} \zeta^0_\alpha + \varphi^{p'} \zeta'_\alpha + \cdots,$$

wo $p^0, p', \ldots$ verschiedene Zahlen ohne ganzzahlige Differenz sind, eine Lösung von (17b) ist, so ist

$$\varphi^{p^0}\left(\frac{\partial \zeta_\alpha^0}{\partial \psi} - \sum_\beta S_{\alpha\beta}\,\zeta_\beta^0\right) + \varphi^{p'}\left(\frac{\partial \zeta_\alpha'}{\partial \psi} - \sum_\beta S_{\alpha\beta}\,\zeta_\beta'\right) + \cdots = 0;$$

daraus folgt aber

$$\frac{\partial \zeta_\alpha^0}{\partial \psi} - \sum_\beta S_{\alpha\beta}\,\zeta_\beta^0 = 0, \quad \frac{\partial \zeta_\alpha^0}{\partial \psi} - \sum_\beta S_{\alpha\beta}\,\zeta_\beta' = 0, \ldots$$

d. h. $z_\alpha^0 = \varphi^{p_0}\,\zeta_\alpha^0$, $z_\alpha' = \varphi^{p'}\,\zeta_\alpha', \ldots$ sind schon Lösungen von (17b)

Die hiernach vorhandenen m Lösungen des Systems (17)

$$z_\alpha = \sum_\lambda C_{1\lambda}\,Z_\alpha^{(\lambda)}, \ldots z_\alpha = \sum_\lambda C_{m\lambda}\,Z_\alpha^{(\lambda)}$$

$$(\lambda = \lambda_1, \ldots \lambda_r),$$

die jedoch nicht linear unabhängig zu sein brauchen, sind von der Form

$$z_\alpha = \varphi^{p^0}\,\zeta_\alpha(\varphi),$$

wobei

$$\zeta_\alpha(\varphi) = (\zeta_\alpha)_0 + \varphi(\zeta_\alpha)_1 + \cdots$$

ist. Aus den Recursionsformeln

$$(18) \qquad \begin{aligned} &(p_\alpha - p^0)\,(\zeta_\alpha)_0 = 0, \\ &(p_\alpha - p^0 - 1)\,(\zeta_\alpha)_1 + \sum_\beta R'_{\alpha\beta}(\zeta_\beta)_0 = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

welche sich durch Einsetzen von

$$z_\alpha = \varphi^{p^0}\left[(\zeta_\alpha)_0 + \varphi(\zeta_\alpha)_1 + \cdots\right]$$

in (17a) ergeben, erhält man $(\zeta_\alpha)_0 = 0$, wenn α keinen der Werthe $\lambda_1, \ldots \lambda_r$ hat, während sich $(\zeta_\alpha)_1, \ldots$ als lineare homogene Functionen der noch unbestimmt gelassenen Grössen $(\zeta_\lambda)_0$ $(\lambda = \lambda_1, \ldots \lambda_r)$ ergeben, welche Potenzreihen von ψ zu Coefficienten haben.

Aus den Differentialgleichungen

$$(19) \qquad \frac{\partial(\zeta_\lambda)_0}{\partial \psi} = \sum_\beta S_{\lambda\mu}^{(0)}\,(\zeta_\mu)_0 \quad (\lambda, \mu = \lambda_1, \ldots \lambda_r),$$

welche aus (17b) durch Einsetzen des Ausdrucks für z_α und Nullsetzen von φ entstehen, ergeben sich die $(\zeta_\lambda)_0$ $(\lambda = \lambda_1, \ldots \lambda_r)$ als Potenzreihen von ψ mit willkürlichen Anfangswerthen. Mithin erhält man aus den Recursionsformeln (18) und den Differentialgleichungen (19) für $(\zeta_\alpha)_0, (\zeta_\alpha)_1, \ldots$ Potenzreihen von ψ, welche r willkürliche Constante enthalten. So lange wir nicht wissen, ob die so berechneten r

linear unabhängigen Potenzreihensysteme ζ_α von φ und ψ auch dem Differentialgleichungensystem

$$\frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial \psi} = \sum_\beta S_{\alpha\beta}\, \zeta_\beta \quad (\alpha, \beta = 1, \dots m)$$

wirklich genügen, also ausser (β) auch alle übrigen aus (17b) abzuleitenden Recursionsformeln erfüllen, können wir nur behaupten, dass zum Exponenten p^0 nicht mehr als r linear unabhängige Lösungen $z_\alpha = \varphi^{p^0}\zeta_\alpha$ des Systems (17) gehören. Die auf dem angegebenen Wege gefundenen r linear unabhängigen Ausdrücke $z_\alpha = \varphi^{p^0}\zeta_\alpha$ müssen aber wirklich Lösungen des Systems (17) sein, weil sonst die Gesammtzahl der Lösungen kleiner als m sein müsste.

Wir haben also den Satz:

Tritt unter den Grössen $p_1, \dots p_m$ keine ganzzahlige Differenz auf und ist $p_\lambda = p^0$ für $\lambda = \lambda_1, \dots \lambda_r$, so besitzt das kanonische Differentialgleichungensystem (17) *in der Umgebung der Stelle* (a, b) *oder* $\varphi = 0$, $\psi = 0$ *des singulären Gebildes* $\varphi = 0$ r *Lösungen von der Form*

$$(20)\qquad z_\alpha^{(\lambda)} = \varphi^{p^0}\zeta_\alpha(x-a,\ y-b)_\lambda \quad (\lambda = \lambda_1, \dots \lambda_r),$$
$$(\alpha = 1, \dots m)$$

wo $\zeta_\alpha(x-a,\ y-b)_\lambda$ *Potenzreihen von* $x-a$, $x-b$ *bezeichnen, welche nicht sämmtlich durch* φ *theilbar sind.*

II. *Es sei nun*

$$\begin{aligned}
p_{\lambda^0} &= p^0 \quad \textit{für} \quad \lambda^0 = \lambda_1^0, \dots \lambda_{r^0}^0,\\
p_{\lambda'} &= p' \quad \textit{für} \quad \lambda' = \lambda_1', \dots \lambda_{r'}',\\
&\dots\dots\dots\dots\\
p_{\lambda^{(n)}} &= p^{(n)} \quad \textit{für} \quad \lambda^{(n)} = \lambda_1^{(n)}, \dots \lambda_{r^{(n)}}^{(n)};
\end{aligned}$$

die Differenzen $p^0 - p' = d', \dots p^{(n-1)} - p^{(n)} = d^{(n)}$ *seien ganze positive Zahlen, während keine andere Grösse* p_α *mit* $p^0, p', \dots p^{(n)}$ *ganzzahlige Differenzen bildet.*

Das System (17a) besitzt eine Gruppe von $r^0 + r' + \dots + r^{(n)}$ Lösungen*)

$$\begin{aligned}
Z_\alpha^{(\lambda^0)} &= \varphi^{p^0}\, Z_\alpha^0(\varphi)_{\lambda^0},\\
Z_\alpha^{(\lambda')} &= \varphi^{p'}\, Z_\alpha'(\varphi)_{\lambda'} + \varphi^{p^0}\, Z_\alpha^0(\varphi)_{\lambda'}\log\varphi,\\
&\dots\dots\dots\dots\\
Z_\alpha^{(\lambda^{(n)})} &= \varphi^{p^{(n)}} Z_\alpha^{(n)}(\varphi)_{\lambda^{(n)}} + \varphi^{p^{(n-1)}} Z_\alpha^{(n-1)}(\varphi)_{\lambda^{(n)}}\log\varphi\\
&\quad + \dots + \varphi^{p^0} Z_\alpha^0(\varphi)_{\lambda^{(n)}}(\log\varphi)^n,
\end{aligned}$$

*) Math. Ann. Bd. 39, S. 401.

wo sämmtliche Grössen $Z_\alpha(\varphi)$ Potenzreihen von φ mit von ψ abhängigen Coefficienten sind. Es müssen wie vorhin m Lösungen des Systems (17a) von der Form

$$z_\alpha = C_1 Z'_\alpha + \cdots + C_m Z_\alpha^{(m)}$$

vorhanden sein, welche auch dem System (17b) genügen. Wenn aber ein Ausdruck von der angegebenen Form eine Lösung von (17) ist, so gilt dies auch schon von

$$(21)\quad z_\alpha = \sum_{\lambda^0} C_{\lambda^0} Z_\alpha^{(\lambda^0)} + \sum_{\lambda'} C_{\lambda'} Z_\alpha^{(\lambda')} + \cdots + \sum_{\lambda^{(n)}} C_{\lambda^{(n)}} Z_\alpha^{(\lambda^{(n)})}$$
$$= \varphi^{p^{(n)}} \zeta_\alpha^{(n)}(\varphi) + \varphi^{p^{(n-1)}} \zeta_\alpha^{(n-1)}(\varphi) \log\varphi + \cdots$$
$$+ \varphi^{p^0} \zeta_\alpha^0(\varphi) (\log\varphi)^n.$$

Denn wenn $z_\alpha + \bar{z}_\alpha + \cdots$, wobei

$$z_\alpha = \varphi^{p^{(n)}} \zeta_\alpha^{(n)} + \varphi^{p^{(n-1)}} \zeta_\alpha^{(n-1)} \log\varphi + \cdots$$
$$\bar{z}_\alpha = \varphi^{\bar{p}^{(\bar{n})}} \bar{\zeta}_\alpha^{(\bar{n})} + \varphi^{\bar{p}^{(\bar{n}-1)}} \bar{\zeta}_\alpha^{(\bar{n}-1)} \log\varphi + \cdots$$

u. s. w. ist, dem System (17b) genügt, so ist

$$\begin{aligned}
&\varphi^{p^{(n)}} \left(\frac{\partial \zeta_\alpha^{(n)}}{\partial\psi} - \sum_\beta S_{\alpha\beta}\, \zeta_\beta^{(n)}\right)\\
&+ \varphi^{p^{(n-1)}} \left(\frac{\partial \zeta_\alpha^{(n-1)}}{\partial\psi} - \sum_\beta S_{\alpha\beta}\, \zeta_\beta^{(n-1)}\right) \log\varphi\\
&+ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&+ \varphi^{\bar{p}^{(\bar{n})}} \left(\frac{\partial \bar{\zeta}_\alpha^{(\bar{n})}}{\partial\psi} - \sum_\beta S_{\alpha\beta}\, \bar{\zeta}_\beta^{(\bar{n})}\right)\\
&+ \varphi^{\bar{p}^{(\bar{n}-1)}} \left(\frac{\partial \bar{\zeta}^{(\bar{n}-1)}}{\partial\psi} - \sum_\beta S_{\alpha\beta}\, \bar{\zeta}_\beta^{(\bar{n}-1)}\right) \log\varphi\\
&+ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot = 0;
\end{aligned}$$

wenn aber zwischen den Grössen $p, \bar{p}, \ldots$ keine ganzzahlige Differenz besteht, so müssen die einzelnen Glieder des angeschriebenen Ausdrucks für sich verschwinden, und folglich sind schon $z_\alpha, \bar{z}_\alpha, \ldots$ Lösungen von (17b).

Setzt man den Ausdruck z_α in das System (17) ein, so erhält man die Gleichungen

$$\varphi \frac{\partial \zeta_\alpha^{(i)}}{\partial\varphi} = \sum_\beta (R_{\alpha\beta} - p^{(i)} \delta_{\alpha\beta})\, \zeta_\beta^{(i)} - (n - i + 1)\, \varphi^{d^{(i)}} \zeta_\alpha^{(i-1)},$$
$$\frac{\partial \zeta_\alpha^{(i)}}{\partial\psi} = \sum_\beta S_{\alpha\beta}\, \zeta_\beta^{(i)} \qquad (i = 0, 1, \ldots n).$$

Für die Coefficienten der Potenzreihe

$$\xi_\alpha^{(i)}(\varphi) = (\xi_\alpha^{(i)})_0 + \varphi(\xi_\alpha^{(i)})_1 + \cdots$$

ergeben sich aus der ersten Differentialgleichung die Recursionsformeln

$$(p_\alpha - p^{(i)})(\xi_\alpha^{(i)})_0 = 0,$$

$$(p_\alpha - p^{(i)} - 1)(\xi_\alpha^{(i)})_1 + \sum_\beta R'_{\alpha\beta}(\xi_\beta^{(i)})_0 = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(p_\alpha - p^{(i)} - d^{(i)})(\xi_\alpha^{(i)})_{d^{(i)}} + \sum_\beta R'_{\alpha\beta}(\xi_\beta^{(i)})_{d^{(i)}-1} + \cdots$$

$$+ \sum_\beta R_{\alpha\beta}^{(d^{(i)})}(\xi_\beta^{(i)})_0 - (n - i + 1)(\xi_\alpha^{(i-1)})_0 = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(22)\quad (p_\alpha - p^{(i)} - d^{(i)} - d^{(i-1)})(\xi_\alpha^{(i)})_{d^{(i)}+d^{(i-1)}} +$$

$$+ \sum_\beta R'_{\alpha\beta}(\xi_\beta^{(i)})_{d^{(i)}+d^{(i-1)}-1} + \cdots + \sum_\beta R_{\alpha\beta}^{(d^{(i)}+d^{(i-1)})}(\xi_\beta^{(i)})_0 -$$

$$- (n - i + 1)(\xi_\alpha^{(i-1)})_{d^{(i-1)}} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(p_\alpha - p^{(i)} - d^{(i)} - \cdots - d')(\xi_\alpha^{(i)})_{d^{(i)}+\cdots+d'} + \sum_\beta R'_{\alpha\beta}(\xi_\beta^{(i)})_{d^{(i)}+\cdots+d'-1} + \cdots$$

$$+ \sum_\beta R_{\alpha\beta}^{(d^{(i)}+\cdots+d')}(\xi_\beta^{(i)})_0 - (n - i + 1)(\xi_\alpha^{(i-1)})_{d^{(i-1)}+\cdots+d'} = 0.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Hiernach verschwinden die Grössen $(\xi_\alpha^{(i)})_0$ mit Ausnahme der zunächst unbestimmt bleibenden $(\xi_{\lambda(i)}^{(i)})_0$; $(\xi_\alpha^{(i)})_1, \ldots (\xi_\alpha^{(i)})_{d^{(i)}-1}$ lassen sich durch die $(\xi_{\lambda(i)}^{(i)})_0$ ausdrücken. Wegen $p_{\lambda(i-1)} - p^{(i)} - d^{(i)} = 0$ bleiben die $(\xi_{\lambda(i-1)}^{(i)})_{d^{(i)}}$ unbestimmt, während sich die $(\xi_{\lambda(i-1)}^{(i-1)})_0$ durch die $(\xi_{\lambda(i)}^{(i)})_0$ ausdrücken lassen. Da die Grössen $(\xi_\alpha^{(i-1)})_0$, $(\xi_\alpha^{(i-1)})_1, \ldots (\xi_\alpha^{(i-1)})_{d^{(i-1)}-1}$ durch $(\xi_{\lambda(i-1)}^{(i-1)})_0$ und $(\xi_{\lambda(i)}^{(i)})_0$ darstellbar sind, so lassen sich $(\xi_\alpha^{(i)})_{d^{(i)}}$, $(\xi_\alpha^{(i)})_{d^{(i)}+1}, \ldots (\xi_\alpha^{(i)})_{d^{(i)}+d^{(i-1)}-1}$ ausdrücken durch $(\xi_{\lambda(i)}^{(i)})_0$ und $(\xi_{\lambda(i-1)}^{(i)})_{d^{(i)}}$. Wegen $p_{\lambda(i-2)} - p^{(i)} - d^{(i)} - d^{(i-1)} = 0$ bleiben $(\xi_{\lambda(i-2)}^{(i)})_{d^{(i)}+d^{(i-1)}}$ unbestimmt, und $(\xi_{\lambda(i-2)}^{(i-1)})_{d^{(i-1)}}$ werden auf $(\xi_{\lambda(i)}^{(i)})_0$ und $(\xi_{\lambda(i-1)}^{(i)})_{d^{(i-1)}}$ zurückgeführt. Da sich $(\xi_\alpha^{(i-1)})_{d^{(i-1)}}$, $(\xi_\alpha^{(i-1)})_{d^{(i-1)}+1}, \ldots (\xi_\alpha^{(i-1)})_{d^{(i-1)}+d^{(i-2)}+1}$ durch $(\xi_{\lambda(i-1)}^{(i-1)})_0$ und $(\xi_{\lambda(i-2)}^{(i-1)})_{d^{(i-1)}}$ darstellen lassen, so werden

$$(\xi_\alpha^{(i)})_{d^{(i)}+d^{(i-1)}},\ (\xi_\alpha^{(i)})_{d^{(i)}+d^{(i-1)}+1},\ \ldots\ (\xi_\alpha^{(i)})_{d^{(i)}+d^{(i-1)}+d^{(i-2)}-1}$$

ausgedrückt durch $(\zeta_{\lambda^{(i)}}^{(i)})_0$, $(\zeta_{\lambda^{(i-1)}}^{(i)})_{d^{(i)}}$, $(\zeta_{\lambda^{(i-2)}}^{(i)})_{d^{(i)}+d^{(i-1)}}$. Usw. Schliesslich lassen sich alle Grössen $(\zeta_\alpha^{(i)})_\nu$, $\nu \geqq d^{(i)} + \cdots + d'$ ausdrücken durch $(\zeta_{\lambda^{(i)}}^{(i)})_0$, $(\zeta_{\lambda^{(i-1)}}^{(i)})_{d^{(i)}}$, ... $(\zeta_{\lambda^0}^{(i)})_{d^{(i)}+\cdots+d'}$.

Aus den zu den Werthen $i, \dots n$ gehörigen Recursionsformeln ergiebt sich, dass sich

$$\begin{array}{lll}
(\zeta_{\lambda^{(i)}}^{(i)})_0 & \text{durch} & (\zeta_{\lambda^{(n)}}^{(n)})_0, \\
(\zeta_{\lambda^{(i-1)}}^{(i)})_{d^{(i)}} & \text{,,} & (\zeta_{\lambda^{(n)}}^{(n)})_0, \ (\zeta_{\lambda^{(n-1)}}^{(n)})_{d^{(n)}}, \\
(\zeta_{\lambda^{(i-2)}}^{(i)})_{d^{(i)}+d^{(i-1)}} & \text{,,} & (\zeta_{\lambda^{(n)}}^{(n)})_0, \ (\zeta_{\lambda^{(n-1)}}^{(n)})_{d^{(n)}}, \ (\zeta_{\lambda^{(n-2)}}^{(n)})_{d^{(n)}+d^{(n-1)}}, \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
(\zeta_{\lambda^0}^{(i)})_{d^{(i)}+\cdots+d'} & \text{,,} & (\zeta_{\lambda^{(n)}}^{(n)})_0, \ (\zeta_{\lambda^{(n-1)}}^{(n)})_{d^{(n)}}, \ \dots \\
 & & (\zeta_{\lambda^{(n-i)}}^{(n)})_{d^{(n)}+\cdots+d^{(n-i+1)}}
\end{array}$$

ausdrücken. Vervollständigt man diese Tabelle mit Rücksicht auf die obigen Entwicklungen, so enthalten die einzelnen Zeilen die folgenden Grössen:

$$\begin{array}{ll}
(1) & (\zeta_\alpha^{(i)})_0, \ (\zeta_\alpha^{(i)})_1, \ \dots \ (\zeta_\alpha^{(i)})_{d^{(i)}-1}, \\
(2) & (\zeta_\alpha^{(i)})_{d^{(i)}}, \ (\zeta_\alpha^{(i)})_{d^{(i)}+1}, \ \dots \ (\zeta_\alpha^{(i)})_{d^{(i)}+d^{(i-1)}-1}, \\
 & \cdots\cdots\cdots \\
(i) & (\zeta_\alpha^{(i)})_{d^{(i)}+\cdots+d'}, \ \ (\zeta_\alpha^{(i)})_{d^{(i)}+\cdots+d'+1} \ \text{in inf.,}
\end{array}$$

und zwar sind die in den einzelnen Zeilen enthaltenen Grössen ausdrückbar durch

$$\begin{array}{ll}
(1) & \left(\zeta_{\lambda^{(n)}}^{(n)}\right)_0, \\
(2) & \left(\zeta_{\lambda^{(n)}}^{(n)}\right)_0, \ \left(\zeta_{\lambda^{(n-1)}}^{(n)}\right)_{d^{(n)}}, \\
 & \cdots\cdots\cdots \\
(i) & \left(\zeta_{\lambda^{(n)}}^{(n)}\right)_0, \ \left(\zeta_{\lambda^{(n-1)}}^{(n)}\right)_{d^{(n)}}, \ \dots \ \left(\zeta_{\lambda^{(n-i)}}^{(n)}\right)_{d^{(n)}+\cdots+d^{(n-i+1)}}.
\end{array}$$

Ueberhaupt lassen sich sämmtliche Coefficienten der Reihen $\zeta_\alpha^0, \zeta_\alpha', \dots \zeta_\alpha^{(n)}$ ausdrücken durch die unbestimmt bleibenden Grössen

$$\left(\zeta_{\lambda^{(n)}}^{(n)}\right)_0, \ \ \left(\zeta_{\lambda^{(n-1)}}^{(n)}\right)_{d^{(n)}}, \ \dots \ \left(\zeta_{\lambda^0}^{(n)}\right)_{d^{(n)}+\cdots+d'}$$

in der Zahl $r^0 + r' + \cdots + r^{(n)}$.

Aus den Differentialgleichungen

$$\frac{\partial \zeta_\alpha^{(n)}}{\partial \psi} = \sum_\beta S_{\alpha\beta}\, \zeta_\beta^{(n)}$$

ergeben sich mit Rücksicht auf die soeben abgeleiteten Resultate Gleichungen von der Gestalt*)

*) Der Index $\mu^{(i)}$ durchläuft hierbei dieselben Werthe wie $\lambda^{(i)}$.

$$
(23)\quad
\begin{aligned}
\frac{\partial\left(\zeta^{(n)}_{\lambda^{(n)}}\right)_0}{\partial\psi} &= \sum_{\mu^{(n)}} S^{(n)}_{\lambda^{(n)}\mu^{(n)}}\left(\zeta^{(n)}_{\mu^{(n)}}\right)_0,\\
\frac{\partial\left(\zeta^{(n)}_{\lambda^{(n-1)}}\right)_{d^{(n)}}}{\partial\psi} &= \sum_{\mu^{(n-1)}} S^{(0)}_{\lambda^{(n-1)}\mu^{(n-1)}}\left(\zeta^{(n)}_{\mu^{(n-1)}}\right)_{d^{(n)}}\\
&\quad + \sum_{\mu^{(n)}} \mathfrak{S}_{\lambda^{(n-1)}\mu^{(n)}}\left(\zeta^{(n)}_{\mu^{(n)}}\right)_0,\\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{\partial(\zeta^{(n)}_{\lambda^0})_{d^{(n)}+\cdots+d'}}{\partial\psi} &= \sum_{\mu^0} S^{(0)}_{\lambda^0\mu^0}(\zeta^{(n)}_{\lambda^0})_{d^{(n)}+\cdots+d'} +\\
&\quad + \sum_{\mu'} \mathfrak{S}_{\lambda_0\mu'}(\zeta^{(n)}_{\mu'})_{d^{(n)}+\cdots+d'} + \cdots + \sum_{\mu^{(n)}} \mathfrak{S}_{\lambda^0\mu^{(n)}}\left(\zeta^{(n)}_{\mu^{(n)}}\right)_0,
\end{aligned}
$$

deren Coefficienten $S^{(0)}_{\lambda^{(n)}\mu^{(n)}}, \ldots \mathfrak{S}_{\lambda^0\mu^{(n)}}$ Potenzreihen von ψ sind. Aus diesen Differentialgleichungen erhält man für $\left(\zeta^{(n)}_{\lambda^{(n)}}\right)_0$ Potenzreihen von ψ mit $r^{(n)}$ willkürlichen Constanten $\varepsilon_{\lambda^{(n)}}$, für $\left(\zeta^{(n)}_{\lambda^{(n-1)}}\right)_{d^{(n)}}$ Potenzreihen von ψ mit $r^{(n-1)}+r^{(n)}$ willkürlichen Constanten $\varepsilon_{\lambda^{(n-1)}}$, $\varepsilon_{\lambda^{(n)}}$ u. s. w., schliesslich für $(\zeta^{(n)}_{\lambda^0})_{d^{(n)}+\cdots+d'}$ Potenzreihen von ψ mit $r^0+r'+\cdots+r^{(n)}$ willkürlichen Constanten $\varepsilon_{\lambda^0}, \varepsilon_{\lambda'}, \ldots \varepsilon_{\lambda^{(n)}}$. Hiernach enthalten die Grössen $(\zeta^0_\alpha)_\nu$ für $\nu = 0, 1, 2 \ldots$ sowie $(\zeta^{(i)}_\alpha)_0$, $(\zeta^{(i)}_\alpha)_1, \ldots (\zeta^{(i)}_\alpha)_{d^{(i)}-1}$ $(i = 1, \ldots n)$ die willkürlichen Constanten $\varepsilon_{\lambda^{(n)}}$, die Grössen $(\zeta'_\alpha)_{d'+\nu}$ für $\nu = 0, 1, 2 \ldots$ sowie $(\zeta^{(i)}_\alpha)_{d^{(i)}}$, $(\zeta^{(i)}_\alpha)_{d^{(i)}+1}, \ldots (\zeta^{(i)}_\alpha)_{d^{(i)}+\cdots+d'-1}$ $(i = 2, \ldots n)$ die willkürlichen Constanten $\varepsilon_{\lambda^{(n-1)}}$, $\varepsilon_{\lambda^{(n)}}$ u. s. w.; schliesslich die Grössen $(\zeta^{(n)}_\alpha)_{d^{(n)}+\cdots+d'+\nu}$ für $\nu = 0, 1, 2 \ldots$ die willkürlichen Constanten $\varepsilon_{\lambda^0}, \varepsilon_{\lambda'}, \ldots \varepsilon_{\lambda^{(n)}}$.

Setzt man $\varepsilon_{\lambda'} = 0, \ldots \varepsilon_{\lambda^{(n)}} = 0$, so verschwinden die Grössen $\zeta^0_\alpha, \zeta'_\alpha, \ldots \zeta^{(n-1)}_\alpha$, und da auch $(\zeta^{(n)}_\alpha)_0$, $(\zeta^{(n)}_\alpha)_1, \ldots (\zeta^{(n)}_\alpha)_{d^{(n)}+\cdots+d'-1}$ gleich Null sind, so kann man

$$\zeta^{(n)}_\alpha(\varphi) = \varphi^{d^{(n)}+\cdots+d'}\,\zeta^0_\alpha(\varphi)_0$$

setzen und erhält die Lösung

$$z_\alpha = \varphi^{p^0}\,\zeta^0_\alpha(\varphi)_0$$

mit den r^0 willkürlichen Constanten ε_{λ^0} oder r^0 Lösungen von der Form

$$z^{(\lambda^0)}_\alpha = \varphi^{p^0}\,\zeta^0_\alpha(\varphi)_{\lambda^0}.$$

Setzt man weiter $\varepsilon_{\lambda^0} = 0$, $\varepsilon_{\lambda''} = 0, \ldots \varepsilon_{\lambda^{(n)}} = 0$, so verschwinden $\zeta^0_\alpha, \zeta'_\alpha, \ldots \zeta^{(n-2)}_\alpha$, sowie $(\zeta^{(n-1)}_\alpha)_0, \ldots (\zeta^{(n-1)}_\alpha)_{d^{(n)}+\cdots+d'-1}$, $(\zeta^{(n)}_\alpha)_0, \ldots$ $(\zeta^{(n)}_\alpha)_{d^{(n)}+\cdots+d''-1}$, man kann

$$\zeta_\alpha^{(n)}\,'(\varphi) = \varphi^{d^{(n)}+\cdots+d''}\,\zeta_\alpha'(\varphi)_1,$$
$$\zeta_\alpha^{(n-1)}(\varphi) = \varphi^{d^{(n)}+\cdots+d'}\,\zeta_\alpha^0(\varphi)_1,$$

setzen und die Lösung z_α erhält die Form

$$z_\alpha = \varphi^{p'}\zeta_\alpha'(\varphi)_1 + \varphi^{p^0}\zeta_\alpha^0(\varphi)_1 \log \varphi$$

mit den r' willkürlichen Constanten $\varepsilon_{\lambda'}$, sie zerfällt also in die r' Lösungen

$$z_\alpha^{(\lambda')} = \varphi^{p'}\zeta_\alpha'(\varphi)_{\lambda'} + \varphi^{p^0}\zeta_\alpha^0(\varphi)_{\lambda'} \log \varphi.$$

U. s. w. Man erhält auf diesem Wege $r^0 + r' + \cdots + r^{(n)}$ Ausdrücke $z_\alpha^{(\lambda^0)}, z_\alpha^{(\lambda')}, \ldots z_\alpha^{(\lambda^{(n)})}$. Da aber bei der Herleitung nicht der ganze Inhalt der Differentialgleichungen

$$\frac{\partial \zeta_\alpha^{(i)}}{\partial \psi} = \sum_\beta S_{\alpha\beta}\,\zeta_\beta^{(i)},$$

sondern nur einige daraus hervorgehende Recursionsformeln benutzt worden sind, so wissen wir nicht, ob die gefundenen Ausdrücke wirklich Lösungen des Systems (17) sind. Wir können vielmehr nur behaupten, dass sich auf dem eingeschlagenen Wege *höchstens* $r^0 + r' + \cdots + r^{(n)}$ Lösungen des Systems (17) ergeben. Da wir aber wissen, dass die Gesammtzahl der Lösungen gleich m ist, so müssen die gefundenen $r^0 + r' + \cdots + r^{(n)}$ Ausdrücke wirklich Lösungen des Differentialgleichungensystems (17) sein.

Wir haben also den Satz:

Zu einer Gruppe von Grössen $p_{\lambda^0} = p^0$, $p_{\lambda'} = p'$, $\ldots$ $p_{\lambda^{(n)}} = p^{(n)}$ von der angegebenen Beschaffenheit gehört eine Gruppe von Lösungen der kanonischen Form (17) *des Systems* (1) *von der Gestalt*

$$\begin{aligned}
z_\alpha^{(\lambda^0)} &= \varphi^{p^0}\zeta_\alpha^0(x-a,\ y-b)_{\lambda^0},\\
z_\alpha^{(\lambda')} &= \varphi^{p'}\zeta_\alpha'(x-a,\ y-b)_{\lambda'}\\
&\quad + \varphi^{p^0}\zeta_\alpha^0(x-a,\ y-b)_{\lambda'} \log\varphi,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
z_\alpha^{(\lambda^{(n)})} &= \varphi^{p^{(n)}}\zeta_\alpha^{(n)}(x-a,\ y-b)_{\lambda^{(n)}}\\
&\quad + \varphi^{p^{(n-1)}}\zeta_\alpha^{(n-1)}(x-a,\ y-b)_{\lambda^{(n)}} \log\varphi + \cdots\\
&\quad + \varphi^{p^0}\zeta_\alpha^0(x-a,\ y-b)_{\lambda^{(n)}} (\log\varphi)^n.
\end{aligned} \tag{24}$$

Alle darin enthaltenen Grössen $\zeta_\alpha(x-a,\ y-b)$ sind in der Umgebung einer gewöhnlichen Stelle (a, b) des singulären Gebildes $\varphi = 0$ in Potenzreihen entwickelbar, und zwar sind die m Reihen

$$\zeta_\alpha^{(i)}(x-a,\ y-b)_{\lambda^{(i)}} \quad (\alpha = 1, \ldots m)$$

nicht sämmtlich durch φ theilbar.

Die Form der Lösungen des kanonischen Systems (17) geht also aus derjenigen des Systems mit einer unabhängigen Veränderlichen*)

$$x\frac{dz_\alpha}{dx} = p_\alpha z_\alpha + x\sum_\beta a'_{\alpha\beta} z_\beta + \cdots \quad (\alpha, \beta = 1, \ldots m)$$

dadurch hervor, dass man $x^{p^0}, x^{p'}, \ldots x^{p^{(n)}}$ durch $\varphi^{p^0}, \varphi^{p'}, \ldots \varphi^{p^{(n)}}$, $\log x$ durch $\log \varphi$ und die Potenzreihen $\mathfrak{z}_\alpha$ von x durch Potenzreihen von $x - a$, $y - b$ ersetzt.

Wir haben noch den Fall zu betrachten, dass $x = a$, $y = b$ oder $\varphi = 0$, $\psi = 0$ eine der in § 1 hervorgetretenen Ausnahmestellen ist. Dann haben die Coefficienten des kanonischen Systems (17) die Gestalt

$$R_{\alpha\beta}^{(i)} = \frac{\mathfrak{R}_{\alpha\beta}^{(i)}}{\psi^l}, \qquad S_{\alpha\beta}^{(i)} = \frac{\mathfrak{S}_{\alpha\beta}^{(i)}}{\psi^l},$$

wo l eine ganze positive Zahl, $\mathfrak{R}_{\alpha\beta}^{(i)}$, $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}^{(i)}$ Potenzreihen von ψ sind. Um wie in Nr. I die zu der r-fachen Wurzel $p_\lambda = p^0$ $(\lambda = \lambda_1, \ldots \lambda_r)$ gehörigen Lösungen zu ermitteln, berechnet man die $(\mathfrak{z}_\lambda)_0$ als Functionen von ψ aus den Gleichungen

$$(19') \qquad \psi^l \frac{\partial(\mathfrak{z}_\lambda)_0}{\partial\psi} = \sum_\mu \mathfrak{S}_{\lambda\mu}^{(0)} (\mathfrak{z}_\mu)_0 \quad (\lambda, \mu = \lambda_1, \ldots \lambda_r),$$

während alle übrigen $(\mathfrak{z}_\alpha)_0$ gleich Null zu setzen sind. Die Grössen $(\mathfrak{z}_\alpha)_1, \ldots$ ergeben sich sodann aus den Recursionsformeln

$$(18') \qquad (p_\alpha - p^0 - 1)(\mathfrak{z}_\alpha)_1 + \sum_\beta \frac{\mathfrak{R}'_{\alpha\beta}}{\psi^l} (\mathfrak{z}_\beta)_0 = 0,$$

. . . .

Hiernach wären diejenigen Stellen (x, y), an welchen ψ verschwindet, singuläre Stellen des kanonischen Systems (17). Nach der allgemeinen Theorie der linearen Differentialgleichungen (Fuchs, Crelle's Journal Bd. 66) haben die Lösungen $(\mathfrak{z}_\lambda)_0$ des Differentialgleichungensystems (19'), wenn wir sie frei von Logarithmen voraussetzen, die Form

$$(\mathfrak{z}_\lambda)_0 = \psi^q (g_\lambda)_0,$$

wo $(g_\lambda)_0$ eine nach positiven und negativen Potenzen von ψ fortschreitende Reihe ist. Ausdrücke von derselben Gestalt ergeben sich aus den Recursionsformeln (18') für $(\mathfrak{z}_\alpha)_1, \ldots$. Das System (17) hat demnach r Lösungen von der Gestalt

$$z_\alpha = \varphi^p \psi^q \left((g_\alpha)_0 + \varphi (g_\alpha)_1 + \cdots\right),$$

wo $(g_\alpha)_0$, $(g_\alpha)_1, \ldots$ nach positiven und negativen Potenzen von ψ fortschreitende Reihen sind. Dieselbe Form mit anderen Werthen der

*) Vgl. Math. Ann. Bd. 39, S. 398—402.

Constanten haben die Lösungen des Systems (1), wie aus der Transformation von (1) in (17) hervorgeht; schreiben wir dafür

$$\bar{z}_\alpha = \varphi^{\bar{p}}\,\psi^{\bar{q}}\left((\bar{g}_\alpha)_0 + \varphi(\bar{g}_\alpha)_1 + \cdots\right),$$

so können wir $\bar{q} = q$ annehmen. Aus der Gestalt des Systems (1) geht hervor, dass seine Lösungen in der Umgebung von (a, b) an solchen Stellen, welche dem singulären Gebilde $\varphi(x, y) = 0$ nicht angehören, in Potenzreihen entwickelbar sind. Daher muss $\bar{q}$ eine ganze Zahl sein, die wir gleich Null annehmen können; ferner müssen für alle hinreichend kleinen Werthe von ξ in der Entwicklung von

$$(\bar{g}_\alpha)_0 + \varepsilon(\bar{g}_\alpha)_1 + \varepsilon^2(\bar{g}_\alpha)_2 + \cdots$$

die negativen Potenzen von ψ wegfallen, es dürfen also in $(\bar{g}_\alpha)_0$, $(\bar{g}_\alpha)_1, \ldots$ keine negativen Potenzen von ψ auftreten. Mithin ist

$$\bar{z}_\alpha = \varphi^{\bar{p}}\,\bar{\xi}_\alpha,$$

wo $\bar{\xi}_\alpha$ eine Potenzreihe von φ, ψ oder von $x - a$, $y - b$ bedeutet. Aus dem Zusammenhang zwischen z_α und $\bar{z}_\alpha$ (§§ 1, 2) ergiebt sich, dass die Lösungen des Systems (17) die Form

$$z_\alpha^{(\lambda)} = \varphi^{p^0}\,\frac{\mathfrak{P}_\alpha(\varphi, \psi)_\lambda}{\psi^l}$$

haben, wo $\mathfrak{P}_\alpha(\varphi, \psi)_\lambda$ eine Potenzreihe von φ und ψ, l eine ganze Zahl bedeutet. Eine ähnliche Ueberlegung lässt sich bei Nr. II anstellen.

Für den Fall, dass $x = a$, $y = b$ eine Ausnahmestelle ist, sind die Sätze über die Form der Lösungen des kanonischen Systems (17) *insofern abzuändern, als hier die in* (20) *und* (24) *auftretenden Functionen ξ Potenzreihen von φ und ψ sind, welche eine endliche Anzahl negativer Potenzen von ψ enthalten können.*

Ferner haben wir den Satz:

Das an dem singulären Gebilde reguläre System (1) *besitzt in der Umgebung einer j e d e n Stelle des Gebildes $\varphi = 0$, an welcher nicht gleichzeitig $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ und $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ verschwinden und durch welche kein anderes singuläres Gebilde geht, ein Fundamentalsystem, dessen Lösungen die Form*

$$z_\alpha = \varphi^p\,\xi_\alpha$$

oder die Form

$$z_\alpha = \varphi^p(\xi_\alpha + \xi'_\alpha \log\varphi + \cdots)$$

haben, wo die $\xi_\alpha, \ldots$ in Potenzreihen von $x - a$, $y - b$ entwickelbar sind.

§ 4.

Behandlung eines Differentialgleichungensystems von besonderer Form.

Wir wollen nunmehr dem System (1) für den Fall, dass $h = 0$ ist, eine besondere Betrachtung widmen. Durch Behandlung des Systems

$$(25)\qquad \begin{aligned} \varphi \frac{\partial z_\alpha}{\partial x} &= \sum_\beta A_{\alpha\beta} z_\beta \\ \varphi \frac{\partial z_\alpha}{\partial y} &= \sum_\beta B_{\alpha\beta} z_\beta \end{aligned} \qquad (\alpha, \beta = 1, \dots m),$$

welches für $m = 2$ und $m = 3$ in § 9 und § 10 der Habilitationsschrift des Verfassers untersucht wurde, wird die gegenwärtige Arbeit in etwas nähere Verbindung mit jener gebracht werden. Indessen soll das System (25) hier nur in solchen Fällen betrachtet werden, in welchen sämmtliche Lösungen in der Umgebung der Stellen des singulären Gebildes $\varphi = 0$ frei von Logarithmen sind.

Das Differentialgleichungensystem mit einer unabhängigen Veränderlichen

$$x \frac{dz_\alpha}{dx} = \sum_\beta (a_{\alpha\beta} + a'_{\alpha\beta} x + \cdots) y_\beta \quad (\alpha, \beta = 1, \dots m)$$

besitzt an der singulären Stelle $x = 0$ ein von Logarithmen freies Fundamentalsystem, wenn die charakteristische Determinante

$$|a_{\alpha\beta} - p\,\delta_{\alpha\beta}|$$

lauter einfache Elementartheiler $p - p_1, \dots p - p_m$ besitzt und wenn zwischen $p_1, \dots p_m$ keine von Null verschiedene ganzzahlige Differenz besteht. Sind ganzzahlige Differenzen zwischen $p_1, \dots p_m$ vorhanden, so existirt nur dann ein von Logarithmen freies Fundamentalsystem, wenn die Coefficienten $a'_{\alpha\beta}, \dots$ besondere Bedingungen erfüllen. Dagegen treten nothwendig Logarithmen auf, wenn die charakteristische Determinante mehrfache Elementartheiler besitzt.*) Sieht man von besonderen Beziehungen zwischen den Coefficienten $a'_{\alpha\beta}, \dots$ ab, so ist dann und nur dann das zur singulären Stelle $x = 0$ gehörige Fundamentalsystem von Logarithmen frei, wenn die Elementartheiler der charakteristischen Determinante sämmtlich einfach sind und wenn zwischen den Wurzeln der charakteristischen Gleichung keine von Null verschiedene ganzzahlige Differenz auftritt. Wir wollen in dem gegenwärtigen Paragraphen die entsprechende Frage für das System (25) zu beantworten suchen.

---

*) Math. Ann. Bd. 39.

Durch Einführung der Veränderlichen*) φ, ψ wird das System (25)

$$\text{(26)}\qquad \begin{aligned} \varphi\frac{\partial z_\alpha}{\partial\varphi} &= \sum_\beta L_{\alpha\beta}z_\beta \\ \varphi\frac{\partial z_\alpha}{\partial\psi} &= \sum_\beta M_{\alpha\beta}z_\beta \end{aligned}\qquad (\alpha,\ \beta=1,\ldots m),$$

wobei

$$L_{\alpha\beta}=\frac{A_{\alpha\beta}b-B_{\alpha\beta}a}{\Delta}=L_{\alpha\beta}^{(0)}+\varphi L'_{\alpha\beta}+\cdots,$$

$$M_{\alpha\beta}=\frac{A_{\alpha\beta}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}-B_{\alpha\beta}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}}{\Delta}=M_{\alpha\beta}^{(0)}+\varphi M'_{\alpha\beta}+\cdots$$

ist, und zwar sind $L_{\alpha\beta}^{(0)}$, $L'_{\alpha\beta}$, ...; $M_{\alpha\beta}^{(0)}$, $M'_{\alpha\beta}$, ... Potenzreihen von ψ, wenn an der Stelle $x=a$, $y=b$ oder $\varphi=0$, $\psi=0$ $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ und $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ nicht gleichzeitig verschwinden.

Das Differentialgleichungensystem (26) kann nur dann an dem singulären Gebilde $\varphi=0$ ein von Logarithmen freies Fundamentalsystem besitzen, wenn die Determinante

$$|L_{\alpha\beta}^{(0)}-p\delta_{\alpha\beta}|$$

lauter einfache Elementartheiler $p-p_1,\ldots p-p_m$ hat. Durch lineare Transformation der Variablen $z_1,\ldots z_m$ bringen wir das System (26) auf die Normalform**)

$$\text{(27)}\qquad \begin{aligned} \varphi\frac{\partial z_\alpha}{\partial\varphi} &= p_\alpha z+\varphi\sum_\beta P'_{\alpha\beta}z_\beta+\cdots \\ \varphi\frac{\partial z_\alpha}{\partial\psi} &= \sum_\beta Q_{\alpha\beta}^{(0)}z_\beta+\varphi\sum_\beta Q'_{\alpha\beta}z_\beta+\cdots \end{aligned}\qquad (\alpha,\ \beta=1,\ldots m),$$

worin die p_α constante Grössen, $P'_{\alpha\beta}$, ..., $Q_{\alpha\beta}^{(0)}$, $Q'_{\alpha\beta}$, ... Potenzreihen von ψ sind. $Q_{\alpha\beta}^{(0)}$ kann nur dann von Null verschieden sein, wenn $p_\beta-p_\alpha=1$ ist. Wenn

$$\begin{array}{lllll} p_{\lambda^0}=p^0 & \text{für} & e^0 & \text{Indices} & \lambda^0, \\ p_{\lambda'}=p' & ,, & e' & ,, & \lambda', \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & & & & \\ p_{\lambda^{(n)}}=p^{(n)} & ,, & e^{(n)} & ,, & \lambda^{(n)}, \end{array}$$

wenn weiter

$$p^0-p'=p'-p''=\cdots=p^{(n-1)}-p^{(n)}=1$$

ist, während keine der Grössen p_α gleich p^0+1 oder gleich $p^{(n)}-1$ ist, so sagen wir, die Grössen $p_{\lambda^0}=p^0$, $p_{\lambda'}=p'$, ... $p_{\lambda^{(n)}}=p^{(n)}$

---

*) Vgl. § 1.

**) Vgl. § 2.

bilden eine Gruppe. Die verschiedenen Gruppen bezeichnen wir durch $p_{\lambda_\alpha^0} = p_\alpha^0$, $p_{\lambda'_\alpha} = p'_\alpha$, $\ldots p_{\lambda_\alpha^{(n_\alpha)}} = p_\alpha^{(n_\alpha)}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots)$; statt $\lambda_\alpha^{(n_\alpha)}$ und $p_\alpha^{(n_\alpha)}$ schreiben wir wie früher einfach λ_α und p_α, wo es zweckmässig erscheint. Die Substitution

$$(28) \quad z_{\lambda_\alpha^0} = \varphi Z_{\lambda_\alpha^0}, \quad z_{\lambda'_\alpha} = \varphi Z_{\lambda'_\alpha}, \ldots z_{\lambda_\alpha^{(n_\alpha - 1)}} = \varphi Z_{\lambda_\alpha^{(n_\alpha-1)}}, \quad z_{\lambda_\alpha} = Z_{\lambda_\alpha}$$
$$(\alpha = 1, 2, \ldots)$$

in Verbindung mit einer linearen Substitution führt die den Indices $\lambda^0, \lambda', \ldots \lambda^{(n)}$ entsprechende Gleichungsgruppe

$$\begin{aligned}
\varphi \frac{\partial z_{\lambda^0}}{\partial \varphi} &= p_0 z_{\lambda^0} + \cdots, \\
\varphi \frac{\partial z_{\lambda'}}{\partial \varphi} &= p' z_{\lambda'} + \cdots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi \frac{\partial z_{\lambda^{(n)}}}{\partial \varphi} &= p^{(n)} z_{\lambda^{(n)}} + \cdots, \\
\varphi \frac{\partial z_{\lambda^0}}{\partial \psi} &= \qquad\quad + \cdots, \\
\varphi \frac{\partial z_{\lambda'}}{\partial \psi} &= \sum_{\lambda^0} Q^{(0)}_{\lambda' \lambda^0} z_{\lambda^0} + \cdots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi \frac{\partial z_{\lambda^{(n)}}}{\partial \psi} &= \sum_{\lambda^{(n-1)}} Q^{(0)}_{\lambda^{(n)} \lambda^{(n-1)}} z_{\lambda^{(n-1)}} + \cdots
\end{aligned}$$

über in

$$\begin{aligned}
\varphi \frac{\partial Z_{\lambda^0}}{\partial \varphi} &= (p^0 - 1) Z_{\lambda^0} + \cdots, \\
\varphi \frac{\partial Z_{\lambda'}}{\partial \varphi} &= (p' - 1) Z_{\lambda'} + \cdots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi \frac{\partial Z_{\lambda^{(n-1)}}}{\partial \varphi} &= (p^{(n-1)} - 1) Z_{\lambda^{(n-1)}} + \cdots, \\
\varphi \frac{\partial Z_{\lambda^{(n)}}}{\partial \varphi} &= p^{(n)} Z_{\lambda^{(n)}} + \cdots, \\
\varphi \frac{\partial Z_{\lambda^0}}{\partial \psi} &= \qquad\quad + \cdots, \\
\varphi \frac{\partial Z_{\lambda'}}{\partial \psi} &= \sum_{\lambda^0} Q^{(0)}_{\lambda' \lambda^0} Z_{\lambda^0} + \cdots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$$\varphi\,\frac{\partial Z_{\lambda^{(n-1)}}}{\partial\psi}=\sum_{\lambda^{(n-2)}}Q^{(0)}_{\lambda^{(n-1)}\,\lambda^{(n-2)}}Z_{\lambda^{(n-2)}}+\cdots,$$

$$\varphi\,\frac{\partial Z_{\lambda^{(n)}}}{\partial\psi}=\qquad\qquad\qquad+\cdots.$$

Wir können annehmen, dass durch unsere Transformation die $(n+1)$-gliedrige Gruppe $p^0, p', \ldots, p^{(n)}$ auf die n-gliedrige Gruppe $p^0-1, p'-1, \ldots p^{(n-1)}-1=p^{(n)}$ reducirt wird, da wir wegen $p^{(n-1)}-1=p^{(n)}$ nach der Transformation die den Indices $\lambda^{(n-1)}$ und $\lambda^{(n)}$ entsprechenden Gleichungen zusammenfassen können; eine nochmalige Transformation führt die n-gliedrige Gruppe $p^0-1, p'-1, \ldots p^{(n-1)}-1=p^{(n)}$ wiederum auf die $(n-1)$-gliedrige Gruppe p^0-2, $p'-2, \ldots p^{(n-2)}-2=p^{(n-1)}-1=p^{(n)}$ zurück u. s. w. Durch die n-mal wiederholte Transformation (28) (jedesmal in Verbindung mit einer linearen Transformation) reducirt sich die $(n+1)$-gliedrige Gruppe auf die eingliedrige Gruppe $p^{(n)}=p^{(n-1)}-1=\cdots=p'-(n-1)=p^0-n$. Es tritt also schliesslich an Stelle jeder mehrgliedrigen Gruppe $p^0_\alpha, p'_\alpha, \ldots p^{(n_\alpha)}_\alpha$ eine eingliedrige Gruppe p_α; die Schwierigkeiten, welche uns in § 2 bei willkürlichem k begegneten, können im Falle $k=1$ nicht auftreten, da hier aus verschiedenen Gruppen hervorgehende Grössen nach der Transformation nicht zu einer einzigen Gruppe zusammentreten können. So erhält das Differentialgleichungensystem (27) die kanonische Form, welche aus Gleichungsgruppen von der Gestalt

$$(29)\qquad\begin{aligned}\varphi\,\frac{\partial Z_\lambda}{\partial\varphi}&=pZ_\lambda+\varphi\sum_\beta R'_{\alpha\beta}Z_\beta+\cdots\\ \frac{\partial Z_\lambda}{\partial\psi}&=\sum_\beta S^{(0)}_{\lambda\beta}Z_\beta+\varphi\sum_\beta S'_{\lambda\beta}Z_\beta+\cdots\end{aligned}\qquad(\lambda=\lambda^0,\lambda',\ldots\lambda^{(n)})$$

besteht. Dem gesammten kanonischen System können wir die Form geben

$$(30)\qquad\begin{aligned}\varphi\,\frac{\partial Z_\alpha}{\partial\varphi}&=r_\alpha Z_\alpha+\varphi\sum_\beta R'_{\alpha\beta}Z_\beta+\cdots,\\ \frac{\partial Z_\alpha}{\partial\psi}&=\sum_\beta S^{(0)}_{\alpha\beta}Z_\beta+\varphi\sum_\beta S'_{\alpha\beta}Z_\beta+\cdots,\end{aligned}\qquad(\alpha,\beta=1,\ldots m)$$

indem wir

$$r_{\lambda^0}=r_{\lambda'}=\cdots=r_{\lambda^{(n)}}=p$$

setzen. In der kanonischen Form tritt also an Stelle einer jeden Wurzel der charakteristischen Gleichung

$$|L^{(0)}_{\alpha\beta}-p\,\delta_{\alpha\beta}|=0$$

von (26), welche einer Gruppe $p^0, p', \ldots p^{(n)}$ angehört, die letzte Wurzel $p = p^{(n)}$ dieser Gruppe. Besteht zwischen diesen letzten Wurzeln $p_1, \ldots p_2, \ldots$ keine ganzzahlige Differenz, so sind sämmtliche Lösungen des Systems (30) und also auch sämmtliche Lösungen des Systems (25) an dem singulären Gebilde $\varphi = 0$ von Logarithmen frei. Der Indicesgruppe $\lambda^0, \lambda', \ldots \lambda^{(n)}$ entspricht eine Gruppe von Lösungen des Systems (30) von der Gestalt

$$\begin{aligned} Z_\alpha^{(\lambda^0)} &= \varphi^p\, \mathfrak{Z}_\alpha^{(\lambda^0)}, \\ Z_\alpha^{(\lambda')} &= \varphi^p\, \mathfrak{Z}_\alpha^{(\lambda')}, \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ Z_\alpha^{(\lambda^n)} &= \varphi^p\, \mathfrak{Z}_\alpha^{(\lambda^n)}, \end{aligned}$$

wo sämmtliche $\mathfrak{Z}_\alpha$ Potenzreihen von φ und ψ sind. Mit Rücksicht auf die Transformationsformeln (28) ergiebt sich, dass die entsprechenden Lösungen des Systems (25) die Form haben

$$\begin{aligned} z_\alpha^{(\lambda^0)} &= \varphi^p\, \mathfrak{z}_\alpha(x-a,\ y-b)_{\lambda^0}, \\ z_\alpha^{(\lambda')} &= \varphi^p\, \mathfrak{z}_\alpha(x-a,\ y-b)_{\lambda'}, \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ z_\alpha^{(\lambda^n)} &= \varphi^p\, \mathfrak{z}_\alpha(x-a,\ y-b)_{\lambda^{(n)}}, \end{aligned}$$

wo die $\mathfrak{z}_\alpha$ Potenzreihen von $x-a$, $y-b$ darstellen.

Sollen sämmtliche Lösungen des Differentialgleichungensystems (25) *in der Umgebung der Stelle* (a, b) *des singulären Gebildes* $\varphi = 0$ (*für welche* $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ *und* $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ *nicht beide verschwinden und durch welche kein anderes singuläres Gebilde hindurchgeht*) *von Logarithmen frei sein, so muss die aus* (26) *gebildete charakteristische Determinante*

$$|L_{\alpha\beta}^{(0)} - p\,\delta_{\alpha\beta}|$$

lauter einfache Elementartheiler $p - p_1, \ldots p - p_m$ *besitzen. Ist diese Bedingung erfüllt, so ist wirklich ein an dem singulären Gebilde* $\varphi = 0$ *von Logarithmen freies Fundamentalsystem vorhanden, wenn nur, falls zwischen zwei Wurzeln* p_λ *und* p_μ *eine ganzzahlige* (*positive*) *Differenz besteht, stets auch* $p_\lambda - 1, p_\lambda - 2, \ldots p_\mu + 2, p_\mu + 1$ *der charakteristischen Gleichung genügen. Einer Wurzelgruppe*

$$\begin{aligned} p_{\lambda^0} &= p^0 \quad (\lambda^0 = \lambda_1^0, \ldots \lambda_{e}^0), \\ p_{\lambda'} &= p' \quad (\lambda' = \lambda_1', \ldots \lambda_{e'}'), \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ p_{\lambda^{(n)}} &= p^{(n)} \quad (\lambda^{(n)} = \lambda_1^{(n)}, \ldots \lambda_{e^{(n)}}^{(n)}), \end{aligned}$$

für welche

$$p^0 = p + n, \quad p' = p + n - 1, \ldots \quad p^{(n-1)} = p + 1, \quad p^{(n)} = p$$

ist, während keine andere Wurzel sich von p *um eine ganze Zahl unterscheidet, entspricht eine Gruppe von* $e^0 + e' + \cdots + e^{(n)}$ *Lösungen des Systems* (24) *von der Form* (31).

Dass die Grössen $r_1, \ldots r_m$ der kanonischen Form von der Wahl der zweiten Veränderlichen ψ unabhängig sind, erkennt man auf folgende Weise. Führt man an Stelle von ψ eine andere Variable ψ' derart ein, dass

$$\psi = f(\varphi, \psi')$$

ist, so geht das kanonische System über in

$$\begin{aligned} \varphi \frac{\partial z_\alpha}{\partial \varphi} &= \sum_\beta \left(R_{\alpha\beta} + \varphi \frac{\partial f}{\partial \varphi} S_{\alpha\beta}\right) z_\beta \\ \frac{\partial z_\alpha}{\partial \psi'} &= \sum_\beta \frac{\partial f}{\partial \psi'} S_{\alpha\beta} z_\beta \end{aligned} \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots m).$$

Die erste Gleichung schreibt sich

$$\varphi \frac{\partial z_\alpha}{\partial \varphi} = r_\alpha z_\alpha + \cdots,$$

also sind die Grössen $r_1, \ldots r_m$ dieselben geblieben. Da aber der oben angegebene Zusammenhang zwischen den Wurzeln $p_1, \ldots p_m$ der charakteristischen Gleichung des Systems (26) und den Grössen $r_1, \ldots r_m$ von der Wahl der Variablen ψ unabhängig ist, so sind die Wurzeln der Gleichung

$$\left| L_{\alpha\beta}^{(0)} - p\,\delta_{\alpha\beta} \right| = 0$$

dieselben, wie man auch ψ wählen mag. Für $\varrho = 0$, $\sigma = 1$, $\psi = x$ geht die charakteristische Gleichung über in

$$\left| A_{\alpha\beta} - p \frac{\partial \varphi}{\partial x} \delta_{\alpha\beta} \right| \equiv 0, \quad \text{mod. } \varphi$$

für $\varrho = 1$, $\sigma = 0$, $\psi = y$ in

$$\left| B_{\alpha\beta} - p \frac{\partial \varphi}{\partial y} \delta_{\alpha\beta} \right| \equiv 0, \quad \text{mod. } \varphi.$$

Diese beiden Congruenzen haben dieselben Wurzeln $p_1, \ldots p_m$, vorausgesetzt natürlich, dass φ die beiden Veränderlichen x, y enthält. Man kann also aus dem System (25) direct ohne Einführung neuer Variablen die Wurzeln der charakteristischen Gleichung und ihre Vertheilung in Gruppen ermitteln.

Bei der Darstellungsweise (31) der Lösungen des Systems (25) tritt immer nur die letzte Wurzel p einer Gruppe als Exponent auf.

Es ist aber denkbar, dass die Lösungen der Gruppe so geschrieben werden können, dass ein Theil der Lösungen zu den Exponenten $p^0, p', \ldots p^{(n-1)}$ gehört, indem sämmtliche Functionen

$$\zeta_\alpha(x-a,\ y-b)_{\lambda(i)} \quad (\alpha = 1, \ldots m)$$

durch φ theilbar werden.

Diese Frage soll bei einer anderen Gelegenheit erledigt werden.

Rehbach im Odenwald, Mai 1892.

Ueber Kronecker's Definition der Gruppe einer Gleichung.

Von

Oskar Bolza in Chicago.

Die Untersuchungen, welche Kronecker*) in § 11 der *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen* entwickelt, enthalten eine neue Definition der Gruppe einer Gleichung. Diese „Kronecker'sche Definition" und ihr Zusammenhang mit der Definition von Galois und Jordan bilden den Gegenstand der folgenden Betrachtungen.

Es sei

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

eine Gleichung n^{ten} Grades, deren Coefficienten einem gegebenen Rationalitätsbereich $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'' \ldots)$ angehören, und deren n Wurzeln $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$ von einander verschieden sind.

Mit *n unbestimmten Grössen* $u_1, u_2, \ldots u_n$ bilde man die $n!$-werthige Function

$$V = u_1\xi_1 + u_2\xi_2 + \cdots + u_n\xi_n \tag{2}$$

ihre $n!$ verschiedenen Werthe sind die Wurzeln einer Resolvente des Grades $n!$

$$G(V;\ u_1, u_2, \ldots u_n) = 0 \tag{3}$$

wo G eine ganze Function von $V;\ u_1, u_2, \ldots u_n$ bezeichnet, deren Coefficienten dem Rationalitätsbereich $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'' \ldots)$ angehören.

Sei $g(V;\ u_1, u_2, \ldots u_n)$ derjenige *irreductible* Factor von G, welcher die Wurzel

$$V = V_1 = u_1\xi_1 + u_2\xi_2 + \cdots + u_n\xi_n$$

besitzt.

$g(V;\ u_1, u_2, \ldots u_n)$ ist ebenfalls eine ganze Function von

$$V;\ u_1, u_2, \ldots u_n,$$

deren Cofficienten dem Rationalitätsbereich $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'' \ldots)$ angehören.

*) Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 92.

Als Function der n unbestimmten Grössen $u_1, u_2, \dots u_n$ betrachtet gehört $g(V; u_1, u_2, \dots u_n)$ zu einer ganz bestimmten Gruppe Γ von Substitutionen zwischen den Elementen $u_1, u_2, \dots u_n$. Es soll nun gezeigt werden:

Ersetzt man in den Substitutionen von Γ überall den Buchstaben u durch den Buchstaben ξ, so erhält man gerade die Galois'sche Gruppe der Gleichung (1).

Beweis:

a) Die sämmtlichen Wurzeln der irreductibeln Gleichung

$$g(V; u_1, u_2, \dots u_n) = 0 \tag{4}$$

ergeben sich aus einer derselben, z. B.

$$V_1 = u_1\xi_1 + u_2\xi_2 + \cdots + u_n\xi_n$$

durch Anwendung gewisser Substitutionen

$$1, a, b, \dots l \tag{5}$$

zwischen den Wurzeln $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$, sodass

$$g(V) \equiv (V - V_1)(V - V_a)(V - V_b)\dots(V - V_l). \tag{6}$$

Statt dessen kann man aber auch die Wurzeln von (4) *aus* V_1 *ableiten durch Anwendung gewisser Substitutionen*

$$1, \alpha, \beta, \dots \lambda \tag{7}$$

zwischen den Elementen $u_1, u_2, \dots u_n$; denn ist

$$a = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_n \\ \xi_{i_1} & \xi_{i_2} & \dots & \xi_{i_n} \end{pmatrix},$$

so hat die Substitution

$$\mathring{\alpha} = \begin{pmatrix} u_{i_1} & u_{i_2} & \dots & u_{i_n} \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{pmatrix},$$

also die inverse derjenigen Substitution die aus a durch Vertauschung der Buchstaben u und ξ hervorgehen würde, dieselbe Wirkung auf V_1 wie a:

$$V_\alpha = V_a, \tag{8}$$

und bei analoger Bezeichnung:

$$V_\beta = V_b, \dots V_\lambda = V_l;$$

also kann man auch schreiben

$$g(V) \equiv (V - V_1)(V - V_\alpha)(V - V_\beta)\dots(V - V_\lambda). \tag{9}$$

b) *Die Substitutionen* (7) *bilden eine Gruppe.*

Zum Beweis wende man auf die Function $g(V; u_1, u_2, \dots u_n)$ irgend eine Substitution σ zwischen den Elementen $u_1, u_2, \dots u_n$ an; so ist die resultirende Function $g_\sigma(V; u_1, u_2, \dots u_n)$ wieder *irreductibel*, Denn wäre g_σ in rationale Factoren zerlegbar, so würde durch Anwendung der inversen Substitution σ^{-1} folgen, dass auch g selbst

reductibel wäre, was gegen die Annahme ist. Man beachte, dass für diesen Schluss die *Unbestimmtheit* der Grössen u wesentlich ist.

Ist nun insbesondere σ eine der Substitutionen (7) z. B. $\sigma = \alpha$, so haben die beiden irreductibeln Functionen $g(V)$ und $g_\alpha(V)$ die Wurzel V_α gemeinsam, sie sind also identisch

(10) $$g_\alpha(V) \equiv g(V).$$

Daraus folgt aber unmittelbar, dass die Substitutionen (7) eine Gruppe bilden, Γ'; und aus der allgemeinen Theorie*) ergiebt sich dann weiter, dass die Gruppe Γ der Function $g(V;\ u_1, u_2, \ldots u_n)$ mit der Gruppe Γ' identisch ist:

(11) $$\Gamma' = \Gamma.$$

c) Mit den Substitutionen (7) bilden gleichzeitig auch die Substitutionen

(12) $$1,\ a^{-1},\ b^{-1}, \ldots l^{-1},$$

die sich von ihnen nur durch die Bezeichnung unterscheiden, eine Gruppe, G; also auch die inversen Substitutionen (5) und zwar ist die letztere Gruppe mit der Gruppe G identisch.

Die Substitutionen (5) bilden aber nach Jordan's Definition**) die Gruppe der Gleichung (1), und damit ist die oben ausgesprochene Behauptung bewiesen.

Der wesentliche *Unterschied* zwischen der Kronecker'schen und Jordan'schen Definition besteht hiernach in folgendem:

Herr Jordan beweist zunächst, dass das System der Substitutionen (5) die beiden Galois'schen Fundamentaleigenschaften besitzt und zeigt dann mit Hilfe eben dieser Eigenschaften, dass die Substitutionen (5) eine Gruppe bilden. Dagegen gestattet die Einführung der Unbestimmten u einen directen Beweis hierfür ohne Benutzung des Galois'schen Fundamentaltheorems.

Eine weitere Eigenthümlichkeit der Kronecker'schen Definition besteht darin, dass sie eine directe Methode zur practischen Bestimmung der Gruppe einer Gleichung durch rationale Operationen enthält, und zwar wiederum ohne Benutzung des Galois'schen Fundamentaltheorems.

Zum Schluss werfen wir noch einen Blick auf *die übrigen irreductiblen Factoren von* $G(V)$.

Wenn die Substitution σ nicht zur Gruppe Γ gehört, so ist $g_\sigma(V)$ einer der andern irreductibeln Factoren von $G(V)$. Ist daher ν der Index der Gruppe und

---

*) Z. B. Netto, Substitutionentheorie, § 30.

**) Jordan, Traité des Substitutions Nr. 353, 354; vgl. auch meine Arbeit *On the theory of substitution-groups etc.* Nr. 63, American Journal of Mathematics Vol. 13.

$$(13) \qquad \sigma_1 = 1,\ \sigma_2, \ldots \sigma_\nu$$

ein System von Substitutionen, mittels deren die sämmtlichen $n!$ Substitutionen aus den Substitutionen von Γ durch rechtsseitige Multiplication abgeleitet werden können, so sind

$$(14) \qquad g(V),\ g_{\sigma_2}(V), \ldots g_{\sigma_\nu}(V)$$

die sämmtlichen irreductibeln Factoren von $G(V)$. Sie gehören als Functionen der Elemente $u_1, u_2, \ldots u_n$ nach der allgemeinen Theorie beziehungsweise zu den Gruppen

$$(15) \qquad \Gamma_1 = \Gamma,\ \Gamma_2 = \sigma_2^{-1}\Gamma\sigma_2, \ldots \Gamma_\nu = \sigma_\nu^{-1}\Gamma\sigma_\nu.$$

Es ist ferner

$$g_\sigma(V) = (V - V_\sigma)(V - V_{\alpha\sigma})(V = V_{\beta\sigma}) \ldots (V - V_{\lambda\sigma}).$$

Nun ist aber bei der oben benutzten Bezeichnungsweise, da

$$(\alpha\sigma)^{-1} = \sigma^{-1}\alpha^{-1},$$

$$V_{\alpha\sigma} = V_{s\alpha}; \quad \text{also}$$

$$(16) \qquad g_\sigma(V) = (V - V_s)(V - V_{sa})(V - V_{sb}) \ldots (V - V_{sl}).$$

Die Wurzeln des irreductibeln Factors $g_\sigma(V)$ gehen also aus V_s ebenfalls durch Anwendung der Substitutionen der Gruppe G hervor.

Freiburg i. Br., im November 1892.

Ueber ternäre bilineare Formen.

Von

P. Muth in Osthofen (Rheinhessen).

Derjenige besondere Fall, wo sämmtliche Formen eines Büschels von ternären bilinearen Formen singulär sind, ist von Herrn Pasch gelegentlich seiner Untersuchungen über bilineare Formen (Math. Ann. 1891, Bd. 38, S. 39 u. 40) berührt und theilweise erledigt worden.*)

Die Untersuchungen über jenen Ausnahmefall mögen durch die folgenden Ausführungen vervollständigt werden. Es wird sich dabei zeigen, dass gerade der noch zu behandelnde Theil desselben bei der Lösung eines gewissen Zerlegungsproblems in Betracht kommt, auf das wohl zuerst Clebsch hingewiesen hat (in einer Abhandlung über die Connexe, Math. Ann. 1873, Bd. VI, S. 205 u. 206).

Wir gehen mit Rücksicht auf die Theorie der Connexe von bilinearen Formen contragredienter Veränderlichen aus und werden uns, da die Resultate auf algebraisch-geometrischem Wege erzielt und hier ins Besondere singuläre Formen der eben genannten Art betrachtet werden, zunächst mit den singulären Collineationen in der Ebene befassen (§ 1), wodurch wir zu einer einfachen Lösung des erwähnten Problems gelangen (§ 2). Dasselbe wird dann umgekehrt (§ 3), wobei interessante Identitäten auftreten.

Auf eine Reihe noch offener Fragen der Formentheorie, welche mit diesen Untersuchungen in enger Beziehung stehen, soll an geeigneter Stelle wenigstens hingewiesen werden.

---

*) Es wird a. a. O. das identische Verschwinden einer gewissen simultanen Covariante der Grundformen des Büschels vorausgesetzt, dasselbe im Folgenden dagegen ausgeschlossen.

§ 1.

Singuläre Collineationen.

1. Wir betrachten die bilineare Form $\sum a_{ik} x_i u_k$ $(i, k = 1, 2, 3)$ der contragredienten ternären Veränderlichen $x_1 | x_2 | x_3$ und $u_1 | u_2 | u_3$, welche wir mit $f(xu)$ bezeichnen. Wir setzen ferner

$$f(xu) = \sum x_i f_i(u) = \sum u_i f(x)_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$det f(xu) = \sum \pm a_{11} a_{22} a_{33} = \Delta, \qquad \frac{\partial \Delta}{\partial a_{ik}} = \alpha_{ik},$$

$$adj f(xu) = \sum \alpha_{ik} x_k u_i = \varphi(xu),$$

$$(i, k = 1, 2, 3);$$

$$\varphi(xu) = \sum x_i \varphi_i(u) = \sum u_i \varphi(x)_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Wir führen jetzt in einer Ebene lineare Coordinaten ein und betrachten $x_1 | x_2 | x_3$ als Coordinaten eines Punktes x, $u_1 | u_2 | u_3$ als Coordinaten einer Geraden u. Durch die Gleichung $f(xu) = 0$ wird alsdann dem Punkte $x = x_1 | x_2 | x_3$ der Punkt $x' = f(x)_1 | f(x)_2 | f(x)_3$ zugeordnet.

Die Beziehung zwischen x und x' heisst, wenn Δ von Null verschieden ist, bekanntlich eine ebene Collineation; sie wird auch eine eigentliche Collineation genannt im Gegensatz zu der Beziehung zwischen x und x' im Falle $\Delta = 0$ ist, welch' letztere eine uneigentliche oder singuläre Collineation*) genannt wird.

Sprechen wir von einer Collineation schlechthin, so ist stets eine eigentliche gemeint.

2. Wir setzen jetzt $\Delta = 0$ voraus, nehmen aber an dass $\varphi(xu)$ nicht identisch Null ist $\left(\text{in Zeichen: } \varphi(xu) \not\equiv 0,\ \Delta = 0\right)$.

Die Form $f(xu)$ heisst in diesem Falle z w e i t h e i l i g, da sich $f(xu)$ auf die Form

$$\varkappa \alpha_x u_b + \lambda \beta_x u_a$$

bringen lässt, wo $\alpha_x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$ u. s. w. Die Geraden $\alpha_1 | \alpha_2 | \alpha_3$ und $\beta_1 | \beta_2 | \beta_3$ bestimmen einen Punkt p, die Punkte $a_1 | a_2 | a_3$ und $b_1 | b_2 | b_3$ eine Gerade π.

Bildet man zu $\varkappa \alpha_x u_b + \lambda \beta_x u_a$ die adjungirte Form, so erhält man $\varkappa \lambda \pi_x u_p$, wenn

$$p_i = (\alpha \beta)_i, \qquad \pi_i = (b a)_i$$

---

*) Singuläre Collineationen werden im Zusammenhange betrachtet von Herrn Segre: Atti della R. Academia dei Lincei 1884, Serie 3, XIX.

genommen wird. Bei $\Delta = 0$ zerfällt die Form $\varphi(xu)$, wenn sie nicht identisch verschwindet.

3. Da man die Geraden α und β im Strahlenbüschel p beliebig wählen kann, so kann man die Form $f(xu) = 0$ bei $\Delta = 0$, $\varphi(xu) \not\equiv 0$ in obiger Weise auf ∞^2 Arten darstellen.

Die singuläre Collineation $f(xu) = 0$ vermittelt in diesem Falle eine projective Beziehung zwischen den Strahlen des Punktes p und den Punkten der Geraden π. Dem Punkte p entspricht jeder Punkt der Ebene. Einem von p verschiedenen Punkte x entspricht ein Punkt x' auf π, der homologer Punkt aller auf px liegenden Punkte ist. Jeder Geraden von p ist auf diese Weise ein Punkt auf π zugeordnet. Die Beziehung ist eindeutig, also projectiv.

Man nennt desshalb bei zweitheiligem $f(xu)$ die singuläre Collineation $f(xu) = 0$ auch eine Projectivität (singuläre Collineation erster Art bei Segre). Wenn die Projectivität $f(xu) = 0$ eine Beziehung zwischen dem Punkte p und der Geraden π herstellt, sprechen wir von einer durch $f(xu) = 0$ gegebenen Projectivität p, π.

4. Ist $\varphi(xu) \equiv 0$, so zerfällt die Form $f(xu)$. Jedem nicht auf einer bestimmten Geraden liegenden Punkte entspricht vermöge $f(xu) = 0$ derselbe Punkt, einem Punkte jener Geraden aber jeder Punkt der Ebene. Die singuläre Collineation $f(xu) = 0$ heisst in diesem Falle eine specielle bei Rosanes, eine singuläre Collineation zweiter Art bei Segre.

5. Ordnet man drei Geraden eines Punktes p drei Punkte einer Geraden π bez. zu, so giebt es *eine* singuläre Collineation $f(xu) = 0$, welche die so festgelegte projective Beziehung zwischen p und π vermittelt.

Da man die Zuordnung beliebig vornehmen kann, so ist die Projectivität $f(xu) = 0$, welche wir so erhalten, eine allgemeine zu nennen und umgekehrt jede Projectivität von allgemeiner Natur, so lange $f(xu)$ nur den Bedingungen $\Delta = 0$, $\varphi(xu) \not\equiv 0$ unterliegt.

Bei der Classificirung der singulären Collineationen dieser Art kann man nach den von Herrn Segre a. a. O. aufgestellten Grundsätzen verfahren. Allen möglichen Lagen eines Strahlenbüschels p gegen eine zu ihm projective Punktreihe π entsprechen die verschiedenen Classen von singulären Collineationen $f(xu) = 0$ bei zweitheiligem $f(xu)$.

Für unsere späteren Betrachtungen sind besonders die Fälle von Interesse, in welchen durch das, einzeln oder gleichzeitige eintretende, Verschwinden der Invarianten

$$i = a_{11} + a_{22} + a_{33}, \quad i_\varphi = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}$$

der Form $f(xu)$ eine besondere Lage des Büschels p gegen die

Punktreihe π eintritt, wenn $f(xu) = 0$ eine Projectivität p, π vorstellt.

Nehmen wir zunächst an, die Invariante i_φ sei Null. Wir setzen nach 2

$$f(xu) = \varkappa \alpha_x u_b + \lambda \beta_x u_a, \qquad \varphi(xu) = \varkappa \lambda \pi_x u_p;$$

dann wird

$$i_\varphi = \varkappa \lambda \pi_p$$

und $i_\varphi = 0$ besagt, dass die Elemente π und p aneinander liegen. Also:

Bei $\Delta = 0$, $\varphi(xu) \equiv\mid\equiv 0$, $i_\varphi = 0$ *werden durch die Gleichung* $f(xu) = 0$ *die Geraden eines Punktes* p *der Ebene projectivisch auf die Punkte einer durch* p *gehenden Geraden* π *bezogen:*

Ist hingegen $i = 0$ und i_φ zunächst von Null verschieden, so erhalten wir bei obiger Darstellung von $f(xu)$

$$i = \varkappa a_\beta + \lambda b_\alpha = 0.$$

Es kann aber $a_\beta = 0$ gewählt werden (2), also wird bei $i = 0$ auch $b_\alpha = 0$, m. a. W.:

Ist durch die Gleichung $f(xu) = 0$ *eine Projectivität* p, π *gegeben und* $i_\varphi = 0$, *so kann man im Strahlenbüschel* p *dadurch eine projective Beziehung herstellen, dass man einem Strahle* α *desselben den Strahl* α' *zuordnet, welcher* p *mit dem zu* α *homologen Punkte auf* π *verbindet. Man erhält so zwei concentrische projective Strahlenbüschel, welche in Involution liegen, wenn die Invariante* i *Null ist.*

Nehmen wir schliesslich i und i_φ gleichzeitig gleich Null an, dann können wir bei der Umformung von $f(xu)$ $\alpha = \pi$ wählen; denn wegen $i_\varphi = 0$ liegt p auf π und a kann beliebig genommen werden (2). Es wird so

$$i = \varkappa \pi_b + \lambda \beta_a = \lambda \beta_a;$$

da $i = 0$ ist, liegt a auf β und fällt demnach mit p zusammen:

Bei $i = 0$, $i_\varphi = 0$ *werden durch die Projectivität* $f(xu) = 0$ *die Strahlen eines Punktes derart auf die Punkte einer durch* p *gehenden Geraden bezogen, dass dem Strahle* π *des Büschels* p *der Punkt* p *der Punktreihe* π *entspricht.*

6. Die Form $f(xu)$ sei wieder zweitheilig,

$$f'(xu) = \sum a'_{ik} x_i u_k \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

eine beliebige bilineare Form, $\Delta' = \sum \pm a'_{11} a'_{22} a'_{33}$ u. s. w., wie in **1**.

Die simultane Invariante

$$\Theta = \sum a'_{ik} a_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

der Formen $f(xu)$ und $f'(xu)$ sei Null. Bringen wir $f(xu)$ auf die bekannte Form (2), so ist

$$a_{ik} = \varkappa\lambda p_i \pi_k$$

zu nehmen, wodurch

$$\Theta = \varkappa\lambda \sum a'_{ik} p_i \pi_k \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

wird.

$\Theta = 0$ *besagt also, dass die Elemente p und π ein Nullpaar der Form $f'(xu)$ sind.*

§ 2.

Das Problem von Clebsch.

7. Wir nehmen jetzt an die Formen $f(xu)$ und $f'(xu)$ seien so beschaffen, *dass alle Formen des Büschels $\varrho f(xu) + \sigma f'(xu)$ singulär sind.* Nun ist

$$\det[\varrho f(xu) + \sigma f'(xu)] = \varrho^3\Delta + \varrho^2\sigma\Theta + \varrho\sigma^2\Theta' + \sigma^3\Delta',$$

wo

$$\Theta' = \sum a_{ik} a'_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

Wir setzen also voraus, dass die Invarianten Δ, Δ', Θ, Θ' gleichzeitig verschwinden.

Zerlegt sich eine der beiden Formen, etwa $f'(xu)$ in $\alpha'_x u_{a'}$, so zerlegt sich unter den gemachten Voraussetzungen auch die Form

$$\Phi(xu) = \sum \frac{\partial\varphi(xu)}{\partial a_{ik}} \cdot a'_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

und die zu ihr adjungirte Form, welche wir mit $\Psi(xu)$ bezeichnen wollen, verschwindet identisch. In der That wird für

$$f'(xu) = \alpha'_x u_{a'},$$
$$f(xu) = \varkappa\alpha_x u_b + \lambda\beta_x u_a,$$

$\Delta = \Delta' = \Theta' = 0$ und $\Theta = 0$ besagt (6), dass entweder $(\alpha\beta\alpha')$ oder (aba') Null ist oder beide Determinanten zugleich verschwinden. In jedem dieser Fälle zerlegt sich aber $\Phi(xu)$ und $\Psi(xu)$ wird identisch Null*).

Erfüllen also zwei Formen die Bedingungen $\Delta = \Delta' = \Theta = \Theta' = 0$ und eine zerlegt sich, so verschwindet $\Psi(xu)$ identisch. Sind dagegen beide Formen zweitheilig, so ist im Allgemeinen $\Psi(xu)$ nicht identisch Null. Also: *Unter den Bedingungen $\Delta = \Delta' = \Theta = \Theta' = 0$, $\Psi(xu) \not\equiv 0$ sind beide Formen $f(xu)$ und $f'(xu)$ zweitheilig.*

8. Unter den eben genannten Bedingungen können wir also

$$f = \alpha_x u_b + \beta_x u_a,$$
$$f' = \alpha'_x u_{b'} + \beta'_x u_{a'}$$

*) Man kann zeigen, dass bei beliebigem f die Form Φ zerfällt, wenn f' zerfällt und $\Theta = 0$ ist. Vergl. auch Pasch, l. c.

annehmen; dabei fallen weder die Punkte $p = \alpha\beta$ und $p' = \alpha'\beta'$ noch die Geraden $\pi = ab$ und $\pi' = a'b'$ zusammen, da $\Psi(xu) \not\equiv 0$ ist. (Pasch, l. c.).

Wegen $\Theta = 0$ sind die Elemente p und π ein Nullpaar von der Form $f'(xu)$, wegen $\Theta' = 0$ die Elemente p' und π' ein Nullpaar von $f(xu)$ (**6**). Es entspricht also dem Strahle $p'p$ des Büschels p' der Punkt $\pi'\pi$ der Geraden π in der Projectivität $f(xu) = 0$ und dem Strahle pp' des Büschels p der Punkt $\pi\pi'$ der Geraden π in der Projectivität $f(xu) = 0$ (**3**). *Also entspricht dem gemeinsamen Strahle der Büschel p und p' in beiden Projectivitäten der gemeinsame Punkt der Geraden π und π'.*

Wählen wir also bei unserer Darstellung von $f(xu)$ und $f'(xu)$ in obiger Form $\alpha = \alpha'$, so müssen wir $a = a'$ nehmen. Bei $\Delta = \Delta' = \Theta = \Theta' = 0$, $\Psi(xu) \not\equiv 0$ können wir also $f(xu)$ und $f'(xu)$ so umformen, dass

$$f(xu) = \alpha_x u_b + \beta_x u^a,$$
$$f'(xu) = \alpha_x u_{b'} + \beta'_x u_a$$

wird; dabei ist weder $(\alpha\beta\beta')$ noch (abb') Null.

Setzen wir für den Augenblick

$$\varrho u_b + \sigma u_{b'} = \tau u_c, \quad \varrho\beta_x + \sigma\beta'_x = \tau'\gamma_x,$$

so wird (**2**)

$$\operatorname{adj}\big(\varrho f(xu) + \sigma f'(xu)\big) = \text{Const.}\,(acx)(\alpha\gamma u)$$

für keinen Werth $\varrho \mid \sigma$ identisch Null. Unter den gemachten Voraussetzungen werden also *alle* Formen des Büschels $\varrho f(xu) + \sigma f'(xu)$ zweitheilig sein, $\varrho f(xu) + \sigma f'(xu) = 0$ stellt ein Büschel von Projectivitäten dar. Bezeichnen wir eine Projectivität desselben mit P, Π, so liegt der Punkt P auf α, die Gerade Π geht durch a und zwar entspricht dem Strahle α der Punkt a.

Wir wollen die erhaltenen Resultate, durch welche der Fall $\det\big(\varrho f(xu) + \sigma f'(xu)\big) \equiv 0$, $\Psi(xu) \not\equiv 0$ vollständig erledigt ist und in Verbindung mit den Untersuchungen von Herrn Pasch der Fall der Singularität aller Formen eines Büschels überhaupt, in folgendem Satze zusammenstellen:

Im Falle $\Delta = \Delta' = \Theta = \Theta' = 0$, $\Psi(xu) \not\equiv 0$ sind alle Formen des Büschels $\varrho f(xu) + \sigma f'(xu)$ zweitheilig; durch die Gleichung $\varrho f(xu) + \sigma f'(xu) = 0$ wird in derselben Ebene ein Büschel von Projectivitäten P, Π geliefert. Alle Punkte P liegen in einer Geraden; alle Geraden Π gehen durch einen Punkt und zwar sind jene Gerade und dieser Punkt homologe Elemente jeder Projectivität des Büschels.

Unter der Voraussetzung $(\alpha\beta\beta') \neq 0$, $(abb') \neq 0$ konnten wir $f(xu)$ und $f'(xu)$ im Falle $\Delta = \Delta' = \Theta = \Theta' = 0$, $\Psi(xu) \not\equiv 0$ in

$$\alpha_x u_b + \beta_x u_a,$$
$$\alpha_x u_{b'} + \beta'_x u_a$$

umformen. Führen wir also durch die lineare Substitution

$$\alpha_x = X_1, \quad \beta_x = X_2, \quad \beta'_x = X_3$$

statt der x_i Veränderliche X_i und durch die lineare Substitution

$$u_b = U_1, \quad u_a = U_2, \quad u_{b'} = U_3$$

statt der u_i Veränderliche U_i ein, so gehen durch diese Substitutionen die beiden Formen $f(xu)$ und $f'(xu)$ gleichzeitig in die Formen

$$X_1 U_1 + X_2 U_2,$$
$$X_1 U_3 + X_3 U_2$$

über. Da β und β' in den betr. Strahlenbüscheln beliebig (aber von α verschieden) gewählt werden können, so giebt es ∞^2 Paare solcher linearen Substitutionen, welche unsere beiden Formen in die zuletzt gegebenen überführen*). —

9. Liegen die Strahlenbüschel p und p' und die Punktreihen π und π' in einer Ebene so, dass weder p mit p' noch π mit π' zusammenfällt, besteht ferner zwischen p und π eine projective Beziehung, in der dem Strahle pp' der Punkt $\pi\pi'$, zwischen p' und π' eine solche Beziehung, dass dem Strahle $p'p$ ebenfalls der Punkt $\pi'\pi$ entspricht, so ist bekanntlich hierdurch eine Reciprocität d. i. eine lineare reciproke Beziehung in der Ebene gegeben, welche nicht degenerirt. Man findet zu einem Punkte x die homologe Gerade u dadurch, dass man zu den Strahlen px und $p'x$ in der ersten bez. in der zweiten Projectivität die homologen Punkte x' auf π, bez. x'' auf π' aufsucht; die Gerade $x'x''$ ist die zu x homologe Gerade u. Für die Punkte auf der Geraden pp' versagt die Construction, doch gelangt man bei diesen leicht auf indirectem Wege zum Ziele.

Von zwei Projectivitäten der eben beschriebenen Art können wir sagen, das ssie *eine ebene Reciprocität erzeugen.* Es folgt mithin sofort aus Artikel 8:

Unter der Voraussetzung det $(\varrho f + \sigma f') \equiv 0$, $\Psi(xu) \not\equiv 0$ *erzeugen die einer Ebene angehörigen Projectivitäten* $f(xu) = 0$ *und* $f'(xu)$ *eine Reciprocität in derselben.*

Die Gleichung der so erzeugten Reciprocität sei $g(xy) = 0$, wo $g(xy)$ eine bilineare ordinäre Form der cogredienten Veränderlichen x_i und y_i bedeutet.

In der Reciprocität $g(xy) = 0$ entspricht einem nicht auf der Geraden pp' liegenden Punkte $x_1 | x_2 | x_3$ die Gerade u, deren Gleichung in den Veränderlichen y_i

---

*) Ueber die rein algebraische Behandlung solcher Transformationsprobleme vergl. die Aufsätze von Kronecker, Berliner Monatsberichte 1874.

$$\begin{vmatrix} y_1 & f(x)_1 & f'(x)_1 \\ y_2 & f(x)_2 & f'(x)_2 \\ y_3 & f(x)_3 & f'(x)_3 \end{vmatrix} = 0$$

lautet.

Die linke Seite dieser Gleichung ist eine in den Veränderlichen y_i lineare, in den Veränderlichen x_i quadratische Form, die mit $F(xxy)$ bezeichnet werde. Fällt x in die Gerade pp', so wird $F(xxy)$ identisch Null. Während bei allgemeiner Beschaffenheit der Formen $f(xu)$ und $f'(xu)$ bei gegebenem $y_1 | y_2 | y_3$ die Punkte x, deren Coordinaten $x_1 | x_2 | x_3$ die Gleichung $F(xxy) = 0$ befriedigen, auf einem Kegelschnitte liegen, zerfällt dieser im behandelten Falle in eine Gerade $(pp'x) = 0$ und in diejenige Gerade, welcher y in der Reciprocität $g(xy) = 0$ entspricht. Es wird mithin

$$F(xxy) = \text{Const.}\ (pp'x)\, g(xy).$$

Die Form $F(xxy)$ zerfällt also bei $\Delta = \Delta' = \Theta = \Theta' = 0$, $\Psi(xu) \equiv\!\!|\; 0$ und zwar wird sie das Product einer linearen Form y_i in eine bilineare ordinäre Form der x_i und y_i.

Der nicht durch den Punkt $\pi\pi'$ gehenden Geraden $v = v_1 | v_2 | v_3$ entspricht in der zu $g(xy) = 0$ inversen Reciprocität ein Punkt mit der Gleichung

$$\begin{vmatrix} u_1 & f_1(v) & f_1'(v) \\ u_2 & f_2(v) & f_2'(v) \\ u_3 & f_3(v) & f_3'(v) \end{vmatrix} = 0$$

in Liniencoordinaten $u_1 | u_2 | u_3$. Bezeichnen wir den Ausdruck auf der linken Seite dieser Gleichung mit $\Gamma(uvv)$, so zeigt man ähnlich wie vorhin bei $F(xxy)$, dass

$$\Gamma(uvv) = \text{Const.}\ (\pi\pi'v)\, \gamma(uv)$$

wird, wo $\gamma(uv)$ eine bilineare ordinäre Form der u_i und v_i bedeutet. Die Gleichung $\gamma(uv) = 0$ ordnet einer Geraden $u_1 | u_2 | u_3$ einen Punkt zu. Diese Reciprocität ist mit $g(xy) = 0$ identisch.

Setzen wir

$$g(xy) = y_1 f(x)_1 + y_2 f(x)_2 + y_3 f(x)_3,$$
$$\gamma(uv) = u_1 \gamma_1(v) + u_2 \gamma_2(v) + u_3 \gamma_3(v)$$

und lösen die Gleichungen $f(xu) = 0$ und $f'(xu)$ nach den u_i bez. x_i als Unbekannten auf, so erhalten wir unter den gemachten Voraussetzungen

$$u_i = (pp'x)\, g(x)_i \qquad (i = 1, 2, 3),$$
$$x_i = (\pi\pi'u)\, \gamma_i(u) \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Die durch die beiden bilinearen Gleichungen dargestellte quadratische reciproke Beziehung wird also unter den gemachten Voraussetzungen

in allen Punkten einer Geraden pp' und in allen Geraden eines Punktes $\pi\pi'$ unbestimmt, verhält sich im übrigen Theile der Ebene jedoch wie eine lineare eigentliche Reciprocität. *Wir wollen in diesem Sinne sagen, dass unter den Bedingungen* $\Delta = \Delta' = \Theta = \Theta' = 0$, $\Psi(xu) \mathrel{\equiv\!\!|\!\!=} 0$ *durch die Gleichungen* $f(xu) = 0$, $f'(xu) = 0$ *eine lineare reciproke Verwandtschaft in der Ebene dargestellt werde, welche nicht ausartet.* Man findet zu einem Punkte x auf pp' die homologe Gerade u, indem man den linearen Factor $(pp'x)$ vernachlässigt und $u_i = g(x)_i$ nimmt.

Bedienen wir uns der in der Theorie der Connexe üblichen Ausdrucksweise, so können wir auch sagen: Unter den aufgeführten Bedingungen besitzen die beiden Connexe (1, 1) $f(xu) = 0$ und $f'(xu) = 0$ die besondere Eigenschaft, dass aus der ihnen gemeinsamen Coincidenz keine quadratische reciproke, sondern eine lineare reciproke Verwandtschaft in der Ebene hervorgeht.

Eben nach den Bedingungen, unter welchen diese Besonderheit eintritt, fragt Clebsch a. a. O.; die aufgeführten sind hierzu *hinreichend*, dass sie auch *nothwendig* sind, soll im nächsten Artikel gezeigt werden.

Hier sei nur noch bemerkt, dass bei $\det(\varrho f + \sigma f') \equiv 0$, $\Psi \mathrel{\equiv\!\!|\!\!=} 0$ die Jacobi'sche Covariante von den drei Formen

$$u_x = u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3, \quad f(xu), \quad f'(xu)$$

zerfällt, gleichgiltig, ob man die x_i oder u_i als Veränderliche auffasst. Denn es wird

$$\frac{\partial(u_x,\, f(xu),\, f'(xu))}{\partial(x_1,\, x_2,\, x_3)} = F(xxx) = \text{Const.}\,(pp'x)\, g(xx),$$

$$\frac{\partial(u_x,\, f(xu),\, f'(xu))}{\partial(u_1,\, u_2,\, u_3)} = \Gamma(uuu) = \text{Const.}\,(\pi\pi'u)\, \gamma(uu),$$

$g(xx)$ und $\gamma(uu)$ sind ordinäre quadratische Formen.

10. Setzen wir jetzt einmal voraus, die bilinearen Formen $f(xu)$ und $f'(xu)$ seien so beschaffen, dass die Beziehung zwischen dem Punkte x und der Geraden u, welche die Punkte $f(xu) = 0$ und $f'(xu) = 0$ verbindet, eine lineare reciproke eigentliche wird. Man erkennt dann zunächst, dass sowohl $f(xu) = 0$ als $f'(xu) = 0$ eine singuläre Collineation sein muss. Denn angenommen die Beziehung $f(xu) = 0$ wäre eine eigentliche collineare, so stände u zu x in eigentlicher reciproker, x zu x' oder $f(xu) = 0$ in eigentlicher reciproker, also u auch zu x' in eigentlicher reciproker Beziehung. Wir hätten eine eigentliche Reciprocität in der Ebene, bei der alle Paare homologer Elemente aneinander liegen, was bekanntlich in der Ebene niemals eintreten kann. Es muss $f(xu)$ und ebenso $f'(xu)$, überhaupt jede Form des Büschels $\varrho f(xu) + \sigma f'(xu)$ singulär sein. Denn benutzen wir zwei

verschiedene Formen dieses Büschels, so entsteht in der angegebenen Weise dieselbe Reciprocität, wie durch $f(xu)$ und $f'(xu)$. Also es muss

$$\det\big(\varrho f(xu) + \sigma f'(xu)\big) = \varrho^3\Delta + \varrho^2\sigma\Theta + \varrho\sigma^2\Theta' + \sigma^3\Delta'$$

für alle $\varrho \mid \sigma$ verschwinden, also ausser Δ und Δ' müssen auch Θ und Θ' Null sein.

Wäre nun im Büschel $\varrho f + \sigma f'$ eine zerfallende Form, so könnte keine eigentliche Reciprocität entstehen. Dies setzen wir aber voraus, also alle Formen dieses Büschels müssen zweitheilig sein; $f(xu) = 0$ ist also eine Projectivität p, π, $f'(xu) = 0$ eine Projectivität p', π'. Durch zwei Projectivitäten p, π und p', π' kann aber eine eigentliche Reciprocität nur dann erzeugt werden (vergl. S. 263), wenn weder p mit p' noch π mit π' zusammenfällt. Denn fiele etwa p mit p' zusammen, so entspräche jedem Punkte eines durch $p = p'$ gehenden Strahles dieselbe Gerade (**2**), u. s. w. Es muss also $\Psi(xu)$ nicht identisch Null vorausgesetzt werden. Die Bedingungen $\Delta = \Delta' = \Theta = \Theta' = 0$, $\Psi(xu) \equiv\!\!\!\!|\;\, 0$ sind also nothwendig und nach **9** auch hinreichend dafür, dass die durch die Gleichungen $f(xu) = 0$ und $f'(xu)$ gegebene Beziehung zwischen x und u eine lineare wird, welche nicht ausartet. Dabei ist stets zu berücksichtigen, was über die in einzelnen Punkten der Ebene eintretende Unbestimmtheit im letzten Artikel gesagt wurde. *Denn wenn hier die lineare reciproke Verwandtschaft als specieller Fall der quadratischen erscheint, muss sie auch alle Eigenthümlichkeiten zeigen, welche dieser zukommen.* Während aber bei der quadratischen birationalen Verwandtschaft im Allgemeinen nur in *drei* Punkten Unbestimmtheit eintritt, geschieht dies hier in *unendlich vielen* Punkten, die eine Gerade erfüllen. Die Form

$$\sum \pm y_1 f(x)_2 f'(x)_3$$

zerfällt, der sich ausscheidende bilineare Factor liefert auch für die Punkte jener Geraden die homologen Geraden (**9**).

Wir erhalten, indem wir die Resultate des vorigen Artikels mit den jetzigen zusammenstellen, den folgenden Satz:

Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die durch die beiden bilinearen Gleichungen $f(xu) = 0$ und $f'(xu)$ dargestellte, im Allgemeinen quadratische reciproke Verwandtschaft, zu einer linearen reciproken eigentlichen wird, sind $\Delta = \Delta' = \Theta = \Theta' = 0$, $\Psi(xu) \equiv\!\!\!\!|\;\, 0$.

Oder:

Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass aus der zwei Connexen $(1, 1)$ $f(xu) = 0$ und $f'(xu) = 0$ gemeinsamen

Coincidenz eine lineare reciproke Verwandtschaft hervorgeht, welche nicht ausartet, sind $\Delta = \Delta' = \Theta = \Theta' = 0$, $\Psi(xu) \not\equiv 0$.

Damit ist das von Clebsch aufgeworfene Problem vollständig erledigt. Derselbe sagt a. a. O., dass die Reciprocität durch zwei Connexe (1, 1) in allgemeinster Weise erzeugt werden könne, eine etwas unverständliche Bemerkung, die sich vielleicht jetzt so erklären lässt, dass die zur Erzeugung der Reciprocität benutzten Projectivitäten als solche *allgemein* zu nennen sind (5), während nur ihre durch die Bedingungen $\Theta = \Theta' = 0$, $\Psi(xu) \not\equiv 0$ herbeigeführte gegenseitige Lage eine *specielle* zu nennen ist.

11. Ist die Form $\sum \pm y_1 f(x)_2 f'(x)_3$ das Product einer linearen Form der x_i in eine bilineare Form der x_i und y_i, so ist die durch die Gleichungen $f(xu) = 0$ und $f'(xu) = 0$ dargestellte Verwandtschaft zwischen x und u eine lineare eigentliche, also **(10)** $\det(\varrho f + \sigma f') \equiv 0$, $\Psi(xu) \not\equiv 0$ und somit **(9)** $\sum \pm u_1 f_2(v) f_3'(v)$ das Product einer linearen Form der u_i in eine bilineare Form der u_i und v_i. Umgekehrt: Zerlegt sich in der angegebenen Weise die Form $\sum \pm u_1 f_2(v) f_3'(v)$, so zerlegt sich die Form $\sum \pm y_1 f(x)_2 f'(x)_3$ ebenfalls wie oben angegeben. Also:

Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die aus den Formen $f(xu)$ und $f'(xu)$ gebildeten Formen $\sum \pm y_1 f(x)_2 f'(x)_3$ und $\sum \pm u_1 f_2(v) f_3'(v)$ sich gleichzeitig in der angegebenen Weise zerlegen, sind $\det(\varrho f + \sigma f') \equiv 0$, $\Psi(xu) \not\equiv 0$.

Die beiden Formen $\sum \pm y_1 f(x)_2 f'(x)_3$ und $\sum \pm u_1 f_2(v) f_3'(v)$ lassen sich in der angegebenen Weise nicht oder gleichzeitig zerlegen.

12. Für die Formentheorie sind noch folgende Zusammenhänge wichtig. Verschwinden die Invarianten Δ, Δ', Θ, Θ', während Ψ nicht identisch Null ist, so müssen die Ausdrücke:

$$\sum \pm \varphi_1(u)\, \Phi_2(u)\, \varphi_3'(u), \qquad \sum \pm \varphi(x)_1\, \Phi(x)_2\, \varphi'(x)_3,$$

wo $\Phi(xu) = u_1 \Phi(x)_1 + \cdots = x_1 \Phi_1(u) + \cdots$, beide identisch verschwinden, wie sich mit Hülfe der von Herrn Pasch a. a. O. S. 35 und 36 entwickelten Formeln ergiebt. Bezeichnen wir den ersten Ausdruck mit $K^3(u)$, den zweiten mit $C^3(x)$, so kann man sagen, dass mit Δ, Δ', Θ, Θ' stets das Product $C^3(x) \,.\, \Psi(xu)$ und das Product $K^3(u) \,.\, \Psi(xu)$ verschwindet. Denn verschwinden jene 4 Invarianten und $K^3(u)$ ist nicht identisch Null, so ist $\Psi(xu) \equiv 0$, da bei $\Psi(xu) \not\equiv 0$ ja $K^3(u) \equiv 0$ ist, u. s. w. Auf die Herleitung interessanter

Identitäten, welche nach dem Gesagten zwischen diesen Formen bestehen, soll indess hier nicht eingegangen werden.

Soll durch die Projectivitäten $f(xu) = 0$ und $f'(xu) = 0$ eine Polarreciprocität erzeugt werden, so müssen ausser den genannten 4 Invarianten bei $\Psi(xu) \neq 0$ noch die Invarianten i und $i' = a'_{11} + a'_{22} + a'_{33}$ verschwinden (5). Die Bedingungen $i = 0$, $i' = 0$ im Vereine mit den früher angegebenen sind jedoch nicht hinreichend dafür, dass die Beziehung $f(xu) = 0$, $f'(xu) = 0$ zwischen x und u polarreciprok wird.

§ 3.

Erzeugung einer gegebenen Reciprocität durch Paare von Projectivitäten.

13. Wir setzen

$$f(xy) = \sum_{(i,k=1,2,3)} a_{ik} x_i y_k = \sum_{(i=1,2,3)} y_i f(x)_i = \sum_{(i=1,2,3)} x_i f_i(y),$$

$$\Delta = \sum \pm a_{11} a_{22} a_{33}, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial a_{ik}} = \alpha_{ik},$$

$$\varphi(uv) = \sum_{(i,k=1,2,3)} \alpha_{ik} u_i v_k = \sum_{(i=1,2,3)} v_i \varphi(u)_i = \sum_{(i=1,2,3)} u_i \varphi_i(v).$$

Bedeuten $x_1|x_2|x_3$, $y_1|y_2|y_3$ Punktcoordinaten, $u_1|u_2|u_3$, $v_1|v_2|v_3$ Liniencoordinaten in einem linearen Coordinatensystem der Ebene, so ist in dieser durch die Gleichung $f(xy) = 0$ bei $\Delta \neq 0$ eine Reciprocität gegeben, vermöge deren

dem Punkte $x_1|x_2|x_3$ die Gerade $f(x)_1|f(x)_2|f(x)_3$,

der Geraden $u_1|u_2|u_3$ der Punkt $\varphi(u)_1|\varphi(u)_2|\varphi(u)_3$

entspricht; die Reciprocität wird also sowohl durch die Gleichung $f(xy) = 0$ als auch durch die Gleichung $\varphi(uv) = 0$ dargestellt. Dementsprechend werden wir, *wenn es sich jetzt darum handelt diese Reciprocität durch Paare von Projectivitäten zu erzeugen*, entweder Formenpaare $g(xu)$ und $h(xu)$ so bestimmen, dass aus den Gleichungen $g(xu) = 0$, $h(xu) = 0$ sich

$$\varrho u_i = l_x f(x)_i \quad (i=1, 2, 3)$$

ergiebt, oder wir werden $g(xu)$ und $h(xu)$ derart bestimmen, dass aus $g(xu) = 0$, $h(xu) = 0$ sich

$$\sigma x_i = u_\lambda \varphi(u)_i \quad (i=1, 2, 3)$$

ergiebt, wo ϱ und σ weder Null noch Unendlich sind und l_x, u_λ lineare Formen der x_i, u_i bedeuten.

Haben wir alle Paare von Projectivitäten gefunden, welche unsere Reciprocität auf erstere Art erzeugen, so haben wir in Folge des Dualitätsprincips auch alle Paare, welche die Reciprocität auf die zweite Art erzeugen. Wir beschäftigen uns desshalb zunächst nur mit der Erzeugung ersterer Art.

14. Wenden wir zuerst die gegebene Reciprocität $f(xy) = 0$ an, so gelangen wir von einem Punkte $x_1 | x_2 | x_3$ zu einer Geraden $f(x)_1 | f(x)_2 | f(x)_3$; wenden wir hierauf die singuläre Reciprocität

$$(1) \qquad \begin{aligned} x_1 &= \quad r u_2 - q u_3, \\ x_2 &= -r u_1 + p u_3, \\ x_3 &= \quad q u_1 - p u_2 \end{aligned}$$

an, so entspricht in dieser der Geraden $f(x)_1 | f(x)_2 | f(x)_3$ ein in derselben liegender Punkt x' mit der Gleichung

$$u_1 [r f(x)_2 - q f(x)_3] + u_2 [-r f(x)_1 + p f(x)_3] + u_3 [q f(x)_1 - p f(x)_2] = 0.$$

Die Beziehung zwischen x und x' ist eine singuläre collineare und durch vorstehende Gleichung dargestellt, welcher wir auch die Form

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} p & q & r \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ f(x)_1 & f(x)_2 & f(x)_3 \end{vmatrix} = 0$$

ertheilen können. Zwei verschiedene Werthsysteme $p | q | r$ liefern zwei Projectivitäten, welche die gegebene Reciprocität erzeugen. *Wir erhalten so ∞^4 Paare von Projectivitäten, welche das Verlangte leisten; wir erhalten aber damit auch alle Paare von Projectivitäten dieser Art.* Denn erzeugt die Projectivität $F(xu) = 0$ mit einer anderen die Reciprocität $f(xy) = 0$, in welcher x und u homologe Elemente sind, so steht u zu x in reciproker, x zu x' oder $F(xu) = 0$ in singulärer collinearer, also u zu x' in einer solchen singulären reciproken Beziehung, welche die Form (1) hat. $F(xu) = 0$ setzt sich also aus $f(xy) = 0$ und jener singulären Reciprocität zusammen, ist also in unserem Netze von Projectivitäten (2) enthalten, w. z. b. w.

Zu demselben Resultate führt uns folgende mehr mit unseren Ausführungen in § 2 im Zusammenhange stehende Ueberlegung: *)

Dem Punkte p entspricht in der gegebenen Reciprocität die Gerade $f(p)_1 | f(p)_2 | f(p)_3$ oder π, dem Punkte p' die Gerade $f(p')_1 | f(p')_2 | f(p')_3$

*) Die vorhergehenden Betrachtungen lassen sich besonders einfach auf den Raum ausdehnen, wenn es sich nämlich darum handelt eine räumliche Reciprocität durch drei räumliche Collineationen zu erzeugen. Es lässt sich dann ein System von ∞^5 (theils singulären, theils eigentlichen) Collineationen angeben, welche zu je dreien die Reciprocität erzeugen.

oder π'. Entspricht in derselben ausserdem dem Punkte a die Gerade α, dem Punkte b die Gerade β, wo weder a noch b auf pp' liegt und die Gerade ab weder durch p noch durch p' geht, so suchen wir erstens die Projectivität $g(xu)=0$, welche den Geraden pa, pb, pp' von p die Punkte $\pi\alpha$, $\pi\beta$, $\pi\pi'$ auf π bez. zuordnet (5). Alsdann bestimmen wir eine zweite Projectivität $h(xu)=0$, welche den Geraden $p'a$, $p'b$, $p'p$ von p' die Punkte $\pi'\alpha$, $\pi'\beta$, $\pi'\pi$ auf π' bez. zuordnet. Diese beiden Projectivitäten $g(xu)=0$ und $h(xu)=0$ erzeugen aber eine Reciprocität (vgl. Art. 9), in welcher den Punkten a, b, p, p' bez. die Geraden α, β, π, π' entsprechen, die also mit der gegebenen identisch ist. Da wir die Punkte p und p' beliebig in der Ebene annehmen können, so erhalten wir, wie vorhin, ∞^4 Paare von solchen Projectivitäten; die mit $g(xu)=0$ bezeichnete Projectivität lautet aber

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} f(p)_1 & f(x)_1 & u_1 \\ f(p)_2 & f(x)_2 & u_2 \\ f(p)_3 & f(x)_3 & u_3 \end{vmatrix} = 0;$$

denn dies ist eine Projectivität p, π, welche dem Strahle px von p den Punkt πu auf π zuordnet, wo x und u homologe Elemente der Reciprocität $f(xy)=0$ sind. So kommen wir in der That wieder auf unser System (2), für $p=p'$ erhalten wir die Beziehung $h(xu)=0$ u. s. w.

Hieraus finden wir sofort das System von doppelt unendlich vielen Projectivitäten, welche paarweise unsere Reciprocität in der Weise erzeugen, welche in **13** zuletzt beschrieben wurde. Wir gehen einfach zum dualen Falle über, indem wir für $f(xy)$ die Form $\varphi(uv)$ nehmen, wobei durchweg Punkt- und Liniencoordinaten zu vertauschen sind. Wir erhalten somit das System

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} \varphi(\pi)_1 & \varphi(u)_1 & x_1 \\ \varphi(\pi)_2 & \varphi(u)_2 & x_2 \\ \varphi(\pi)_3 & \varphi(u)_3 & x_3 \end{vmatrix} = 0$$

von Projectivitäten der gesuchten Art. Also:

Um eine gegebene Reciprocität $f(xy)=0$ auf jede mögliche Weise durch Paare von Projectivitäten zu erzeugen, bilde man die Systeme $\sum \pm f(p)_1\, f(x)_2\, u_3$ und $\sum \pm \varphi(\pi)_1\, \varphi(u)_2\, u_3$ von je doppelt unendlich vielen zweitheiligen Formen. Irgend zwei Formen des ersten bez. des zweiten Systems liefern zwei bilineare Gleichungen, welche die gegebene Reciprocität in der einen oder in der anderen Weise darstellen.

15. Greifen wir zwei Projectivitäten $g(xu)=0$ und $h(xu)=0$ aus dem System (3) heraus, indem wir $p=p$ und $p=p'$ nehmen, so besteht nach **9** die Gleichung

$$\sum \pm y_1\, g(x)_2\, h(x)_3 = \text{Const.}\, (pp'x)\, f(xy),$$

wo $g(x)_i = \frac{\partial g(xu)}{\partial u_i}$ u. s. w. gesetzt wurde. Indem wir in bekannter Weise die Constante bestimmen, erhalten wir die Identität;

$$(5)\quad \begin{vmatrix} y_1 & f(p)_2 f(x)_3 - f(p)_3 f(x)_2 & f(p')_2 f(x)_3 - f(p')_3 f(x)_2 \\ y_2 & f(p)_3 f(x)_1 - f(p)_1 f(x)_3 & f(p')_3 f(x)_1 - f(p')_1 f(x)_3 \\ y_3 & f(p)_1 f(x)_2 - f(p)_2 f(x)_1 & f(p')_1 f(x)_2 - f(p')_2 f(x)_1 \end{vmatrix} = \Delta (pp'x) f(xy);$$

die Identität

$$(6)\quad \begin{vmatrix} p_1 & x_1 & \varphi_1(u) \\ p_2 & x_2 & \varphi_2(u) \\ p_3 & x_3 & \varphi_3(u) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f(p)_1 & f(x)_1 & u_1 \\ f(p)_2 & f(x)_2 & u_2 \\ f(p)_3 & f(x)_3 & u_3 \end{vmatrix},$$

die sich leicht direct ableiten lässt, führt weiter mit Rücksicht auf die Ausführungen in 9 zu der folgenden:

$$(7)\quad \begin{vmatrix} u_1 & p_2\varphi_3(v) - p_3\varphi_2(v) & p_2'\varphi_3(v) - p_3'\varphi_2(v) \\ u_2 & p_3\varphi_1(v) - p_1\varphi_3(v) & p_3'\varphi_1(v) - p_1'\varphi_3(v) \\ u_3 & p_1\varphi_2(v) - p_2\varphi_1(v) & p_1'\varphi_2(v) - p_2'\varphi_1(v) \end{vmatrix} = (\pi\pi' v)\, \varphi(uv),$$

wo

$$\pi_i = f(p)_i, \quad \pi_i' = f(p')_i$$

gesetzt wurde.

Weitere Identitäten erhält man, indem man von der Erzeugung unserer Reciprocität durch zwei Projectivitäten des Systems (4) ausgeht. Alle diese Identitäten lassen sich aber direct aus (5) herleiten; auch die Identität (7) erhält man aus (5), indem man daselbst $y_i = u_i$, $x_i = v_i$, $a_{ik} = \alpha_{ki}$ nimmt, also für $f(xy)$ $\varphi(uv)$ schreibt, wobei zu berücksichtigen ist, dass für Δ jetzt Δ^2 zu nehmen ist, da

$$\det \varphi(uv) = \Delta^2$$

ist.

Da sich umgekehrt, aus der Identität (5) (und den aus ihr sich ergebenden weiteren Identitäten) Alles, was wir über die Erzeugung einer gegebenen Reciprocität gesagt haben, direct ablesen lässt, so wird eine rein algebraische Herleitung derselben nicht unangebracht sein.

Zu dem Ende betrachten wir die Determinante

$$D_1 = \begin{vmatrix} f(p)_1 & f(p')_1 & f(x)_1 \\ f(p)_2 & f(p')_2 & f(x)_2 \\ f(p)_3 & f(p')_3 & f(x)_3 \end{vmatrix} = \Delta (pp'x),$$

bezeichnen adj. $f(p)_i$ in vorstehendem System mit $F(p)_i$ u. s. w. und bilden die neue Determinante

$$D_2 = \begin{vmatrix} F(p)_1 & F(p')_1 & F(x)_1 \\ F(p)_2 & F(p')_2 & F(x)_2 \\ F(p)_3 & F(p')_3 & F(x)_3 \end{vmatrix}.$$

Alsdann ist für das neue System

$$P_i = \operatorname{adj} F(x)_i = D_1 f(x)_i = \Delta(pp'x) f(x)_i,$$

also hat die in (5) links stehende Determinante den Werth

$$\sum y_i P_i = \Delta(pp'x) \sum y_i f(x)_i = \Delta(pp'x) f(xy),$$

w. z. b. w.

Osthofen, im August 1892.

Ueber die Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit.

Von

W. Stekloff in Charkow.

(Auszug aus einem Schreiben an die Redaction der Annalen).

In der berühmten Abhandlung „Ueber die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit", die im III. Bande dieser Annalen abgedruckt ist, löst Clebsch unter Anderem folgende Aufgabe:

Man soll die Bedingungen finden, unter denen die Gleichungen der Bewegung eines festen Körpers in einer idealen homogenen incompressibeln Flüssigkeit ausser den drei Kirchhoff'schen Integralen ein viertes ganzes homogenes Integral der zweiten Ordnung zulassen und zeigt, dass dies eintritt, wenn die doppelte lebendige Kraft des Körpers den Ausdruck hat

$$2T = \mathop{\mathrm{S}} a_1 x_1^2 + \mathop{\mathrm{S}} b_1 y_1^2,$$

wo das Zeichen $\mathop{\mathrm{S}}$ die Summe der drei Glieder bezeichnet, die man aus dem angegebenen durch cyklische Vertauschung der Indices 1, 2, 3 erhält, vorausgesetzt, dass unter den Coefficienten a_i, $b_i (i = 1, 2, 3)$ die Relation besteht

$$\mathop{\mathrm{S}} \frac{a_2 - a_3}{b_1} = 0.$$

x_i, y_i $(i = 1, 2, 3)$ bezeichnen die Componentensummen und die Drehungsmomente der impulsiven Kräfte durch die in jedem Augenblick dem ruhenden Körper seine wirkliche Bewegung mitgetheilt werden kann.

Aber der von Clebsch angegebene Fall ist nicht der einzige.

Es ist nicht schwer, sich von der Richtigkeit des folgenden Satzes zu überzeugen.

Wenn in den Gleichungen der Bewegung

$$2T = \mathop{\mathrm{S}} a_1 x_1^2 + 2\sigma \mathop{\mathrm{S}} b_2 b_3 x_1 y_1 + \mathop{\mathrm{S}} b_1 y_1^2$$

ist und

$$a_1 = \sigma^2 b_1 (b_2^2 + b_3^2),$$
$$a_2 = \sigma^2 b_2 (b_3^2 + b_1^2),$$
$$a_3 = \sigma^2 b_3 (b_1^2 + b_2^2),$$

so ist ein viertes Integral

$$\sigma^2 \mathbf{S}\, b_1 (b_1 - 2b_2 - 2b_3) x_1^2 + 2\sigma \mathbf{S}\, b_1 x_1 y_1 - \mathbf{S}\, y_1^2 = \text{const.}$$

und das Problem lässt sich durch Quadraturen lösen.

Der hier bezeichnete Fall unterscheidet sich wesentlich von dem Fall von Clebsch und ist von ihm nicht bemerkt worden, weil Clebsch in seinen Untersuchungen stillschweigend die Annahme macht, dass die von ihm mit $\varkappa$ bezeichnete Constante der Null gleich ist. Ist diese Constante von Null verschieden, so erhält man den von mir angegebenen Fall. Dieser und der von Clebsch gefundene sind aber die einzigen, bei welchen die Gleichungen der Bewegung eines festen Körpers in der Flüssigkeit ein viertes homogenes Integral der zweiten Ordnung zulassen.

Bemerkungen zu der Abhandlung des Herrn M. Réthy über „Endlich-gleiche Flächen“

(diese Annalen Bd. 38, p. 405—428).

Von

H. Dobriner in Frankfurt a./M.

In der Geometrie ist Gleichheit eindeutig durch Congruenz definirt: zwei Linien, Flächen oder Körper sind gleich, wenn sie aus congruenten Stücken bestehen. Desshalb haben die Axiome der Gleichheit in der Geometrie eine andere Bedeutung als in der Arithmetik. In dieser sind sie wesentlich Definitionen, in der Geometrie nehmen sie den Charakter von Lehrsätzen an, von denen zu entscheiden ist, ob und in wie weit sie beweisbar sind.

Herr Réthy hat jüngst die diese Fragen berührenden Untersuchungen von Wolfgang Bolyai wieder aufgenommen und seine Ergebnisse im 38. Bande dieser Annalen (p. 405—428) veröffentlicht.

Bolyai stellt in dem Bestreben, die Beweisbarkeit des Axiom's

A) „*Gleiches von Gleichem giebt Gleiches,*“

in seiner Anwendung auf gleiche ebene Flächen zu prüfen, den Hilfssatz

B) „*Congruentes von Congruentem giebt Gleiches*,“

voran und beweist die beiden Sätze 2 und 3 (p. 405), in die B) zerlegt werden kann.

Herr Réthy bezeichnet (p. 405) Bolyai's Beweis des Satzes 2 als unzureichend, weil „seine Construction in fast ebenso vielen Fällen zu einer endlichen als unendlichen Anzahl gegenseitig congruenter Stücke der Restflächen“ führt. Die nothwendige Abänderung und Ergänzung des Bolyai'schen Beweises verlange die „Einführung des gegenseitigen Drehungscentrums resp. der Drehungsaxe der beiden gegebenen congruenten Flächen“ (p. 406) und ihre Zerlegung durch zweckmässig angebrachte Querschnitte.

Ich werde zeigen, dass auch der Beweis des Herrn Réthy den Forderungen der Strenge nicht genügt. Die Constructionen, die er

in Kürze in der Einleitung, ausführlich bei der Auflösung der Aufgaben 4 und 5 (p. 420—421) beschreibt, führen im Allgemeinen ebenfalls zu einer unendlichen Zerstückelung der Restflächen. Sie genügen deshalb auch nicht zum Beweise des an die Stelle des Axioms A tretenden Lehrsatzes (7. p. 411):

C) „Schneidet man aus zwei endlich-gleichen Flächensystemen endlich-gleiche Systeme heraus, so sind die beiden Restsysteme endlich-gleich.“

1.

Von wesentlicher Bedeutung ist nur die Behandlung der Aufgabe 4; das Problem 5 lässt sich ohne Mühe auf das vorhergehende zurückführen.

Aus den besonderen Annahmen über die congruenten Flächen A und B, mit denen sich 4 beschäftigt, geht hervor, dass ihr gemeinsames Gebiet aus zwei getrennten Systemen K_1 und K_2 besteht. Setzt man zunächst nur einen Zusammenhang der Flächen in K_1 voraus, so gelingt es, die Reste $r = A - K_1$ und $\varrho = B - K_1$ in eine endliche Zahl paarweise congruenter Stücke zu zerfällen:

$$r = S_1 + S_2 + \cdots + S_i + \cdots + S_m,$$
$$\varrho = T_1 + T_2 + \cdots + T_i + \cdots + T_m \quad (S_i \cong T_i).$$

Nach der Wiederherstellung des Zusammenhangs in K_2 entsteht die Aufgabe, die nicht gemeinsamen Theile der endlich-gleichen Flächen r und ϱ ebenfalls als endlich-gleich nachzuweisen.

Haben S_i und T_i $(i = 1, 2, \ldots m)$ ein Stück K_{2i} gemeinsam, so können die Reste $S_i - K_{2i}$ und $T_i - K_{2i}$ in congruente Theile zerlegt werden, und dann braucht sich die Untersuchung nur auf solche Theile $s_1\, s_2 \ldots s_n$ und $t_1\, t_2 \ldots t_n$ zu erstrecken, deren Lage ein theilweises Zusammenfallen zweier entsprechenden Stücke (s_i und t_i) ausschliesst.

Hingegen möge, — wenn i einen bestimmten, zunächst festzuhaltenden Index bedeutet, — s_i mit

die Stücke $\quad t_1 \ldots\ldots\ldots t_{i-1}, \qquad t_{i+1} \ldots\ldots\ldots t_n$

$$s_i^1 \equiv t_1^i \ldots s_i^{i-1} \equiv t_{i-1}^i, \quad s_i^{i+1} \equiv t_{i+1}^i \ldots s_i^n \equiv t_n^i$$

gemein haben und überdies noch das Stück σ_i^0 besitzen; ferner sei τ_h^i das Stück, das von t_h übrig bleibt, wenn man t_h^i fortnimmt. Dann bestehen die Zerlegungen

$$s_i \equiv \sigma_i^0 + s_i^1 + s_i^2 + \cdots + s_i^{i-1} + s_i^{i+1} + \cdots + s_i^n$$

und

$$t_h \equiv t_h^i + \tau_h^i \quad (h = 1, 2 \ldots i-1, i+1, \ldots n).$$

Da nun $t_i \cong s_i$, $s_h \cong t_h$ und $s_i^h \cong t_h^i$ ist, so werden auch folgende Zerlegungen möglich und völlig bestimmt sein:

$$t_i \equiv \tau_i^0 + t_i^1 + t_i^2 + \cdots + t_i^{i-1} + t_i^{i+1} + \cdots + t_i^n,$$
$$s_h \equiv s_h^i + \sigma_h^i,$$
$$[\tau_i^0 \cong \sigma_i^0;\quad t_i^h \cong s_i^h \equiv t_h^i \cong s_h^i;\quad \sigma_h^i \cong \tau_h^i],$$
$$(h = 1, 2 \ldots i-1, i+1 \ldots n),$$

so dass sich die Flächen r und ϱ so darstellen:

$$r \equiv \sigma_i^0 + \sum_h s_i^h + \sum_h s_h^i + \sum_h \sigma_h^i;$$

$$\varrho \equiv \tau_i^0 + \sum_h t_i^h + \sum_h t_h^i + \sum_h \tau_h^i.$$

Nach Weglassung der gemeinsamen Theile $\sum s_i^h$ und $\sum t_h^i$ bleiben von r und ϱ Gebiete r' und ϱ' übrig, die sich folgendermassen aus paarweise congruenten Stücken zusammensetzen:

$$r' \equiv \sigma_i^0 + \sum_h \sigma_h^i + \sum_h s_h^i,$$

$$\varrho' \equiv \tau_i^0 + \sum_h \tau_h^i + \sum_h t_i^h.$$

Der durch dieses Verfahren erzielte Vortheil besteht in der Absonderung eines Theiles σ_i^0 der Fläche r, welcher ganz ausserhalb der Fläche ϱ liegt. Man kann nun dieses Verfahren wiederholen, indem man statt s_i ein anderes Stück aus r, also — wegen der soeben bewirkten neuen Zerlegung — eins der Stücke σ_h^i und s_h^i behandelt, und wird wiederum ein Element finden, das ganz ausserhalb ϱ liegt.

Damit ist jedoch keineswegs — wie Herr Réthy behauptet (p. 421) — bewiesen, dass wir durch Berücksichtigung sämmtlicher zu r gehörigen Stücke „die vorgelegte Aufgabe in einer endlichen Zahl von Schritten" lösen. Denn diese Behauptung wäre nur gerechtfertigt, wenn sich nach jedem Schritte die Zahl der zu berücksichtigenden Theile verminderte und schliesslich in Null überginge. Diess braucht aber im Allgemeinen nicht der Fall zu sein; die Anzahl der Theile (σ_h^i und s_h^i) kann vielmehr nach der Ausscheidung von σ_i^0 beträchtlich grösser sein als zuvor. Auch darf man nicht mehr annehmen, dass die correspondirenden Theile s_h^i und t_i^h von gemeinsamen Stücken frei seien. Denn von den Gebieten (s_h und t_i), denen sie ursprünglich angehörten, war nicht vorausgesetzt, dass sie überall getrennt lägen. Im Allgemeinen hätte man also, um das vorhin be-

schriebene Verfahren wiederholen zu können, erst durch Ausscheidung der den s_h^i und t_i^h etwa gemeinsamen Stücken einen ähnlichen Uebergang zu machen, wie vorher von den S, T zu den s, t. Diess könnte wiederum eine Vermehrung der Theile, die man in der Folge zu berücksichtigen hätte, bedingen.

Es bleibt mir nunmehr noch zu zeigen übrig, dass die von Herrn Réthy angegebene Construction in einem bestimmten Falle thatsächlich zu einer unendlichen Zerstücklung der Restflächen führt.

Die zu betrachtende Fläche A setzt sich aus $(n+1)$ Theilen $D_1 \dots D_n$ und d zusammen, die aussen durch Bogen eines Kreises mit dem Mittelpunkt O, und innen durch je zwei geradlinige Strecken begrenzt sind. Die Theile $D_1 D_i \dots D_n$ sind congruent; D_i besitzt als Grundlinie einen Bogen φ, der wohl n-mal, aber nicht $(n+1)$-mal in der Peripherie enthalten ist, und dessen Verhältniss zu 2π irrational ist. Der äussere Bogen von d ist $= 2\pi - n\varphi$, also kleiner als der zu D_i gehörige Bogen, dagegen sind die beiden Winkel zwischen den geradlinigen Strecken und dem Bogen in d dieselben wie in D_i.

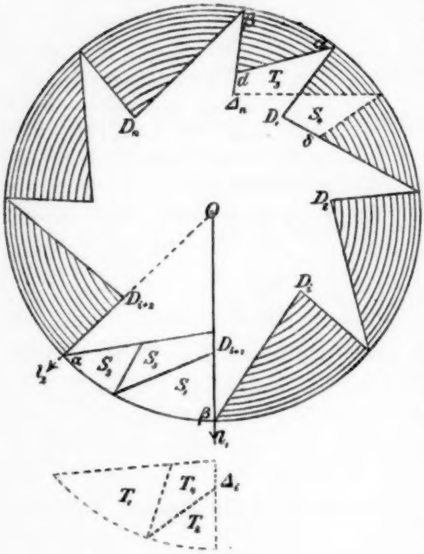


Fig. 1.

Die zweite Fläche B sei A congruent und komme mit ihr zur Deckung, wenn man sie um O um den Winkel φ dreht. Bezeichnet man mit $\Delta_1 \dots \Delta_n$ und δ die Theile von B, so erkennt man leicht, dass

$$\Delta_1 \dots \Delta_{n-1}$$

von

$$D_2 \dots D_n$$

ganz bedeckt werden, dass aber von Δ_n ein viereckiges Stück T_3 und von D_1 das Viereck S_4 übrig bleiben.

Um nun diese nicht gemeinsamen Theile von A und B in eine endliche Zahl congruenter Theile zu zerlegen, habe ich (nach Réthy) zuerst von O aus durch die Ringfläche A einen Querschnitt l_1 bis an

die äussere Begrenzung zu ziehen und den entsprechenden Querschnitt l_2 in B zu suchen. Trifft l_1 die Peripherie in dem Punkte zwischen D_i und D_{i+1}, so geht l_2 zwischen D_{i+1} und D_{i+2} hindurch. In dem einen Winkelraum zwischen l_1 und l_2 kommt Δ_i mit D_{i+1} zur Deckung.

Den dadurch bewirkten Zusammenhang der beiden Flächen A und B hebe ich zunächst auf (— etwa indem ich Δ_i aus der Ebene herausbiege —) und zerlege die aus Δ_i und T_3 auf der einen Seite und aus D_{i+1} und S_4 auf der anderen Seite bestehenden Restflächen r und ϱ in congruente Stücke. Diess erreiche ich durch wiederholte Drehungen um die Winkelgrösse φ in beiderlei Sinne (p. 415) und erhalte schliesslich vier paarweise congruente Stücke,

$$S_1 T_1,\ S_2 T_2,\ S_3 T_3 \text{ und } S_4 T_4.$$

Die Zeichnungen gestalten sich wesentlich einfacher, wenn man annimmt, dass der Bogen φ im Verhältniss zur ganzen Peripherie unendlich klein ist, also als eine geradlinige Strecke angesehen werden kann. Dann sind S_1 und S_2 zwei Dreiecke die mit dem Parallelogramm S_3 das Dreieck $lmn = D_{i+1}$ bilden, während sich das congruente Dreieck $\lambda\mu\nu = \Delta_i$ aus dem Parallelogramm T_4 und den Dreiecken T_1 und T_2 zusammensetzt. Die folgenden Betrachtungen sind aber ohne Einschränkung auf die ursprünglichen, zum Theil krummlinig begrenzten Flächen r und ϱ anwendbar.

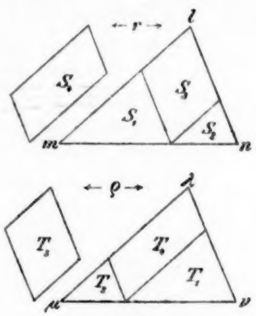


Fig 2.

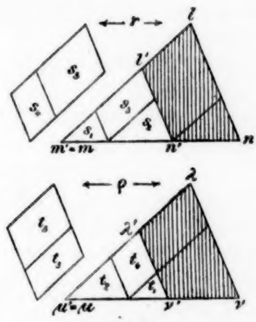


Fig. 3.

Stellt man den Zusammenhang von A und B in dem Winkelraum zwischen l_1 und l_2 wieder her, indem man lmn auf $\lambda\mu\nu$ legt, und scheidet zuerst die Stücke aus, welche T_1 und T_4 mit S_3 und S_2 gemein haben, so bleiben zur Untersuchung Flächen, die aus den Theilen $s_1 s_2 s_3 s_4 s_5$ und $t_1 t_2 t_3 t_4 t_5$ bestehen. Von diesen bilden wiederum $s_1 s_2 s_3$ und $t_1 t_2 t_3$ zwei in das gemeinsame Gebiet fallende congruente Dreiecke $l'm'n'$ und $\lambda'\mu'\nu'$. Das Verfahren kann dann von Neuem mit der Ausscheidung der Stücke beginnen, welche t_1 und t_4 mit s_2 und s_3

gemein haben. Man erkennt schon jetzt, dass auf diese Weise niemals ein Abschluss erreicht werden kann, vorausgesetzt, dass die Grundlinien von S_1 und S_2 incommensurabel sind. — [Dass an sich die Zerlegung der Ergänzungsparallelogramme T_3 und S_4 ohne Mühe ausführbar ist, darf ich wohl als bekannt voraussetzen.]

Die hier ausgeführten Operationen entsprechen einzeln völlig den Vorschriften des Herrn Réthy; nur sind bei der Ausscheidung immer diejenigen Theile zuerst berücksichtigt worden, die ganz ausserhalb der ihnen entsprechenden Theile liegen, während in den Ausführungen des Herrn Réthy zuerst von den Theilen S_i und T_i die Rede ist, die ein Stück K_{2i} gemein haben. —

Es lässt sich aber leicht zeigen, dass der processus in infinitum nicht durch diese Aenderung der Reihenfolge bedingt ist.

Beginnt man nach Fortlassung des Stückes, das S_1 und T_1 gemein haben, mit der Zerlegung ihrer nicht gemeinsamen Gebiete, so wird man an der Grundlinie in S_1 zwei Theile s_i und s_k finden, die auf der Grundlinie von T_2 stehen, und in T_1 die congruenten Theile t_i und t_k, die auf der Grundlinie von S_2 stehen; und zwar befindet sich t_i rechts von t_k, wenn s_i links von s_k liegt, und umgekehrt. — Zu wesentlich den gleichen Ergebnissen muss man stets gelangen, welcher Gestalt auch immer die Figuren S_1 und T_1 sein mögen, wenn nur 1) der Drehungsmittelpunkt ausserhalb S_1 und T_1 liegt, 2) je ein Stück des Grundkreises einen Theil der Begrenzung von S_1 und T_1 ausmacht, und 3) die auf dieser Grundlinie gemessene Verschiebung in einem irrationalen Verhältniss zu der ganzen Grundlinie steht.

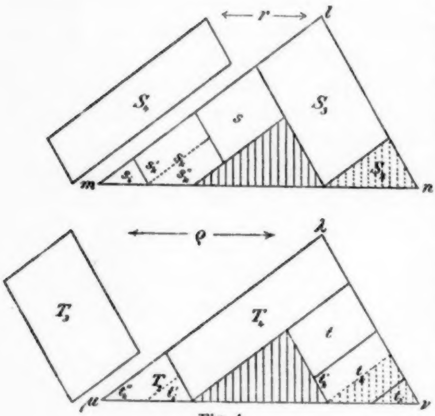


Fig. 4.

Scheidet man nun zuerst das Stück aus, das S_2 mit t_i und t_k gemein hat, so ist, um die Congruenz in der Zerlegung der Restflächen aufrecht zu erhalten, erforderlich, dass man T_2 in zwei Stücke t_i' und t_k'' zerfällt und s_k in zwei Stücke s_k' und s_k''. Dann tritt aber wiederum ein theilweises Zusammenfallen zweier correspondirender Theile ein, und zwar entweder von s_i und t_i' oder von s_k'' und t_k''. Der soeben durchgeführte Process muss deshalb von Neuem beginnen, und kann

zu keinem Abschluss führen, weil jedes der Paare s_i, t_i' und s_k'', t_k'' den drei vorhin angeführten Bedingungen genügt.

2.

Bei Réthy sind die beiden Flächen $A-K_1=r$ und $B-K_1=\varrho$ zwar endlich-gleiche Flächen besonderer Art: sie gehen in genau vorgezeichneter Weise aus den beiden congruenten Flächen A und B hervor. Da aber seine Construction von dieser Besonderheit niemals Notiz nimmt, so müsste sie auch für endlich-gleiche Flächen beliebiger Art gelten, also zu dem Schluss berechtigen:

D) *dass stets, wenn zwei endlich-gleiche Flächen ein Stück gemein haben, die Reste endlich-gleich sind.*

Auf diesen Satz liesse sich aber ein Beweis des Hauptsatzes C) gründen. Man hätte zunächst aus D — durch das von Herrn Réthy unter 7, p. 426 entwickelte Verfahren — den Satz abzuleiten:

E) „*Schneidet man aus zwei endlich-gleichen Flächen congruente Stücke heraus, so sind die Reste endlich-gleich*"

und würde schliesslich durch wiederholte Anwendung desselben zur Verification der in C) enthaltenen Behauptung gelangen.

Gäbe also die Construction 4 in jedem Falle die gewünschte endliche Zerlegung, so könnte man auf sie den Beweis von C) zurückführen, und wäre mit Herrn Réthy (p. 427) zu behaupten berechtigt, *dass der Satz* C) *durch wiederholte Transpositionen bewiesen werden könne.*

Ob Herr Réthy bei dieser Behauptung den soeben angedeuteten Zusammenhang mit 4 im Sinne gehabt hat, vermag ich nicht zu entscheiden, da er sie ohne jede Begründung aufstellt.

Jedenfalls können die Sätze D), E) und C) auf der für § 2 angenommenen Grundlage noch nicht als bewiesen gelten, weil, wie ich gezeigt habe, die Réthy'sche Construction zu 4 unter Umständen eine unendliche Zerlegung liefert. Auch auf anderen Wegen vermochte ich nicht, befriedigende Beweise für diese Sätze zu finden, trotzdem es mir gelungen ist, die Aufgabe 4 durch eine einwurfsfreie Construction zu lösen und damit den Satz B) in aller Strenge zu beweisen. Diesen Beweis gedenke ich in einem zweiten Artikel zu veröffentlichen.

Der Beweis, den Herr Réthy im ersten Paragraphen seiner Arbeit giebt, kann meines Erachtens — so interessant er an sich ist — nicht befriedigen, weil er sich auf eine Voraussetzung stützt, über die die vorliegende Untersuchung erst Klarheit verschaffen soll.

Wäre nämlich C) in der in § 2 erstrebten Weise bewiesen, so würde sich aus ihm der folgende wichtige Satz ergeben:

F) *Sind A und B zwei endlich-gleiche Flächen, d. h. giebt es eine Zerlegung Z_1, welche A in n Stücke $a_1, a_2 \ldots a_n$ und B in n entsprechend congruente Stücke $b_1, b_2 \ldots b_n$ $(a_i \cong b_i)$ theilt, so kann es keine zweite Zerlegung Z_2 geben, welche A in μ Stücke $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\mu$ und B in ν Stücke $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_\nu$ von der gegenseitigen Beziehung theilt, dass wohl jedem α ein congruentes β, aber nicht jedem β ein congruentes α entspricht.*

$$[\nu > \mu; \quad \alpha_i \cong \beta_i \quad (i = 1, 2, \ldots \mu)].$$

Denn nach C) müssten, wenn man von A das System $(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\mu)$ und von B das System $(\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_\mu)$ abzieht, endlich-gleiche Reste übrig bleiben, was aber unmöglich ist, da

$$A - (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\mu) \equiv 0$$

und

$$B - (\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_\mu) \equiv (\beta_{\mu+1} + \beta_{\mu+2} + \cdots + \beta_\nu)$$

ist.

Dieser Satz, der in folgender kurzen Fassung leichter zu übersehen ist:

F*) *Erweisen sich zwei Flächen bei einer Zerlegung als endlich-gleich, so kann es keine zweite Zerlegung geben, die sie als ungleiche Flächen erscheinen liesse,*

ist es, den der erste Réthy'sche Beweis als Axiom voraussetzt.

Um diess erkennen zu lassen, will ich kurz seinen Gedankengang wiedergeben.

Bezeichnet man mit ε die Bedingung, dass sich die Begrenzung zweier Flächensysteme A und B nur aus drei Arten von Linien zusammensetzt, nämlich 1) aus geradlinigen Strecken, 2) aus solchen krummlinigen Theilen, die auf *demselben* System sowohl mit positivem als mit negativem Krümmungssinn vorkommen, und 3) aus einer endlichen Anzahl paarweise congruenter Curven, deren Krümmungssinn von dem Inneren der Flächen aus gerechnet in *beiden* Systemen der gleiche ist, so beweist Herr Réthy zunächst den

Satz 5, *p.* 410: „*Wenn die Begrenzung zweier Flächensysteme A und B der Bedingung ε genügt, so lassen sich A und B nach Absonderung von endlich-gleichen Systemen A_1 und B_1 in geradlinige Polygone P_1 und P_2 verwandeln*“:

$$A = (A_1 + P_1),$$
$$B = (B_1 + P_2),$$
$$A_1 = B_1;$$

dann folgt der

Satz 6, *p.* 411; „*Schneidet man aus zwei congruenten Flächen congruente Stücke heraus, so genügen die Begrenzungen der Reste der Bedingung ε*“,

und schliesslich der

Satz 7, *p.* 411: „*Schneidet man aus zwei endlich-gleichen Flächensystemen* A *und* B *endlich-gleiche Systeme von Stücken* A_0 *und* B_0 *heraus, so genügen die Begrenzungen der Reste der Bedingung* ε".

Mit Berücksichtigung von 5) folgt hieraus:

$$A = A_0 + A_1 + P_1,$$
$$B = B_0 + B_1 + P_2,$$
$$(A = B;\quad A_0 = B_0;\quad A_1 = B_1).$$

Nun lässt sich — auch ohne Zuziehung des Parallelenaxioms — beweisen, dass sich jedes geradlinig begrenzte Polygon durch eine endliche Zahl von Transpositionen in ein Dreieck verwandeln lässt, und zwar in ein Dreieck, das noch zwei Bedingungen erfüllen kann, also etwa in ein rechtwinkliges Dreieck mit der Kathete g. Man kann also für P_1 das rechtwinklige Dreieck Δ_1 mit den Katheten g, h_1 und für P_2 das Dreieck Δ_2 mit den Katheten g, h_2 setzen und hat:

$$A = A_0 + A_1 + \Delta_1,$$
$$B = B_0 + B_1 + \Delta_2.$$

Schliesst man nun, dass wegen $A = B$, $A_0 = B_0$ und $A_1 = B_1$ nothwendiger Weise auch $\Delta_1 \cong \Delta_2$ sein müsse, so hat man implicite von dem Satze F*) Gebrauch gemacht.

Wollte man sich enger an Réthy anschliessen, so hätte man die Polygone P_1 und P_2 in zwei Parallelogramme zu verwandeln und diese durch die Construction 3, p. 407/8 in 6 Theile $1, 2, \ldots 6$ und $1', 2' \ldots 6'$ zu zerlegen. Von diesen würden sich die Paare $1, 1'$, $2, 2'$ $3, 3'$ und $6, 6'$ als congruent erweisen, und man hätte:

$$A = A_0 + A_1 + 1 + 2 + 3 + 6 + (4 + 5),$$
$$B = B_0 + B_1 + 1' + 2' + 3' + 6' + (4' + 5').$$

Wenn nun Herr Réthy (p. 408 letzter Absatz) schliesst, dass die Parallelogramme $(4 + 5)$ und $(4' + 5')$, welche gleiche Grundlinien haben, auch nothwendig gleiche Höhen besitzen müssen, so stützt er sich dabei auf den erst zu beweisenden Satz F*).

3.

Zum Schluss sei mir gestattet nachzuweisen, dass die Construction, welche ein geradliniges $(n-1)$-Eck in ein n-Eck überführt, vom Parallelenaxiom unabhängig ist. Dazu braucht man einzig die Aufgabe zu behandeln: ein Dreieck ABC in ein anderes mit gleicher Grundlinie BC so zu verwandeln, dass die Spitze auf einer gegebenen Geraden Cx liegt. — Man verbindet D, die Mitte von AB, mit E, der Mitte von AC, bestimmt F auf Cx und macht $GF = FC$;

dann ist GBC das gesuchte Dreieck. Zum Beweise macht man $ID = DH$ und $FK = FE$ und verbindet J und K mit denjenigen Dreiecksecken (A und G), welche mit dem Schnittpunkt L der Linien AC und GB auf einer Seite von JK liegen. Dann folgt aus der Congruenz von GFK und FEC, dass $GK = EC = EA$ und $\sphericalangle K = E$ ist, ferner aus der Congruenz von AJD und DBH, dass $\sphericalangle J = H$ ist. Mithin sind auch die Dreiecke AJE und GHK con-

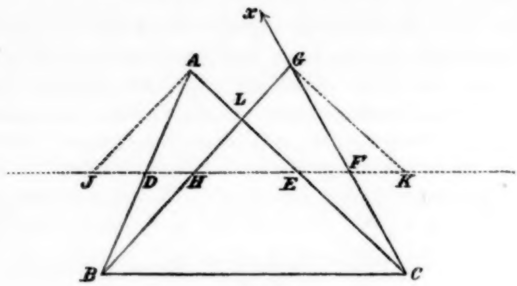


Fig. 5.

gruent. Da diese gegen einander längs der Geraden JK verschoben sind, so lassen sich ihre nicht gemeinsamen Theile $JALH$ und $LGKE$ in eine endliche Zahl paarweise congruenter Stücke zerlegen; also $JALH = LGKE$. Aus $JALH = ABL$ und $LGKE = LGC$ folgt $ABL = LGC$ und schliesslich $ABC = GBC$.

Der Satz: „Congruentes von Congruentem giebt Gleiches" in seiner Anwendung auf ebene Flächen.

Von

H. Dobriner in Frankfurt a./M.

F sei ein ebenes Gebiet von endlicher Ausdehnung und beliebiger Begrenzung. Die Endlichkeit ist durch die Eigenschaft definirt, dass die gerade Verbindungslinie zweier dem Gebiete von F angehörenden Punkte eine angebbare Länge nicht überschreitet, welche Punkte man auch in F wählen mag. — F kann ein einfach oder mehrfach zusammenhängendes Stück sein, oder aus einer endlichen Zahl einfach oder mehrfach zusammenhängender Stücke bestehen.

Befindet sich ein Gebiet Φ, welches durch Verschiebung oder Wendung mit F zur Deckung gebracht werden kann, in solcher Lage, dass es mit F ein Gebiet G gemeinsam hat, so besteht der Satz:

1) *Die nichtgemeinsamen Gebiete*, f *in* F *und* φ *in* Φ, *lassen sich in eine endliche Zahl paarweise congruenter Stücke zerlegen:*

$$f \equiv f_1 + f_2 + \cdots + f_n,$$
$$\varphi \equiv \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n,$$
$$f_i \cong \varphi_i.$$

Beim Beweise hat man zu unterscheiden, ob F und Φ gleichwendig oder gegenwendig congruent sind. Im ersten Falle (A) besitzen sie einen Situationspunkt M von der Eigenschaft, dass man nur eine der Flächen um diesen Punkt zu drehen braucht, um sie mit der andern zur Deckung zu bringen. Der Betrag dieser Drehung sei gleich α für F und gleich $-\alpha$ für Φ. — Man sagt, M liege im Unendlichen (Fall A_0) wenn die Congruenz bereits dadurch herbeigeführt wird, dass man die eine der Flächen längs einer Geraden g verschiebt. Der Betrag der erforderlichen Verschiebung sei d für F und $-d$ für Φ. — Sind die Flächen gegenwendig congruent (Fall B), so muss eine von ihnen zuerst eine halbe Wendung um eine bestimmte Gerade g und dann eine Verschiebung längs derselben machen, um mit der andern zur

Deckung zu kommen. — Der Abschnitt C beschäftigt sich mit dem Beweise des Hauptsatzes:

2) *Schneidet man aus congruenten Flächen congruente Stücke heraus, so lassen sich die Reste in eine endliche Zahl paarweise congruente Theile zerlegen.*

Die Fälle, in denen sich meine Behandlung wesentlich mit der des Herrn Réthy deckt, sind durch den Hinweis auf die in Betracht kommenden Stellen seiner Arbeit über endlich-gleiche Flächen (diese Annalen Bd. 38, p. 405—428) hervorgehoben.

A_0) Die Flächen kommen durch Verschiebung zur Deckung.*)

Man verschiebe F längs der Geraden g der Reihe nach um d, $2d$, $3d$, ... und bezeichne das ebene System in den neuen Lagen mit $F_1, F_2, F_3 \ldots F_i \ldots$. Dann wird man wegen der Endlichkeit von F schliesslich zu einem F_i gelangen müssen, das ganz ausserhalb F gelegen ist. Ist $F_{\nu-1}$ das erste Gebiet dieser Eigenschaft, so wird F_ν mit $F_1 \equiv \Phi$ ebenfalls kein Gebiet mehr gemeinsam haben. — Schafft man sich ferner durch die Verschiebungen um $-d$, $-2d$, $-3d, \ldots$ die Gebiete $F_{-1}, F_{-2}, \ldots F_{-(\nu-1)}$, so ist $F_{-(\nu-1)}$ in ihrer Reihe das erste, das F nicht deckt, und $F_{-(\nu-2)}$ das erste, das $F_1 \equiv \Phi$ nicht deckt.

Verzeichnet man nun in F die Umrisse von

$$F_{-(\nu-1)},\ F_{-(\nu-2)}, \ldots F_{-1},\ F_1,\ F_2, \ldots F_{\nu-1},$$

soweit sie in F hineinfallen, ferner in Φ die Umrisse von

$$F_{-(\nu-2)},\ F_{-(\nu-3)}, \ldots F_{-1},\ F,\ F_2, \ldots F_\nu,$$

soweit sie in Φ hineinragen, so werden beide Gebiete in gleich viele paarweise congruente Theile zerlegt:

$$F = f_1 + f_2 + \cdots f_m,$$
$$\Phi = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots \varphi_m,$$
$$f_i \cong \varphi_i,$$

da die erste Gruppe genau dieselbe Lage zu F hat wie die ihr congruente zweite Gruppe zu Φ.

Die Zahl der Theile ist sicherlich eine endliche, wenn wir die Voraussetzung machen, dass sich die Begrenzungen von F und Φ in jeder gegenseitigen Lage nur in einer endlichen Zahl von Punkten durchdringen. Man übersieht ferner leicht, dass die das gemeinsame Gebiet G füllenden Stücke φ_i ganz mit gewissen (ihnen nicht entsprechenden) Stücken f_k zusammenfallen müssen, so dass die Begrenzungen dieser φ_i keine Zerstücklung der f_k hervorrufen (und umgekehrt).

*) Vgl. Réthy p. 414—417.

Man kann nun die Zuordnung der Theile f_i und φ_i so abändern, dass sich in dem gemeinsamen Gebiete G die einander deckenden Theile entsprechen, dass hingegen einem Theile aus f auch ein Theil aus φ entspricht.

Ist nämlich f_h ein Stück aus dem nicht gemeinsamen Gebiete f, so kann das correspondirende Stück φ_h entweder zu φ oder zu G gehören. Im ersten Falle entspricht die Zuordnung der gestellten Forderung. Im zweiten Falle muss φ_h auch ein Theil von F, also mit einem bestimmten f_k identisch sein. Liegt nun das correspondirende φ_k bereits ausserhalb des gemeinsamen Gebietes G, so kann man φ_k dem Theile f_h und φ_h dem Theile f_k zuordnen. Befindet sich hingegen φ_k noch in G, so muss es mit einem bestimmten f_l identisch sein, und es bleibt dann zu entscheiden, ob das correspondirende φ_l zu G gehört oder nicht. Da aber die Zahl der Theile überhaupt endlich ist, so muss man schliesslich auf ein in φ liegendes Stück φ_k kommen, das man dem Stück f_k zuordnen kann.

Sind (in geänderter Bezeichnung)

$$f_h\, f_h^1\, f_h^2 \ldots f_h^r \quad \text{resp.} \quad \varphi_h\, \varphi_h^1\, \varphi_h^2 \ldots \varphi_h^r$$

die Theile von F resp. Φ, auf die man im Verlaufe dieses Verfahrens stösst, so ist es ausgeschlossen, dass in derselben Gruppe zwei, etwa f_h^ν und $f_h^{\nu+\mu}$, identisch sind, und so das Verfahren zu einem cyklischen wird. Denn wegen $f_h^\nu \equiv \varphi_h^{(\nu-1)}$ und $f_h^{(\nu+\mu)} \equiv \varphi_h^{(\nu+\mu-1)}$ müsste dann auch $\varphi_h^{\nu-1} \equiv \varphi_h^{(\nu+\mu-1)}$ sein, und mithin, da $F \backsimeq \Phi$, auch $f_h^{\nu-1} \equiv f_h^{(\nu+\mu-1)}$ und schliesslich $f_h \equiv f_h^\mu$. Dies ist aber unmöglich, da f_h zu f und f_h^μ zu G gehört.

Hiermit ist bewiesen, dass jedem Theile von f ein congruenter Theil in φ entspricht.

A) Die Flächen kommen durch eine Drehung zur Deckung.

I.

Steht der Drehungswinkel α in einem rationalen Verhältniss zu 2π, so führt ein dem vorigen analoges Verfahren zur Zerlegung der Restflächen. — Ist $\alpha = 2m\pi | n$, so dreht man F um den Mittelpunkt M nach einander um die Winkel $\alpha, 2\alpha, \ldots (n-1)\alpha$ und verzeichnet die Umrisse der erhaltenen Figuren $F\, F_1 \ldots F_{(n-1)}$ sowohl in F als in $F_1 \equiv \Phi$. Dann schliesst man genau wie vorhin, dass die nicht gemeinsamen Gebiete von F und Φ in paarweise congruente Theile zerfallen.

II.*)

Ist das Verhältniss $\alpha : 2\pi$ irrational, so machen wir zunächst die Annahmen, dass man von dem Drehungsmittelpunkte M der beiden

*) Vgl. Réthy p. 414—417.

Systeme F und Φ längs einer Linie L in's Unendliche gelangen kann, ohne eins von ihnen zu durchqueren, und dass zweitens die Lücken von F und Φ, durch welche L führt, *einander wesentlich entsprechen.* — Der Sinn der letzten Voraussetzung wird durch folgende Bestimmung festgestellt:

Verbindet man zwei Punkte a und b in F durch eine Linie l, welche L nicht schneidet, so darf die entsprechende Linie λ, welche in Φ die entsprechenden Punkte α und β verbindet, gleichfalls die Linie L nicht schneiden, welche Punkte und welche Verbindung man auch immer wählen mag.

Dieser Fall unterscheidet sich nicht wesentlich von dem unter A_0 behandelten. Die Drehung um den Punkt M ist einer Verschiebung längs der Peripherie eines um M geschlagenen Kreises gleich zu achten. Während aber F bei einer wiederholten Verschiebung längs einer Geraden g schliesslich ganz aus seinem ursprünglichen Gebiete heraustritt, braucht die wiederholte Drehung dies Ergebniss nicht herbeizuführen. — Vergrössern wir aber das der Drehung zu Gebote stehende Feld, indem wir die Ebene zu einer vielblättrigen Windungsfläche umgestalten, so tritt an die Stelle der geschlossenen Peripherie eine Anzahl übereinander liegender, zu einer Spirale verbundener Kreisumfänge, längs deren F aus seinem ursprünglichen Gebiet hinausgeschoben werden kann.

Man legt die Ebene, welche F und Φ enthält, zwischen zwei andere Ebenen, durchschneidet die drei Ebenen längs der Geraden L und verbindet die Ränder der mittleren mit den nicht entsprechenden Rändern des oberen und des unteren Blattes. Dadurch erhält man eine Fläche von 3 Windungen, und es ist leicht, die Zahl der Windungen nach beiden Seiten nach Bedarf zu vermehren. — Wenn man dann F um die Winkel $\alpha, 2\alpha, \dots \nu\alpha, -\alpha, -2\alpha, \dots -(\nu-1)\alpha$ dreht, so gelangt man zu der Gruppe $F_1\, F_2 \dots F_\nu\, F_{-1}\, F_{-2} \dots F_{-(\nu-1)}$, in welcher $F_{(\nu-1)}$ und $F_{-(\nu-1)}$ die ersten Systeme sind, die ausserhalb F, und $F_{(\nu)}$, $F_{-(\nu-2)}$ die ersten Systeme, die ausserhalb $F_1 \equiv \Phi$ liegen. — Die gesuchte Zerlegung ergiebt sich (wie in A_0), wenn man in F und Φ die Contouren der übrigen Systeme verzeichnet.

III.

Es ist möglich, dass sich vom gegenseitigen Drehungsmittelpunkte M der beiden Flächen F und Φ mehrere, wesentlich verschiedene, einander nicht schneidende Linien $L_1\, L_2 \dots L_h$ ziehen lassen, auf denen man, ohne eins der beiden Systeme zu durchqueren, in's Unendliche gelangen kann, von denen aber keine der im vorigen Paragraphen festgehaltenen Bedingung genügt. Die Lücken von F und Φ,

durch welche L_i geht, würden sich also bei der Congruenz von F und Φ als nicht entsprechende Gebiete erweisen. Jedenfalls theilen die Linien L das System F in h Partialsysteme $X_1\, X_2 \ldots X_h$ und das System Φ in h Partialsysteme $\Xi_1'\, \Xi_2' \ldots \Xi_h'$. Die Bezeichnung sei so gewählt, dass X_1 und Ξ_1' in dem Winkelraum zwischen L_h und L_1 liegen, und X_i und Ξ_i' in dem Winkelraum zwischen L_{i-1} und L_i, ferner dass auf L_{i-1} zunächst L_i und dann L_{i+1} folgt, wenn man den Mittelpunkt M in einem bestimmten Sinne umkreist. — Nach der vorangestellten Einschränkung ist es ausgeschlossen, dass X_i und Ξ_i' entsprechende Gebiete von F und Φ sind, oder genauer gesagt, dass sie Gebiete darstellen, welche aufeinander fallen, wenn die ganzen Systeme F und Φ zur Deckung gebracht werden. Bezeichnet man mit Ξ_i das System aus Φ, das bei dieser Congruenz dem Systeme X_i correspondirt, so machen wir die Annahme, *dass die Gruppe* $\Xi_1'\Xi_2' \ldots \Xi_h'$ *mit der Gruppe* $\Xi_1\, \Xi_2 \ldots \Xi_h$ *identisch ist, dass also beide die gleichen Glieder, aber in verschiedener Reihenfolge enthalten.* Ist dann Ξ_1' identisch mit Ξ_k, so muss Ξ_2' mit Ξ_{k+1} identisch sein, oder allgemein

$$\begin{aligned}&(\Xi_1',\ \Xi_2' \ \ldots\ \Xi_{h-k+1}',\ \Xi_{h-k+2}' \ \ldots\ \Xi_h')\\ \equiv\ &(\Xi_k,\ \Xi_{k+1} \ldots \Xi_h,\qquad \Xi_1 \qquad \ldots\ \Xi_{k-1}).\end{aligned}$$

Die Systeme X_i und Ξ_i sollen nunmehr mit neuen Indices versehen werden und zwar nach folgendem Princip: Für den Index 1 setze man λ_1, λ_2 für k, λ_3 für den Index desjenigen Ξ, das mit $X_k \equiv X_{\lambda_2}$ in demselben Winkelraum (L_{k-1}, L_k) liegt, λ_4 für den Index desjenigen Ξ, das mit X_{λ_3} in einem Winkelraume liegt, u. s. f., und schliesslich λ_h für den Index $h - k + 2$. Dann kann ein theilweises Zusammenfallen folgender Partialsysteme stattfinden:

$$\begin{aligned}&\text{von } X_{\lambda_1}\ X_{\lambda_2}\ X_{\lambda_3} \ldots X_{\lambda_{h-1}}\ X_{\lambda_h} \text{ mit}\\ &\text{resp. } \Xi_{\lambda_2}\ \Xi_{\lambda_3}\ \Xi_{\lambda_4} \ldots \Xi_{\lambda_h}\quad \Xi_{\lambda_1}.\end{aligned}$$

Die Auftheilung ihrer nicht gemeinsamen Gebiete in paarweise congruente Stücke erfolgt nun vermittelst nachstehender Construction unter Benutzung von congruenten Hilfsgebieten

$$Y_{\lambda_1} \ldots Y_{\lambda_h}\ (Y_{\lambda_i} \cong X_{\lambda_i} \cong \Xi_{\lambda_i}).$$

Ihr Feld ist wiederum eine Fläche, die sich in einer hinreichenden Zahl von Blättern um einen Punkt N windet.

Man verzeichnet in einem der Blätter Y_{λ_1} und zwar so, dass es zu N dieselbe Lage hat wie ursprünglich X_{λ_1} zu M, dann legt man Y_{λ_2} auf Y_{λ_1}, so dass ihre gegenseitige Lage dieselbe wird wie die von Ξ_{λ_2} und X_{λ_1}, ferner Y_{λ_3} auf Y_{λ_2}, so dass ihre gegenseitige Lage dieselbe wird wie die von Ξ_{λ_3} und X_{λ_2} u. s. f., schliesslich Y_{λ_h} auf $Y_{\lambda_{h-1}}$, so dass ihre gegenseitige Lage dieselbe wird wie die von Ξ_{λ_h}

und $X_{\lambda_{h-1}}$. — Das auf diese Weise construirte Flächensystem soll das System S heissen. Seine Begrenzung setzt sich aus den Begrenzungen sämmtlicher Partialgebiete Y_{λ_i} zusammen.

Man drehe nun S um den Windungspunkt N so weit, bis Y_{λ_h} dieselbe Lage zu Y_{λ_1} erhält, wie sie in der ursprünglichen Ebene X_{λ_h} zu Ξ_{λ_1} hatte, und bezeichne das System in der neuen Lage mit S_1. Dann führt man, genau wie in II, die Drehung um den gleichen Betrag nochmals aus und erhält das System S_2; in gleicher Weise schafft man sich die Reihe $S_{-\nu}$, $S_{-(\nu-1)}$ ... S_{-1}, S_1 ... S_ν, deren letzte Glieder dadurch ausgezeichnet sind, dass sie mit S kein Flächenstück mehr gemeinschaftlich haben. Die Umrisse dieser S_i werden in S, so weit sie in dasselbe hineinragen, verzeichnet und bewirken eine Zerlegung desselben. Jeder seiner Bestandtheile Y_{λ_i} wird durch die Umrisse der übrigen Y_{λ_k} und durch die neu eingetragenen Linien in ganz bestimmter Weise in Theile zerlegt.

Kehrt man nun zu der ursprünglichen Ebene zurück und nimmt eine Zerlegung der Partialgebiete

$$X_{\lambda_1} \dots X_{\lambda_h} \quad \text{und} \quad \Xi_{\lambda_1} \dots \Xi_{\lambda}$$

nach dem Vorbilde der Zerlegung vor, die in den congruenten Gebieten $Y_{\lambda_1} \dots Y_{\lambda_h}$ vorliegt, so lässt sich beweisen, dass dann jedem Theile der X_λ, der nicht zugleich einem der Ξ_λ angehört, ein bestimmter Theil der Ξ_λ, der nicht zugleich einem der X_λ angehört, durch Congruenz entspricht, und umgekehrt. Da nämlich das Flächenpaar $(Y_{\lambda_i}, Y_{\lambda_{i+1}})$ in S dieselbe gegenseitige Lage hatte wie das Paar $(X_{\lambda_i}, \Xi_{\lambda_{i+1}})$, so wird in diesem die neu ausgeführte Theilung so beschaffen sein, dass in dem gemeinsamen Gebiete die Theilungslinien einander vollständig decken, und so das theilweise Uebereinanderliegen von X_{λ_i} und $\Xi_{\lambda_{i+1}}$ keine neuen Abgrenzungen hervorruft. Dies gilt von allen Paaren, selbst von X_{λ_h} und Ξ_{λ_1}, weil S so in S_1 übergeführt wurde, dass Y_{λ_h} zu Y_{λ_1} dieselbe Lage erhielt wie X_{λ_h} zu Ξ_{λ_1}.

Ist nun x ein Theil von X_{λ_1}, der nicht auch zu Ξ_{λ_1} gehört, so muss ein correspondirender (congruenter) Theil ξ in Ξ_{λ_1} vorhanden sein. Liegt dieser in dem Gebiete, das Ξ_{λ_1} mit X_{λ_h} gemein hat, so folgt daraus, dass, — weil X_{λ_h} einen Theil x besitzt, — auch Ξ_{λ_h} einen Theil ξ besitzen muss. Liegt auch dieser nicht frei, sondern in dem den Flächen $X_{\lambda_{h-1}}$ und Ξ_{λ_h} gemeinsamen Gebiete, so muss auch in $\Xi_{\lambda_{h-1}}$ ein Theil ξ vorhanden sein u. s. f. Schliesslich muss man, — da die Zahl der Theile eine endliche ist, — auf einen Theil ξ stossen,

der ausserhalb des den Systemen F und Φ gemeinsamen Gebiets liegt. — Damit ist die Behauptung bewiesen.

IV.

Wesentlich einfacher gestaltet sich die Construction, wenn die in einem der Winkelräume (L_{i-1}, L_i) liegenden Partialgebiete völlig von einander getrennt sind. Haben etwa X_{λ_h} und Ξ_{λ_1} kein gemeinschaftliches Stück, so bildet man nur das System S durch das Aufeinanderlegen von $Y_{\lambda_1} \ldots Y_{\lambda_h}$ und kann sofort nach der dadurch erzielten Zerlegung der Y_{λ_i} die Theilung der X_{λ_i} und Ξ_{λ_i} vornehmen; die Zuziehung der Systeme S_i ist nicht erforderlich.

Sind ausser X_{λ_h} und Ξ_{λ_1} noch X_{λ_p} und $\Xi_{\lambda_{p+1}}$ von gemeinschaftlichen Stücken frei, so bildet man am besten zwei Hilfssysteme S und S'; das erste durch Aufeinanderlegen von $Y_{\lambda_1} \ldots Y_{\lambda_p}$, das andere durch Aufeinanderlegen von $Y_{\lambda_{h+1}} \ldots Y_{\lambda_h}$.

V.

Besitzen die Systeme F und Φ keine Eigenschaften, welche unter die vier bisher behandelten Besonderheiten fallen, so führt eine Zerlegung derselben in Ringflächen zum Ziele.

Man sucht zunächst alle Punkte auf den Begrenzungslinien von F auf, in denen die vom Drehungsmittelpunkte M gerechneten Vectorenradien maximale oder minimale Werthe besitzen, und legt durch diese Punkte Vollkreise mit M als gemeinsamem Mittelpunkte. Diese gehen natürlich auch durch die entsprechenden Maxima und Minima der Begrenzungen von Φ. *Voraussetzung ist, dass die Zahl dieser Punkte endlich ist.*

Ferner legt man auch durch alle Punkte, in denen sich die Begrenzungslinien von F und Φ schneiden oder berühren, concentrische Kreise um M. Fallen an einzelnen Stellen diese Begrenzungen für ganze Strecken zusammen, so sind die Kreise durch die Punkte zu legen, in denen die Trennung beginnt. *Die zweite Voraussetzung unserer Construction ist, dass die Schnittpunkte in endlicher Zahl auftreten.*

Durchschneidet man nun die Flächen längs den sie durchquerenden Kreislinien, so zerfallen F und Φ, — wenn m die Zahl der concentrischen Kreise ist, — in m oder $(m-1)$ Gruppen von Theilen, jenachdem der Drehpunkt M selbst ein Punkt von F ist oder nicht. Jede Gruppe liegt zwischen zwei benachbarten concentrischen Kreisen und enthält eine Anzahl getrennter, einfach zusammenhängender Theile. Die Gruppen von F und Φ, welche zwischen denselben concentrischen Kreisen liegen, bestehen aus congruenten Theilen in gleicher gegen-

seitiger Lage. Diese können gemeinschaftliche Stücke besitzen; zwei nicht entsprechende Gruppen von F und Φ liegen offenbar völlig getrennt von einander.

Die einzelnen Flächenstücke einer Gruppe sollen „Trapeze" heissen, weil ihre Begrenzungen aus zwei Bögen der concentrischen Kreise (den äusseren und inneren „Grundlinien") und aus zwei „Seiten" von beliebiger Gestalt bestehen. Die Lücken zwischen Trapezen sind in gleicher Weise begrenzt, haben also auch den Charakter von Trapezen.

Eine Gruppe aus F bestehe aus den Trapezen

$$t_1, t_2, t_4, \ldots t_m, t_1,$$

die durch die Lücken

$$l_1, l_2, \ldots l_m$$

getrennt sind; die entsprechende Gruppe in Φ aus den Trapezen

$$\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots \tau_m, \tau_1$$

und den Lücken

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m \quad [\tau_i \cong t_i, \lambda_i \cong l_i].$$

Die Numerirung der Trapeze geschieht, indem man in einem bestimmten Sinne den Ring umkreist.

Haben in zwei entsprechenden Gruppen zwei Trapeze t_i und τ_k ein Stück gemeinschaftlich, so entsteht ein „Doppelstück $(t_i \tau_k)$". Durch die vorangegangene Construction der concentrischen Hilfskreise ist es aber ausgeschlossen, dass sich dabei die Seiten der Trapeze t_i und τ_k schneiden. Eine Seite eines Trapezes t liegt also entweder ganz innerhalb einer Lücke λ, oder innerhalb eines Trapezes τ, oder fällt ganz mit einer Seite eines τ zusammen.

Das gemeinsame Gebiet zweier Lücken l_i und λ_k bildet eine „Doppellücke $(l_i \lambda_k)$", durch welche ein Weg L_i aus dem Mittelpunkte des Ringes ins Unendliche führt. Ebenso führen durch Doppelstücke Wege aus dem Inneren des Ringes ins Aeussere, welche weder eine Lücke l noch eine Lücke λ durchschneiden.

Der Theil von t_i, der nicht auch Theil eines Trapezes τ ist, muss natürlich Theil einer Lücke λ sein und kann keiner Lücke l angehören. — Die nicht gemeinschaftlichen Gebiete der Trapeze t und τ, die wir in paarweise congruente Theile zu zerlegen haben, können deshalb auch als die nicht gemeinsamen Gebiete der Lücken l und λ aufgefasst werden. Unter Umständen kann es vortheilhafter sein, das Gebiet der l und λ zu untersuchen, als das der t und τ.

Die weitere Behandlung unserer Aufgabe richtet sich nun nach der Zahl der vorhandenen Doppelstücke (bez. Doppellücken) und der Art ihrer Entstehung.

a) Ist kein Doppelstück vorhanden, so zerfallen die nicht gemeinsamen Gebiete an sich schon in paarweise congruente Theile, nämlich in $t_1 \ldots t_m$ und in $\tau_1 \ldots \tau_m$. — Ist keine Doppellücke vorhanden, so ist

die Ringfläche völlig gefüllt und zwar einerseits durch Doppelstücke $(t_i \tau_k)$, andrerseits durch Stücke, die nur einer der Gruppen angehören. Diese bilden offenbar nichts anderes als die Ausfüllung der Lücken $l_1 \dots l_m$ und $\lambda_1 \dots \lambda_m$ und sind deshalb ebenfalls von vornherein in congruente Paare $(l_i \cong \lambda_i)$ geordnet.

b) Besitzt der Ring eine Doppellücke $(l_i \lambda_i)$, die durch das theilweise Zusammenfallen zweier entsprechenden Lücken l_i und λ_i entstanden ist, so kann, da die in II vorangestellten Bedingungen erfüllt sind, die Zerlegung der nicht gemeinsamen Gebiete der t und τ nach dem dort entwickelten Verfahren geschehen.

Hat eins der vorhandenen Doppelstücke die Charakteristik $(t_i \tau_i)$, so sind jene Bedingungen hinsichtlich der durch die Stücke l_i und λ_i gebildeten Flächensysteme erfüllt.

c) Wenn für alle im Ringe auftretenden Doppellücken $(l_i \lambda_k)$ die Indices i und k von einander verschieden sind, so ist die Möglichkeit vorhanden, dass sich aus ihnen eine Anzahl hervorheben lässt, deren Charakteristiken einen Cyklus bilden:

$$(l_g \lambda_h)\,(l_h \lambda_i)\,(l_i \lambda_k) \dots (l_p \lambda_q)\,(l_q \lambda_g).$$

Dann sind, wie sich zeigen lässt, die in III gemachten Voraussetzungen erfüllt.

Bezeichnet man die Lücken

$$l_g \; l_h \; l_i \dots l_p \; l_q$$

in der Ordnung, in der sie im Kreisringe in einem bestimmten Sinne auf einander folgen, mit

$$l_g \; l_{g_1} \dots l_{g_{\nu-1}} \; l_{g_\nu},$$

mit λ_{h_i} die Lücke aus der Reihe der

$$\lambda_g \; \lambda_h \; \lambda_i \dots \lambda_p \; \lambda_q,$$

welche im Cyklus mit l_{g_i} eine Doppellücke bildet, so kann — wegen der Congruenz der beiden Reihen $l_g \dots l_q$ und $\lambda_g \dots \lambda_q$ — die Reihe der Indices $h, h_1, \dots h_\nu$ nur durch cyklische Vertauschung aus der Reihe $g, g_1, \dots g_\nu$ hervorgegangen sein. Ist also h identisch mit g_k, so muss $h_1 \equiv g_{k+1}$, $h_2 \equiv g_{k+2}$ sein u. s. f. Ich bezeichne nun die Gruppe der t, welche zwischen den Lücken l_{g_ν} und l_g liegt, mit X und mit X_i die Gruppe der t zwischen $l_{g_{i-1}}$ und l_{g_i}; ebenso mit Ξ_i die Gruppe der τ zwischen $l_{g_{i-1}}$ und λ_{g_i}. Dann findet eine theilweise Bedeckung zwischen den Gruppen

$$\mathrm{X} \;\; \mathrm{X}_1 \;\dots\; \mathrm{X}_{\nu-k} \;\; \mathrm{X}_{\nu-k+1} \dots \mathrm{X}_\nu$$

und bez.

$$\Xi_k \;\; \Xi_{k+1} \dots \Xi_\nu \;\; \Xi \;\dots\; \Xi_{k-1}$$

statt.

Damit ist das Vorhandensein einer Gruppeneintheilung, wie sie das Verfahren III voraussetzt, nachgewiesen.

Giebt es unter den Doppelstücken solche, deren Charakteristiken sich in einen Cyklus ordnen lassen, so kann man die Systeme der l und der λ so in Gruppen zerfällen, dass auf sie die Construction III anwendbar wird.

d) Die letzte noch zu erörternde Möglichkeit, dass sich aus den Charakteristiken der vorhandenen Doppelstücke kein Cyklus zusammenstellen lässt, kann nur dann auftreten, wenn mindestens eins der Trapeze t überhaupt nicht bei der Bildung eines Doppelstückes betheiligt ist, also ganz getrennt von den Trapezen τ liegt.

Denn giebt es neben einem Doppelstück $(t_g \tau_h)$ ein zweites in t_h liegendes Doppelstück mit der Charakteristik $(t_h \tau_i)$, so muss in ihr (— nach der gemachten Annahme —) der Index i von g (und h) verschieden sein. An dieses zweite Doppelstück kann sich nur ein drittes $(t_i \tau_k)$ reihen, in welchem k von g, h und i verschieden ist. Hat man auf diese Weise eine Kette von ν Charakteristiken

$$(t_g \tau_h)\ (t_h \tau_i)\ (t_i \tau_k) \ldots (t_p \tau_q)\ (t_q \tau_r)$$

mit $(\nu+1)$ von einander verschiedenen Indices zusammengestellt, so kann sie nicht aus ebensoviel (m) Gliedern bestehen, als überhaupt Indices vorhanden sind. ν kann also höchstens $= m - 1$ sein, und dann müssen t_r und τ_h von Doppelstücken frei sein, weil sich sonst (gegen die Voraussetzung) ein Cyklus von m (oder weniger) Gliedern bilden würde. — Ist ν kleiner als $(m-1)$, so könnte wohl t_r mit einem der τ, die nicht in der obigen Reihe vorkommen, ein Doppelstück bilden; dann hätte man aber die Kette irrthümlicher Weise mit ν statt mit $(\nu+1)$ Gliedern angesetzt. Wir sind also berechtigt anzunehmen, dass mindestens ein t vollständig frei liegt; es sei dies das letzte t_m.

Nimmt man nun die beiden Trapeze t_m und τ_m ganz aus der Ebene des Ringes heraus, so bleiben zwei aus je $(m-1)$ Trapezen zusammengesetzte Systeme übrig. In diesen kann nun eine der in a), b) und c) untersuchten Besonderheiten vertreten sein; dann ist man bereits im Stande, die nichtgemeinsamen Gebiete der t_i und τ_i $[i = 1, 2, \ldots (m-1)]$ in paarweise congruente Stücke

$$x_1\ x_2 \ldots x_s \quad \text{und} \quad \xi_1\ \xi_2 \ldots \xi_s$$

zu zerlegen.

Bringt man, nachdem dies geschehen ist, die Trapeze t_m und τ_m in ihre ursprüngliche Lage, so wird die Begrenzung von τ_m einige der x_i durchkreuzen und dadurch eine Zerstücklung dieser Theile in das System

$$x_1'\ x_2' \ldots x_u'$$

hervorrufen. Zugleich bringen umgekehrt die Begrenzungen der x_i eine Zerlegung von τ_m in die Theile $\eta_0\ \eta_1\ \eta_2 \ldots \eta_\mu$ hervor, von denen

nur η_0 kein Doppelstück ist, während sich die übrigen $\eta_1\,\eta_2\,...\,\eta_\mu$ völlig mit μ Theilen aus der Gruppe $x_1'\,x_2'\,...\,x_u'$ decken, und zwar mit $x_{p_1}'\,x_{p_2}'\,...\,x_{p_\mu}'\,[x_{p_i}' \cong \eta_i]$.

Zerschneidet man die ξ ebenso wie die x in das System

$$\xi_1'\,\xi_2'\,...\,\xi_u'\,[\xi_i' \cong x_i']$$

und das Trapez t_m ebenso wie τ_m in die Theile

$$y_0\,y_1\,...\,y_\mu\,[y_i \cong \eta_i],$$

so ist unsere Aufgabe gelöst.

Das nicht gemeinschaftliche Gebiet in dem Systeme der τ zerfällt nämlich in die Theile:

$$\xi_1'\,\xi_2'\,...\,\xi_u' \text{ und } \eta_0,$$

oder, — wenn man mit $\xi_{q_1}'\,\xi_{q_2}'\,...\,\xi_{q_\pi}'$ die Theile bezeichnet, welche von $\xi_1'...\xi_u'$ nach Ausscheidung der Theile $\xi_{p_1}'...\xi_{p_\mu}'$ übrig bleiben, — in die Theile:

$$(\xi_{p_1}'\,...\,\xi_{p_\mu}')\,(\xi_{q_1}'\,.\,.\,.\,\xi_{q_\pi}') \text{ und } \eta_0.$$

Der ersten Gruppe entsprechen die Theile $(y_1\,y_2\,...\,y_\mu)$ in t_m, der zweiten Gruppe die Theile $x_{q_1}'\,...\,x_{q_\pi}'$, und schliesslich ist η_0 dem y_0 in dem Trapeze t_m congruent.

Zum Schluss ist noch die Möglichkeit in Betracht zu ziehen, dass auch nach Fortlassung von t_m und τ_m ein System übrig bleibt, in dem sich die Charakteristiken der Doppelstücke nicht in einen Cyklus ordnen lassen. In diesem Falle kann man die Zahl der Trapeze wiederum um eins vermindern; und wenn in dem reducirten Systeme die erstrebte Theilung möglich ist, so wird man durch eine zweimalige Wiederholung des eben beschriebenen Verfahrens auch in den vollständigen Systemen eine Auftheilung der Reihe erreichen. Man übersieht leicht, dass es im äussersten Falle dahin kommen kann, dass auf dem Ringe nur ein Trapez t und ein Trapez τ vorhanden sind; dann lassen sich aber ihre nicht gemeinsamen Theile stets in eine endliche Zahl paarweise congruenter Stücke zerfällen.

B) Die Flächen sind gegenwendig congruent.*)

Liegen die congruenten Systeme F und Φ so, dass sie erst zur Deckung kommen, wenn eins von ihnen — etwa F — zuerst eine halbe Wendung um eine Gerade g macht und dann längs derselben um die Strecke d verschoben wird, so gestaltet sich die Construction folgendermassen:

Man bildet aus F und seiner (nach g) symmetrischen Gegenfigur F' ein neues System V und bringt dies durch auf einander folgende Verschiebungen längs g um die Strecken

*) Vgl. Réthy: p. 423—526.

$$-(\nu-1)d, \cdots -d, d, \cdots \nu d$$

in die Lagen

$$V_{-(\nu-1)} \cdots V_{-1}, V_1 \cdots V_\nu.$$

Die Zahl der erforderlichen Verschiebungen ist dadurch gegeben, dass die letzten Systeme weder mit F noch mit Φ ein Stück gemein haben sollen. Verzeichnet man die Contouren sämmtlicher V in den beiden Systemen F und Φ, so zerfallen diese in gleich viele, gegenwendig congruente Theile. Zum Schluss kann man, genau wie in A_0, die Zuordnung dieser Theile so abändern, dass jedem Theil aus dem nicht gemeinsamen Gebiet von F auch ein Theil aus dem nicht gemeinsamen Gebiet von Φ entspricht.

C) Der Beweis des Satzes 2.*)

Schneidet man aus 2 congruenten Systemen F und Φ die congruenten Systeme F_0 und Φ_0 heraus, so lassen sich die Reste $r = F - F_0$ und $\varrho = \Phi - \Phi_0$ in eine endliche Zahl paarweise congruenter Stücke zerlegen. Denn legt man F so auf Φ, dass dabei F_0 und Φ_0 zur Deckung kommen, so werden die ersteren ein Gebiet gemein haben, das im allgemeinen grösser als $F_0 \equiv \Phi_0$ sein wird $[G \equiv F_0 + g \equiv \Phi_0 + \gamma; g \equiv \gamma]$. Ihre nicht gemeinsamen Gebiete f und φ lassen sich nach den in den vorhergehenden Abschnitten entwickelten Verfahren in paarweise congruente Stücke zerlegen:

$$f = f_1 + f_2 \cdots f_h; \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \cdots \varphi_h \qquad (\varphi_i \cong f_i).$$

Mithin stellen sich die Reste r und ϱ so dar:

$$r \equiv g + f_1 + f_2 \cdots f_h,$$
$$\varrho \equiv \gamma + \varphi_1 + \varphi_2 \cdots \varphi_h,$$
$$[g \cong \gamma; \; f_i \cong \varphi_i].$$

Damit ist der voranstehende Satz bewiesen.

*) Vgl. Réthy p. 423—426.

Ueber endlich-gleiche Flächen.

Von

Moritz Réthy in Budapest.

(Mit 2 lithograph. Tafeln.)

Die voranstehenden „Bemerkungen" des Herrn H. Dobriner (pag. 275ff.) veranlassen mich zu folgenden Erörterungen über die Grundlagen meiner Arbeit, und zu folgenden Ergänzungen.

1. Wir stellen uns vor, eine jede zusammenhängende Fläche A sei theilbar, der *Gesammtheit* ihrer Stücke $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *gleich*, einem *Theile* derselben aber *ungleich*, was man so ausdrückt

$$A = A_1 + A_2 + \cdots + A_n,$$
$$A > A_1 + A_2 + \cdots + A_i; \quad i < n.$$

Wir lassen ferner nur solche *Bewegungen* der Flächen und ihrer Theile zu, welche diese Eigenschaften *unberührt* lassen.

Besteht B aus den *getrennten* Theilen B_1 und B_2, so folgt aus diesen Grundvorstellungen, dass B_1 durch keinerlei Theilung und Bewegung in Deckung zu bringen ist mit $B_1 + B_2$. Dies hiesse nämlich, dass das *zusammenhängende* Stück B_1 des ursprünglichen Systems $B_1 + B_2$ in Deckung gebracht ist mit einem *Theile* von sich selbst.

Besteht B aus den getrennten Theilen $B_1, B_2, \ldots, B_n$, so folgt ebenso, dass

$$B_1 + B_2 + \cdots + B_j, \quad j < n$$

durch keinerlei Theilung und Bewegung in Deckung zu bringen ist mit dem ganzen B. Sonst müsste nämlich *wenigstens einer* von den Theilen b_{k_1} der einzelnen zusammenhängenden Flächen $B_1, B_2, \ldots, B_j$ in Deckung sein mit sich selbst und ausserdem noch mit Theilen von

$$B_{j+1} + B_{j+2} + \cdots + B_n,$$

was mit dem vorangehenden Satz in Widerspruch steht.

Eine Folge hievon ist, dass A und B keine *gleichen* Flächen sein können, sobald sie aus den Theilen

$$A_1, A_2, \ldots, A_n,$$
$$B_1, B_2, \ldots, B_n, B_{n+1}$$

zusammengesetzt sind von der gegenseitigen Beziehung, dass $A_i \underset{=}{\sim} B_i$ für alle $i = 1, 2, \ldots, n$ Bestand hat, B_{n+1} aber eine Fläche ist im gewöhnlichen Sinn (also nicht Null).

Die Behauptung, A sei *endlich-gleich* B, würde nämlich darauf führen, dass

$$B_1 + B_2 + \cdots + B_n$$

in Deckung zu bringen ist mit

$$B_1 + B_2 + \cdots + B_n + B_{n+1},$$

d. i. ein Theil mit dem Ganzen. Da nämlich $A_i \underset{=}{\sim} B_i$ für alle $i = 1, 2, \ldots, n$ Bestand hat, so überführt man erst die gesammten Theile von

$$B_1 + B_2 + \cdots + B_n$$

in das System A, d. i. in

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n;$$

und überführt dann im zweiten Schnitt das zerstückelte A in das entsprechend zerstückelte

$$B_1 + B_2 + \cdots + B_n + B_{n+1},$$

was doch in Folge der zugegebenen Endlich-Gleichheit möglich sein müsste.

Es sei also A *unendlich-gleich* dem B; dann müssten nach Ausscheidung von Theilen α und β aus A resp. B endlich-gleiche Reste $A - \alpha$ und $B - \beta$ übrig bleiben, selbst wenn α und β der Beschränkung unterworfen werden, dass sie *innerhalb* des gegebenen (im Uebrigen beliebig kleinen) Stückes B_{n+1} Platz haben.

Man hätte demnach in Folge von $A_i \underset{=}{\sim} B_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$(1)\qquad B_1 + B_2 + \cdots + B_n \,\text{I}\, A_1 + A_2 + \cdots + A_n,$$

zweitens in Folge des eben Ausgeführten

$$A - \alpha \,\text{I}\, B - \beta,$$

demnach

$$(2)\qquad A_1 + A_2 + \cdots + A_n \equiv (A - \alpha) + \alpha \,\text{I}\, (B - \beta) + \alpha.$$

Aus (1) und (2) folgt aber

$$B_1 + B_2 + \cdots + B_n \,\text{I}\, (B - \beta) + \alpha,$$

was sagen will, dass

$$B' \equiv B_1 + B_2 + \cdots + B_n$$

durch Theilung und Bewegung in Deckung gebracht ist mit

$$B'' \equiv B_1 + B_2 + \cdots + B_n + (B_{n+1} - \beta) + \alpha.$$

Da aber β innerhalb B_{n+1} Platz hat, so besteht letzteres System ausser den *gesammten* Theilen von B' noch aus dem Stücke α und dem Reste $(B_{n+1} - \beta)$. Wir wären demnach darauf geführt worden, dass B'' in

Deckung gebracht ist mit seinem Theile B', in Widerspruch mit den hier zulässigen Vorstellungen.

Man kann dasselbe auch in folgendem Satz aussprechen:

α) *Entfernt man aus den Flächen A und B entsprechend gleiche Stücke $A_i \underset{-}{\backsim} B_i$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, und ist von den übrig bleibenden Resten A_n und B_n der erste congruent einem Theile des zweiten, so sind A und B ungleich und zwar ist $A < B$.*

Es ist dies ein *Satz*, und enthält doch als Specialfall den mir als *Axiom* zugedachten Satz F des Herrn Dobriner, der nach seiner Meinung nur dann streng bewiesen werden könnte, wenn es möglich wäre, das Resultat meiner Untersuchungen „Endlich-gleiche Flächen aus Endlich-gleichen abgezogen ergeben wieder endlich-gleiche Flächen" auf Grundlage des in § 2 meiner Arbeit angewandten Translationen unabhängig von F zu beweisen. Dem gegenüber kann ich nicht umhin die Aufmerksamkeit darauf zu lenken, dass auch § 2 meiner Arbeit auf die im Eingang dargelegten Vorstellungen basirt ist, da doch ohne diesen die Flächen nicht nur getheilt und bewegt, sondern auch *gedehnt* werden, und die Dehnung doch bei Untersuchungen über die *Grundlagen* der Flächenmessung auszuschliessen ist.

Da ich nun nachträglich den Satz α), den ich als bekannt voraussetzte, streng bewiesen habe, und in § 1 meiner Arbeit die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen der Endlich-gleichheit zweier Flächen aus diesem Satz in aller Strenge abgeleitet sind, so glaube ich, dass die Bedenken des Herrn Dobriner gegen diesen Theil meiner Arbeit als behoben zu betrachten sind. Insbesondere betrachte ich den Satz:

β) *Endlich-gleiche Flächen aus endlich-gleichen weggenommen ergeben endlich gleiche Reste*,

als *völlig* befriedigend bewiesen.

2. Der zweite Theil (§ 2) meiner Arbeit stellt sich die Aufgabe, die in § 1 bewiesenen Sätze *mit Einschränkung der zu benutzenden Hilfsmittel* abzuleiten. Charakteristisch für die hier benutzten Constructionen ist, dass sie ausser den Grenzen der gegebenen Flächen und ihrer gemeinsamen Theile und den wiederholten Transpositionen dieser Figuren *in Einander* kein anderes Hilfsmittel, — *selbst nicht Cirkel und Lineal*, — in Anspruch nehmen. Nach den diesbezüglichen zutreffenden Bemerkungen des Herrn Dobriner, erkläre ich aber unumwunden, dass die Constructionen ohne Weiteres nicht immer zu einer *endlichen* Anzahl von gegenseitig congruenten Stücken führen, und zu diesem Zweck im allgemeinsten Fall noch einer Ergänzung bedürfen. Ich spreche nun die Resultalte meiner neuern Untersuchungen in folgenden Sätzen aus:

γ) Die Zerlegung der nicht gemeinsamen Theile zweier congruenter beliebiger Flächensysteme A und B in gegenseitig congruente Stücke gelingt in einer endlichen Anzahl von Schritten unmittelbar durch wiederholte Transpositionen der gegebenen Figuren in Einander „ohne" sonstige Anwendung von Cirkel und Lineal,

1') wenn A und B im entgegengesetzten Sinn congruent sind,

2') wenn A und B gegeneinander parallel verschoben sind,

3') wenn das gegenseitige Drehungscentrum O der in gleichem Sinn congruenten Flächen A und B so gelegen ist, dass man von ihm aus ins Unendliche ein (sonst beliebig kleines) Flächenstück führen kann, ohne A zu streifen,

4') wenn die congruenten Flächensysteme A und B aus Kreisflächen oder Kreisringen mit dem Mittelpunkt O auf die Weise entstehen, dass man aus ihnen Flächen B' resp. A', wo $B' \cong A'$ ist, ausschneidet, die der Bedingung 3') genügen. (Fig. 6a).

Die Fälle 2'), 3'), 4') sind dadurch charakterisirt, dass die Flächen A und B in gleichem Sinne congruent sind, und von Kreisen mit dem Mittelpunkt O abgesehen keine um O herum geschlossene Linien g unter ihren Grenzen sich befinden. Ich heisse zusammenhängende Flächenstücke, die von solchen Linien g begrenzt sind, *Gürtel* um O.

Enthalten nun die im gleichen Sinne congruenten Flächen A und B solche Gürtel um O herum, (Fig. 6) so gilt folgender Satz:

δ) Man führe um O concentrische Kreise k_i in einer Anzahl, dass sämmtliche um O herum geschlossene Linien g_i durchschnitten werden; es zerfällt dann A und B in auf den einzelnen Ringräumen gelegenen Flächen $A^{(i)} \cong B^{(i)}$ von der Eigenschaft, dass die endlich-gleiche Zerlegung der freien Theile eines jeden Paares $A^{(i)}$, $B^{(i)}$ durch wiederholte Transpositionen der gegebenen Figuren in Einander „ohne" sonstiger Anwendung von Cirkel und Lineal gelingt.

Ich habe diese Zerlegung durch Kreisschnitte in einem Specialfall (Anmerkung zu der Aufgabe 5, § 2) angewendet, und verweise hier zur Erläuterung auf Fig. 15, Bd. 38 dieser Annalen. Der Satz δ) ist eben die Verallgemeinerung des in dieser Anmerkung bewiesenen Satzes.

Die in den Sätzen γ) und δ) geforderten Zerlegungen vollziehen sich sämmtlich nach den in § 2 gegebenen Methoden. Da jedoch mein daselbst geführter Beweis, wie Herr Dobriner richtig bemerkt, in dem Fall, wenn die Bedingung 3') resp. 4') erfüllt ist, eine Lücke enthält, so gebe ich die Construction für diese Fälle, wie auch den Beweis des neuen Satzes δ) in einer andern Darstellung, die als eine Anwendung *der Methode des grössten gemeinschaftlichen Theilers* an sich von Interesse ist. Da diese Constructionen nur auf einer mehrblättrigen in O zusammenhängenden Riemann'schen Fläche ausführbar sind,

daher hier ziemlich complicirt ausfallen würden, so ziehe ich vor, dieselben auf einen Parallelstreifen abzubilden, wo dann an Stelle der ursprünglichen Drehungen Parallelverschiebungen treten. Auch werde ich in den Figuren an Stelle krummer Grenzen Gerade ziehen, ohne aber von den Eigenschaften der Geraden Gebrauch zu machen, so dass sie für Curven gelten. Setzt man zum Schluss an Stelle der parallelen Verschiebungen Drehungen um den Punkt O, so werden sämmtliche Constructionen auf die genannte Riemann'sche Fläche übertragen.

Bei dem Beweis des Satzes γ) habe ich ferner *die Bedingung* 4') *nicht separat zu behandeln*, da dieser Fall dadurch in den Fall 3') übergeht, dass man an die Stelle von A, B die Flächen A', B' setzt. Diese Art *Reciprocität* zwischen A, B und den Ergänzungsflächen B', A' soll zum Schluss zu einer einfachen Zurückführung des Satzes δ) auf Satz γ) benutzt werden.

3. Die Grenzen der Fläche A seien vorerst ein Kreis mit dem Mittelpunkt O, und eine geschlossene Curve, die mit diesem Kreis nur einen Punkt M gemein hat (Fig. 1a); die Fläche B entstehe aus A durch Drehung um O von der Winkelgrösse φ, wobei der Punkt M in N übergeht; die gemeinsamen Theile von A und B bilden einen Gürtel bestehend aus den zwei Theilen K und K_1, welche in den mit M und N bezeichneten Punkten des begrenzenden Kreises zusammenhängen.

In der Abbildung auf den Parallelstreifen (Fig. 1) treten an Stelle der Flächen A und B zwei Dreiecke; an Stelle der begrenzenden Kreislinie die Grenze ll des Parallelstreifens; an Stelle der Drehung φ tritt die Verschiebung längs ll um die Grösse b; die Basis der Dreiecke liegt auf ll und ist von der Länge $a+b$; (= der Peripherie des Kreises); das Gemeinsame von A und B wird durch die Flächen K und $K_1 \cong K_2$ repräsentirt; ihre freien Theile sind endlich durch die Vierecke S und T dargestellt.

Unsere Aufgabe ist jetzt S und T, d. i.

$$A - K - K_1 \quad \textit{und} \quad B - K - K_2$$

in gegenseitig congruente Stücke zu zerlegen. *)

Wir zerlegen zuerst bei Anwendung der Construction pag. 405, Bd. 38 die Flächen

$$A - K \quad \text{und} \quad B - K$$

in gegenseitig congruente Stücke. Dies fordert hier die wiederholte Verschiebung der Flächen A, (B) um $+b$, ($-b$), und bei jedem Schritt die Einzeichnung der Contouren von K in die Flächen B, (A),

*) Vergl. die „Bemerkungen" des Herrn Dobriner.

welcher Process einen Abschluss findet, sobald die zur Linken (Rechten) gelegenen Grenzen der fortgeführten Fläche K in die Stücke K_2 (K_1) hineinfallen. Wir bezeichnen mit A' resp. $\overline{B}'$ jenen Theil der ruhenden Flächen B resp. A, welche durch die fortgeführten in der *letzten* Lage bedeckt werden; A' und $\overline{B}'$ enthalten demnach noch die ganzen Flächen K_2 resp. K_1.

Wir haben auf diese Weise die ausserhalb $\overline{B}'$, A' gelegenen Theile von S und T zerlegt in gegenseitig congruente Stücke

$$S_1, \ldots, S_i,$$
$$T_1, \ldots, T_i,$$

und zur Lösung der gestellten ursprünglichen Aufgabe haben wir noch aus $\overline{B}'$ und A' die ganz innerhalb derselben gelegenen Stücke K_1 und K_2 und ausserdem noch ihre in das Gebiet K hineinragenden Theile $\overline{K}_2'$ und $\overline{K}_1'$ abzuziehen.

Wir verschieben zu diesem Behufe $\overline{B}'$ mitsammt den auf der Fläche fixirten Stücken K_1 und $\overline{K}_2'$ um die Grösse $a + b$, so dass K_1 mit K_2 zur Deckung kommt, und bezeichnen $\overline{B}'$ in dieser Lage mit B'. Ein Blick auf die Figur zeigt, dass die gestellte Aufgabe auf eine andere zurückgeführt ist, die sich von ihr *nur* dadurch unterscheidet, dass an Stelle der Flächen und Strecken

$$A,\ B,\ K,\ K_1,\ K_2,\ a,\ b$$

die Flächen und Strecken getreten sind

$$A',\ B',\ K_2,\ K_1',\ K_2',\ b,\ r'.$$

Die Aufgabe ist eben vollständig gelöst, sobald es gelingt, die Reste

$$A' - K_2 - K_1' \quad \text{und} \quad B' - K_2 - K_2'$$

in gegenseitig congruente Stücke zu zerlegen.

Daraus folgt, dass die Wiederholung desselben Verfahrens nach einer endlichen Anzahl von Schritten zum Ziele führt, wenn a und b ein gemeinsames Mass besitzen. Das ganze Verfahren unterscheidet sich nämlich von dem Aufsuchen des grössten gemeinsamen Masses zwischen a und b nur dadurch, dass wir auch die Grenzen von Flächen zu zeichnen hatten. Wir zogen bei unseren Operationen b von a ab, so lange wir einen Rest erhielten $r' < a$. Da nun B' gegen A' um r' verschoben, und die Länge der Basis von A' von der Grösse $b + r'$ ist, müssten wir im zweiten Schritt r' von b abziehen, so lange der Rest $r'' < b$ wird. Wir erhalten so A'' und B'', die gegenseitig um r'' verschoben sind und die Basis von A'' ist $r' + r''$, u. s. f. Wenn daher $r^{(n)}$ das grösste gemeinschaftliche Mass ist, so ist $r^{(n+1)} = 0$; das Verfahren auf $A^{(n)}$, $B^{(n)}$ angewendet, zerlegt demnach die auf ihnen gelegenen Reste von S und T in die gegenseitig congruenten Stücke

$$S_1^{(n)}, \ldots, S_{i(n)}^{(n)},$$
$$T_1^{(n)}, \ldots, T_{i(n)}^{(n)}$$

ohne zu neuen Resten zu führen.

Wenn hingegen a und b kein gemeinsames Mass besitzen, so erhalten wir auf diese Weise eine unendliche Reihe unendlich abnehmender Flächenpaare

$$A', B'; A'', B''; A''', B'''; \ldots$$

deren sämmtliche Punkte zur Linie ll unendlich nahe rücken, da die Basis gleich der Summe der aufeinander folgenden Reste $r^{(n-1)} + r^{(n)}$ ist. Daraus *folgt aber, dass eine zur Basis ll parallel gezogene Gerade pp, welche die K, K_1, K_2 noch entzwei schneidet, aus S und T zwei Stücke $S_0 \cong T_0$ abschneidet, nach deren Absonderung $S - S_0$ und $T - T_0$ durch die ausgeführten Constructionen schon in gegenseitig congruente Stücke zerlegt sind.*

Anmerkung. Die Construction wird am einfachsten, wenn man den Querschnitt pp durch jenen Schnittpunkt der Grenzen von $\bar{A}$ und $\bar{B}$ (Fig. 1a) führt, welcher der Basis ll näher liegt (Fig. 2). Diese Figur zeigt direct betrachtet die einfachste Zerlegung zweier Parallelogramme von gleichem Winkel und Flächeninhalt in gegenseitig congruente Stücke.

4. Für die oberhalb von pp befindlichen *gesammten* Theile der Flächen A und B leisten demnach diese Constructionen eine endliche Zerlegung der freien Theile. Denkt man sich nun aus A und B *beliebige* homologe einfach zusammenhängende Stücke A und B ausgeschnitten, die ganz oberhalb pp verlaufen, so sieht man sofort ein, dass dieselben Constructionen die freien Theile von A und B aus denselben Gründen in eine endliche Anzahl gegenseitig congruenter Stücke zerlegen.

Ueberhaupt sind die auf solche Flächen A und B ausgeübten Operationen unabhängig von der Entfernung, die sie von der Linie ll trennt; *dieselben führen zur endlichen Auftheilung, sobald die Flächen der Bedingung unterliegen, dass von dem Drehungsmittelpunkt O aus ein* (genügend kleines) *Flächenstück durch den Raum hindurch, der ihre gemeinsamen Theile trennt, ins Unendliche geführt werden kann.*

Somit ist der Satz γ) für einfach zusammenhängende Flächen A und B bewiesen.

Wir beweisen nun den Satz γ) für den Fall, wenn A und B der Bedingung 3') entsprechen, im übrigen mehrfach zusammenhängen.

Wir haben zu diesem Behufe, in Anbetracht derselben Erwägungen die am Anfang dieses Abschnittes gemacht wurden, den Beweis nur für die folgenden Flächen A und B zu führen.

Die Flächen A und B (Fig. 3) mögen aus dem oberhalb von pp

befindlichen Theil von A resp. B in Fig. 1 auf die Weise entstehen, dass man einfach zusammenhängende Stücke aus denselben herausschneidet; diese Löcher sind in unserer Darstellung durch die theilweise weissen Fünfecke U, V repräsentirt. Wir wollen hier mit A und B *die* oberhalb von pp befindlichen *Flächen bezeichnen mitsammt den auf ihnen gezeichneten Linien;* diese Flächen sind also die Summe der Flächen A, U resp. B, V.

Die Lösung der Aufgabe geschieht auf dieselbe Weise, wie die der früheren einfacheren. Man muss nur die Flächen A, B *mitsammt* den auf ihnen gezeichneten Linien, die jetzt auch von den Rändern von U, V herstammen, fortführen; ebenso die aus denselben auf die beschriebenen Weise entstehenden Flächen A', B'; A'', B''; ..., die wir gleichfalls *mitsammt* den auf ihnen liegendeu Linien so nennen. Dass das Verfahren einen Abschluss findet, sieht man sofort, da doch die Grenze pp nicht überschritten wird. Sind wir einmal zum letzten Paar $A^{(n)}$, $B^{(n)}$ gelangt, so machen wir dieselben Schritte rückwärts, und zeichnen schrittweise jede noch fehlende Linie auf die Stelle, die sie in diesen Lagen einnimmt. Zum Schluss erscheinen die freien Theile von A und B eingetheilt in gegenseitig congruente Stücke

$$S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n,$$
$$T_1, T_2, T_3, \ldots, T_n.$$

(In Fig. 3 sind die Constructionen des leichteren Ueberblicks halber bloss oberhalb der Geraden $p'p'$ ausgeführt).

Beweis. Legt man $A^{(n)}$ ganz auf $B^{(n)}$, so decken sich auch die auf ihnen liegenden *sämmtlichen* Linien; dasselbe gilt von sämmtlichen Linien der Flächen

$$A^{(n-1)}, B^{(n-1)}; \ldots; A'', B''; A', B'; A, B.$$

Decken sich zum Schluss A und B, so decken sich demnach auch sämmtliche auf U und V liegenden Linien. Es decken sich demnach die Stücke von A und B einerseits und die von U und V andererseits *für sich.* Bezeichnen wir in dieser Deckungslage die auf einander liegenden Stücke von A und B mit A_i, B_i, so sind demnach

$$A_i \cong B_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n + m.$$

Verschieben wir *endlich* B gegen A um die Grösse b, so dass sie die gegebene gegenseitige Lage einnehmen, — neue Linien können hiedurch nicht entstehen, da doch diese Lage bei der Construction vorkam; — so kommen nur die in der *Deckungslage* um b abstehenden Stücke von A und B paarweise aufeinander, und entweder ihre früheren Paare oder von diesen um *Vielfache* von b abstehende Flächen werden frei; daher bilden diese die gegenseitig congruenten Stücke S_i, T_i der freien Flächen von endlicher Anzahl; q. e. d.

5. Wir gehen über zum allgemeinsten Fall. Wir knüpfen unsere Betrachtungen wieder an die Figur 3; die mehrfach zusammenhängenden Flächen A, B mögen sich aber bis zur Linie ll ausdehnen, so dass sie zusammengesetzt sind aus den oberhalb von pp befindlichen $\bar{A}$, $\bar{B}$ und den zwischen pp und ll befindlichen A_0, B_0.

Da die freien Theile von $\bar{A}$ und $\bar{B}$ nach der soeben beschriebenen Construction 4 in gegenseitig congruente Stücke eingetheilt sind, so haben wir uns nur noch mit den freien Theilen von A_0, B_0 zu befassen.

Wir unterscheiden folgende Fälle:

a) Die Löchersysteme U, V haben mit der Linie ll keinen einzigen Punkt gemein;

b) diese gemeinsamen Punkte P, Q sind in endlicher Anzahl vorhanden;

c) dieselben bilden continuirliche Linien.

Der erste Fall ist in (Fig. 3) dargestellt; die freien Theile sind dieselben, wie in Fig. 1, — sie sind gegenseitig congruent.

Der zweite Fall ist in der ungünstigsten speciellen Lage in Fig. 4 dargestellt; ein Blick zeigt, dass die freien Theile durch Superposition unmittelbar in gegenseitig congruente Stücke zerfallen; fallen aber die Punkte P, Q nicht in jene specielle Lagen, so sind die freien Theile ohne weiteres congruent.

Der dritte Fall ist in Fig. 5 dargestellt; man kann in diesem Fall die Zerlegung mit Hilfe der in der vorigen Nummer dargelegten Methode ausführen, da man durch Löcher U, V hindurch von der einen Seite des Parallelstreifens auf die andere kommen kann, ohne die Fläche A_0 resp. B_0 zu streifen.

Die freien Theile von A_0, B_0 sind daher in gegenseitig congruente Stücke zerlegbar, mithin auch die von A und B.

Sind nun zwei beliebige in gleichem Sinne congruente Flächen A und B gegeben, so zerlege man dieselben in Ringräume durch Kreisschnitte k auf die Weise, dass die Abbildungen den gestellten Bedingungen genügen, was immer leicht gelingt; übt man dann auf die einzelnen Ringräume die beschriebenen Constructionen aus, so ist die endlich-gleiche Zerlegung der freien Theile vollbracht. In der folgenden Nummer soll jedoch die in Satz δ) ausgesprochene im Princip einfachere Lösung näher beschrieben und der Satz hiemit auf den Satz γ) zurückgeführt werden.

6. Die zur Gültigkeit des Satzes γ) nothwendigen Bedingungen sind nur dann nicht erfüllt, wenn unter den Grenzen der gegebenen Fläche A solche geschlossene Linien (Fig. 6)

$$g_1, g_2, \ldots, g_{2m}$$

vorkommen, deren Gesichtswinkel von O aus $= 2\pi$ ist, und dazu diese Linien keine Kreise sind mit dem Mittelpunkt O; die Anzahl der Linien g_i sei gerade, demnach *sämmtliche* Gürtel von der Anzahl m mehrfach zusammenhängend; hat der innerste Gürtel nur einen Rand, so hat man etwa $g = 0$ zu nehmen; zwischen je zwei aufeinander folgenden Gürteln, wie auch innerhalb und ausserhalb aller Gürtel können beliebige Theile der Fläche A liegen, die aber keine Gürtel um O herum bilden. Ist nun eine solche Fläche A gegeben, so führe man von O aus concentrische Kreise

$$k_1, k_2, \ldots, k_{2m},$$

so dass der Kreis k_i *wenigstens* die Linie g_i schneide, wobei die Indices so gewählt sind, dass die Radien r_i der Kreise k_i eine zunehmende Reihe bilden, dass also

$$r_1 < r_2 < \cdots < r_{2m}.$$

Sämmtliche von A nicht bedeckten Theile der Ebene bezeichne man mit B' und heisse sie Löcher von A. Man bezeichne ferner mit k_0 eine Kreislinie von O mit dem Radius $= 0$ und die Theile der Flächen A resp. ihrer Löcher B' auf den Ringräumen

gelegen	zwischen	k_0	und k_1	mit	A_1,
„	„	k_1	„ k_2	„	B_1',
„	„	k_2	„ k_3	„	A_2,
„	„	k_3	„ k_4	„	B_2',
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
„	„	k_{2m-1}	„ k_{2m}	„	B_m',
„	„	k_{2m}	„ ∞	„	A_{m+1}.

Dieselben Kreise zerlegen auch die Fläche B und die Löcher A' dieser Fläche in die Theile

$$B_i \cong A_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m+1,$$
$$A_i' \cong B_i', \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Ein Blick auf die Figur zeigt, dass die soeben beschriebenen Flächen- resp. Löchersysteme $A_i \cong B_i$ und $A_i' \cong B_i'$ sämmtlich der Bedingung 3') unterliegen, dass demnach ihre freien Theile in Folge des Satzes γ) durch blosse Transpositionen der Flächen A_i, B_i und A_0', B_0' in Einander in gegenseitig congruente Stücke zerfallen.

Zum Schluss sind die freien Theile der einzelnen soeben beschriebenen Flächen- und Löchersysteme — mit Rücksicht auf 4') — identisch mit den auf denselben Ringräumen gelegenen freien Theilen der gegebenen Flächen A, B.

Die in dieser Construction gezogenen Querschnitte sind von der Anzahl $2m$; soviel werden aber nur im ungünstigsten Fall nothwendig.

In dem durch Fig. 6 dargestellten Fall z. B. ist der Schnitt k_4 überflüssig, und man könnte auch g_2 und g_3 durch einen *einzigen* Kreis aus O durchschneiden. Zur Bestimmung der kleinsten Anzahl der nothwendigen und genügenden Kreisschnitte führt ganz allgemein die Bemerkung, dass eine *jede* Linie g_i nur durch *einen* Kreis durchzuschneiden ist und ein Kreis eine möglichst grosse Anzahl Linien g_i durchschneiden soll. Geschieht das, so zerfällt die Fläche A in Stücke gelegen in Ringräumen zweierlei Art: entweder entsprechen diese A_i der Bedingung 3'), oder sie entsprechen ihr nicht; im zweiten Fall sind sie reciprok zu ersetzen durch die in demselben Ringraum gelegenen *gesammten* Ergänzungsflächen B_i', die der Bedingung 3') allenfalls entsprechen.

7. Wir haben demnach gesehen, welche Bedingungen erfüllt sein müssen, wenn Translationen der gegebenen Figuren in Einander *ohne Weiteres* eine endlich-gleiche Zerlegung der freien Theile zweier congruenter Flächensysteme leisten sollen, und dass es, falls keine dieser Bedingungen erfüllt ist, zu diesem Zwecke genügt und nothwendig wird zu den gegebenen Grenzen neue zu adjungiren, — nämlich die soeben beschriebenen Kreisschnitte.

Daraus folgt, dass die Adjunction solcher Schnitte jedenfalls auch bei der allgemeineren Aufgabe erforderlich sein wird, die endlich-gleiche Zerlegung der freien Theile zweier endlich-gleicher, nicht congruenter, Flächensysteme mittelst Translationen der Figuren in Einander zu bewirken. Diese Ausdehnung der Untersuchungen ist von Interesse und ich gedenke mich damit in einem folgenden Artikel zu beschäftigen. Im Gegensatz zu Herrn Dobriner muss ich jedoch wiederholen, dass von solchen Untersuchungen eine „festere" Begründung des Satzes β) nicht zu erwarten ist aus dem Grunde, dass der *einzige* Unterschied zwischen den beiden Beweismethoden, dem in § 1 geführten und dem zu führenden, nur durch die Verschiedenheit der *erlaubten* Querschnitte bedingt ist.

Berichtigung zu dem Aufsatze „Ueber Systeme höherer complexer Zahlen“.

Von

Theodor Molien in Dorpat.

In meiner Arbeit: „Ueber Systeme höherer complexer Zahlen“ Math. Ann. Bd. 41, habe ich nachträglich folgendes Versehen bemerkt:

Das Corollar zu Satz 18, pg. 115:

Ist eine Wurzel der Killing'schen Gleichung Differenz zweier verschiedener Wurzeln eines irreductibeln Theilers einer charakteristischen Gleichung, so sind auch alle übrigen Differenzen zwischen verschiedenen Wurzeln desselben Theilers Wurzeln der Killing'schen Gleichung,

ist nicht so unmittelbar evident, wie ich angenommen. Dies Corollar wurde zum Beweise des 26. Satzes verwandt. Dieser Satz aber lässt sich auch ohne Zuhilfenahme des Corollars beweisen. Er lautet:

Satz 26. *Die Killing'sche Gleichung eines Zahlensystems, das nur ein einziges begleitendes ursprüngliches System besitzt, ist Potenz der Wurzeldifferenzengleichung der Ranggleichung des begleitenden ursprünglichen Systems.*

Der Beweis kann folgendermassen gefasst werden:

Ist die Ranggleichung des begleitenden ursprünglichen Systems:

$$(1) \qquad \omega^m - h_1\omega^{m-1} + \cdots \pm h_m = 0,$$

so sind die beiden charakteristischen Gleichungen des gegebenen Systems identisch, nämlich eine Potenz der Gleichung (1). Jede nichtverschwindende Wurzel der Killing'schen Gleichung ist mit Rücksicht auf den 18. Satz eine Differenz zwischen zwei Wurzeln der Gleichung (1). Da die Coefficienten der Gleichung (1) rational abhängen nur von den Parametern einer Zahl des begleitenden ursprünglichen Systems, so gilt dasselbe von den Coefficienten der Killing'schen Gleichung.

Entwickelt man die Killing'sche Gleichung:

$$(2) \qquad \left|\sum_l (a^i_{kl} - a^i_{lk})\, u_l - \delta_{ik}\varrho\right| = 0 \quad (i, k, l = 1, \ldots n)$$

nach Potenzen von ϱ in:

(3) $$\varrho^n - c_2\varrho^{n-2} + \cdots = 0,$$

(der Coefficient von ϱ^{n-1} verschwindet, weil aus der Identität der beiden charakteristischen Gleichungen

$$\sum_{i,l} a^i_{il}\, u_l = \sum_{i,l} a^i_{li}\, u_l \qquad (i, l = 1 \ldots n)$$

folgt), so findet man:

$$2c_2 = \sum_{s,t,k,l} (a^s_{tk} - a^s_{kt})(a^t_{sl} - a^t_{ls})\, u_k\, u_l \qquad (s, t, k, l = 1 \ldots n)$$

und daraus:

(4) $$c_2 = \sum_{s,t,k,l} a^s_{tk}\, a^t_{sl}\, u_k\, u_l - \sum_{s,t,k,l} a^s_{kt}\, a^t_{sl}\, u_k\, u_l \qquad (s, t, k, l = 1 \ldots n).$$

Den Werth des ersten Theiles dieses Ausdrucks erhält man, wenn man in dem linearen Coefficienten einer der charakteristischen Gleichungen u durch u^2 ersetzt; derselbe ist demnach

$$\frac{n}{m}(-2h_2 + h_1^2).$$

Was den zweiten Theil des Ausdrucks anlangt, so erschliesst sich sein Werth aus der Bemerkung, dass aus der Form

(5) $$\sum_{s,t,l} a^s_{kt}\, a^t_{sl}\, u_l \qquad (s, t, l = 1 \ldots n)$$

durch die Substitution $u = vw$ eine Form mit Polareigenschaft hervorgeht und desgleichen aus der Form

(5a) $$\sum_{s,t,k} a^s_{kt}\, a^t_{sl}\, u_k \qquad (s, t, k = 1 \ldots n).$$

Man hat dabei die Bedingungsgleichungen:

$$\sum_s a^i_{sj}\, a^s_{kl} = \sum_s a^i_{ks}\, a^s_{lj} \qquad (i, k, l, j, s = 1 \ldots n)$$

zu beachten. Es ist also der zweite Theil des Ausdrucks (4) eine quadratische Form solcher Grössen, denen Formen mit Polareigenschaft entsprechen und die linear aus den Parametern einer Zahl des begleitenden ursprünglichen Systems gebildet sind. Die einzige solche Grösse aber ist h_1, gemäss Satz 10 und 14, und es wird demzufolge der zweite Theil von (4) τh_1^2 werden, wenn mit τ eine noch näher zu bestimmende Constante bezeichnet wird. Es ist also:

$$c_2 = \frac{n}{m}(-2h_2 + h_1^2) + \tau h_1^2.$$

Um nun noch τ zu bestimmen, kann man folgenden Weg einschlagen. Wird u durch $u + \lambda u^0$ ersetzt, so geht jede Wurzel ω_i der Gleichung (1) in $\omega_i + \lambda$ über. Die Wurzeln der Killing'schen Gleichung, als Differenzen zwischen jenen Wurzeln, ändern sich nicht. Es muss also c_2 unverändert bleiben, wenn u durch $u + \lambda u^0$ ersetzt wird. Man findet darum mit Rücksicht auf die angeführte Eigenschaft der Gleichung (1) $\tau = -\frac{n}{m^2}$, also:

$$c_2 = \frac{n}{m_2}\left(-2mh_2 + (m-1)\,h_1^2\right).$$

Untersucht man noch den dritten Coefficienten der Killing'schen Gleichung, der durch

$$3c_3 = \sum_{\substack{r,s,t\\ j,k,l}} (a^r_{sj} - a^r_{js})(a^s_{tk} - a^s_{kt})(a^t_{rl} - a^t_{lr})\, u_j u_k u_l \quad (r,s,t,j,k,l = 1 \ldots n)$$

gegeben ist, so überzeugt man sich leicht, in gleicher Weise, wie bei Bestimmung von c_2 rechnend, dass derselbe verschwindet.

Die übrigen Coefficienten der Killing'schen Gleichung können aus den beiden Coefficienten c_2 und c_3 gefunden werden. Statt der Coefficienten kann man auch die Potenzsummen der Wurzeln benutzen. Bezeichnet man die Multiplicität der Wurzel $\omega_i - \omega_k$ mit μ_{ik}, so ist zunächst

$$\sum_{i,k} \mu_{ik}(\omega_i - \omega_k) = 0 \quad (i,\, k = 1 \ldots m)$$

und, weil auch $c_3 = 0$ ist,

$$\text{(7)} \qquad \sum_{i,k} \mu_{ik}(\omega_i - \omega_k)^3 = 0 \quad (i,\, k = 1 \ldots m).$$

Diese Gleichung gilt allgemein, also auch, wenn u durch irgend eine andre Zahl ersetzt wird. Es kann u durch $u + 3\lambda u^2 - 2\lambda^2 u^3$ ersetzt werden, wo λ eine unbestimmte Constante ist. Dann geht jede Wurzel ω_i der charakteristischen Gleichung in $\omega_i + 3\lambda\omega_i^2 - 2\lambda^2\omega_i^3$ über. Trägt man diese Wurzelwerthe in die Gleichung (7) ein, so erhält man für den Coefficienten von λ^2:

$$\sum_{i,k} \mu_{ik}(\omega_i - \omega_k)^5 = 0 \quad (i,\, k = 1 \ldots m).$$

Successive in gleicher Weise fortschreitend, findet man, dass alle ungeraden Potenzsummen der Wurzeln der Killing'schen Gleichung verschwinden. Es sind also je zwei entgegengesetzte Wurzeln von gleicher Multiplicität. Die geraden Potenzsummen anlangend, ist zunächst:

$$2c_2(u) = \sum_{i,k} \mu_{ik}(\omega_i - \omega_k)^2 \quad (i,\, k = 1 \ldots m).$$

Ersetzt man in dieser Gleichung u durch $u + 4\lambda u^2 - 6\lambda^2 u^3$, so ergiebt die Vergleichung der Coefficienten von λ^2:

$$2c_4'(u) = \sum_{i,k} \mu_{ik}(\omega_i - \omega_k)^4 \quad (i,\ k = 1 \ldots m),$$

wo $c_4'(u)$ in bestimmter Weise aus $c_2(u)$ hergeleitet wird. In derselben Weise ist zur Auffindung der übrigen Potenzsummen zu verfahren.

Wendet man sich nun der Wurzeldifferenzengleichung der Gleichung (1) zu, die von der Form

$$\varrho^{m^2} - d_2\varrho^{m^2-2} + \cdots = 0 \tag{8}$$

ist, so ergiebt sich sofort:

$$d_2 = -2mh_2 + (m-1)h_1^2. \tag{9}$$

Aus (7) ist ersichtlich, dass d_2 bis auf den Factor $\frac{n}{m^2}$ mit c_2 übereinstimmt. Andererseits ist, weil (8) Wurzeldifferenzengleichung von (1) ist:

$$2d_2(u) = \sum_{i,k} (\omega_i - \omega_k)^2 \quad (i,\ k = 1 \ldots m)$$

und hieraus folgt wieder, wie schon vorhin bei c_2:

$$2d_4'(u) = \sum_{i,k} (\omega_i - \omega_k)^4$$

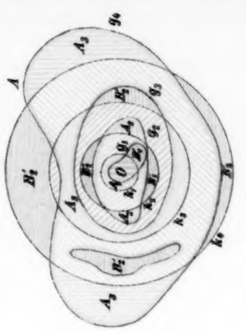
und $d_4'(u)$ ist bis auf den Factor $\frac{n}{m^2}$ gleich $c_4'(u)$. So fortfahrend erkennt man, dass überhaupt jede Potenzsumme der Wurzeln der Killing'schen Gleichung das $\frac{n}{m^2}$-fache der entsprechenden Potenzsumme der Wurzeln von (8) ist. Da alsdann die $m^{2\text{te}}$ Potenz der Killing'schen Gleichung und die n^{te} Potenz der Gleichung (8) einander gleich sind, so ist $\frac{n}{m^2}$ eine ganze Zahl, die die Multiplicität jeder nichtverschwindenden Wurzel der Killing'schen Gleichung angiebt.

Ist somit die Killing'sche Gleichung, abgesehen von den verschwindenden Wurzeln, Potenz der Wurzeldifferenzengleichung von (1), so sieht man auch sofort, dass sie es auch mit Rücksicht auf die verschwindenden Wurzeln ist, da der Grad der Killing'chen Gleichung das $\frac{n}{m^2}$-fache des Grades der Wurzeldifferenzengleichung ist, und jede nichtverschwindende Wurzel letzterer $\frac{n}{m^2}$-fach in ersterer vertreten ist. So muss auch die Anzahl der verschwindenden Wurzeln in ersterer $\frac{n}{m^2}$-mal so gross sein, als in letzterer. —

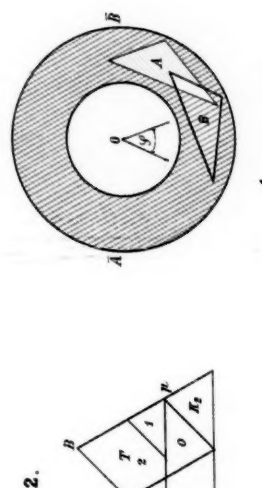
Dieser Beweis unterscheidet sich von dem in meiner Abhandlung versuchten dadurch, dass erstens die Constante τ auf einem anderen Wege gefunden wird, und dass zweitens nicht blos die ersten Coefficienten, sondern überhaupt alle Wurzelpotenzsummen der Killing'schen Gleichung und der Wurzeldifferenzengleichung verglichen werden. Dadurch ist das Corollar des Satzes 18 und sein näherer Beweis für die Abhandlung überflüssig gemacht.

Moskau, 31. October 1892.

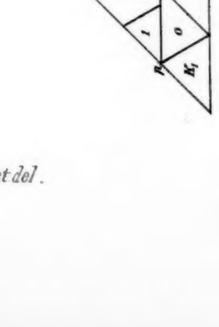
6.



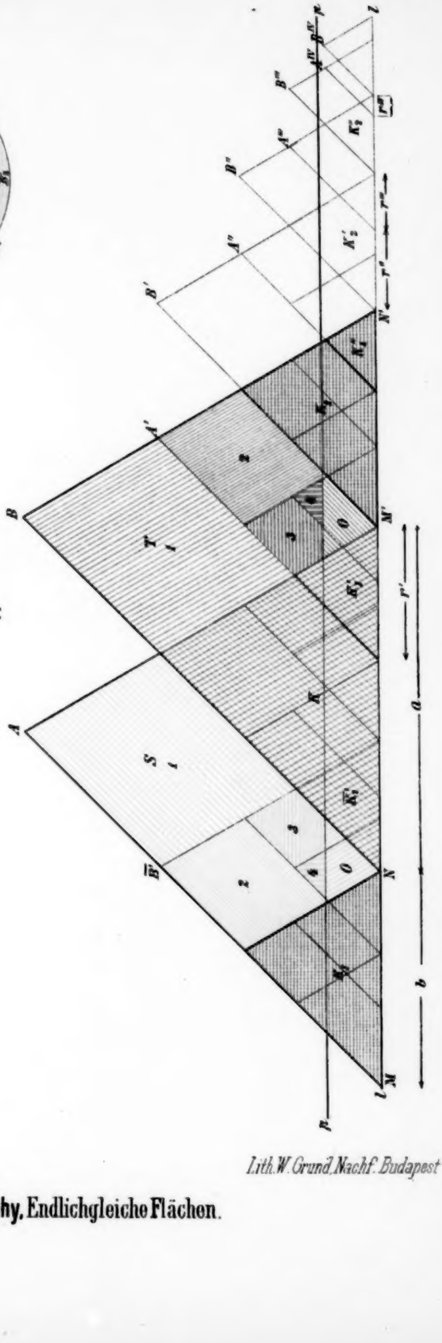
6a.



2.

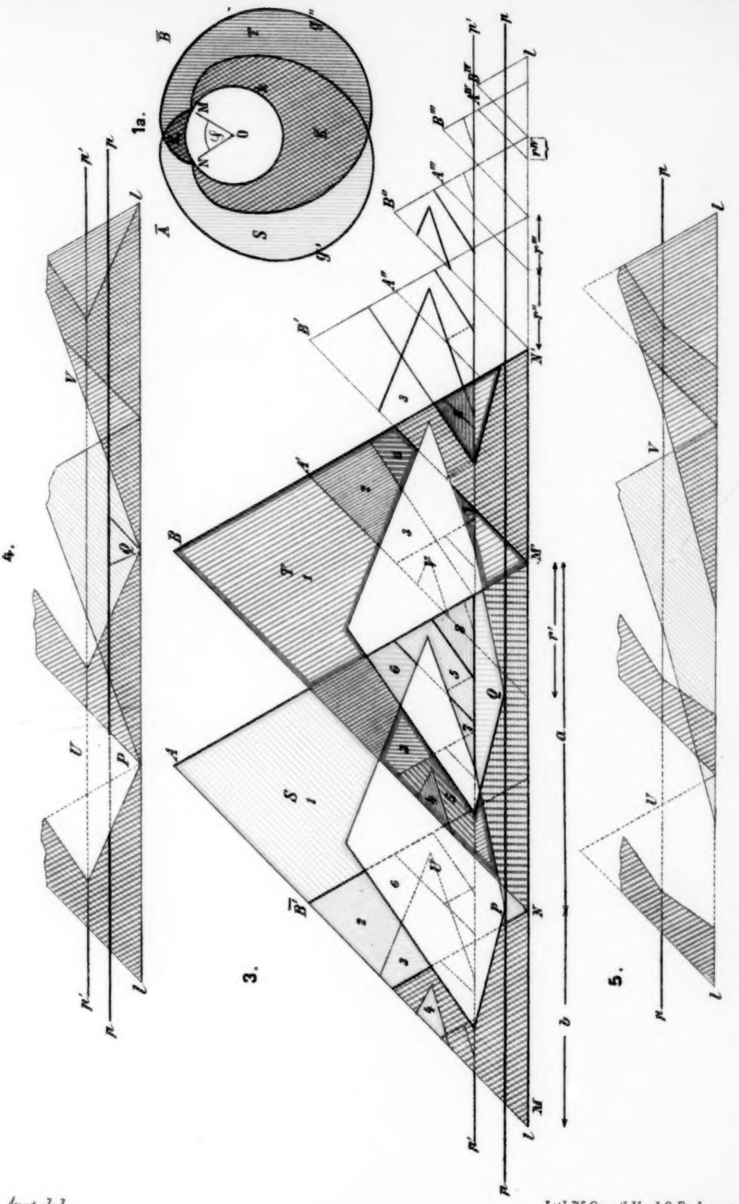


1.



Auct del. Lith. W. Grund, Nachf. Budapest

Réthy, Endlichgleiche Flächen.



Auct. del Lith. W. Grund Nachf. Budapest

Réthy, Endlichgleiche Flächen.

Ueber die vollen Invariantensysteme.

Von

DAVID HILBERT in Königsberg i./Pr.

Einleitung.

Meine Abhandlung „Ueber die Theorie der algebraischen Formen" *) enthält eine Reihe von Theoremen, welche für die Theorie der algebraischen Invarianten von Bedeutung sind. Insbesondere in Abschnitt V der genannten Abhandlung habe ich mit Hilfe jener Theoreme für beliebige Grundformen die *Endlichkeit* des vollen Invariantensystems bewiesen. *Dieser Satz von der Endlichkeit des vollen Invariantensystems bildet den Ausgangspunkt und die Grundlage für die Untersuchungen der vorliegenden Abhandlung.* **) Die im Folgenden entwickelten Methoden unterscheiden sich wesentlich von den bisher in der Invariantentheorie angewandten Mitteln; bei den nachfolgenden Untersuchungen nämlich ordnet sich die Theorie der algebraischen Invarianten unmittelbar unter die allgemeine Theorie der algebraischen Functionenkörper unter: so dass die Theorie der Invarianten lediglich als ein besonders bemerkenswerthes Beispiel für die Theorie der algebraischen Functionenkörper mit mehr Veränderlichen erscheint — gerade wie man in der Zahlentheorie die Theorie der Kreistheilungskörper lediglich als ein besonders bemerkenswerthes Beispiel aufzufassen hat, an welchem die wichtigsten Sätze der Theorie der allgemeinen Zahlenkörper zuerst erkannt und bewiesen worden sind.

Die im Folgenden angewandten Methoden reichen für Grundformensysteme mit beliebig vielen Veränderlichen und Veränderlichenreihen aus, gleichviel ob dieselben sämmtlich denselben linearen Transformationen unterliegen oder ob sie in irgendwie vorgeschriebener Weise theilweise verschiedenen linearen Transformationen unterworfen werden sollen; dennoch werde ich bei der folgenden Darstellung der Kürze und Anschaulichkeit wegen meist nur binäre oder ternäre Grundformen mit einer einzigen Veränderlichenreihe zu Grunde legen.

*) Math. Ann. Bd. 36, S. 473.

**) Vergl. die 3 Noten des Verfassers: „Ueber die Theorie der algebraischen Invarianten." Nachrichten v. d. kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1891 (1ste Note) und 1892 (2te und 3te Note).

Unter „*Invariante*“ ohne weiteren Zusatz verstehen wir im Folgenden stets eine ganze rationale Invariante d. h. eine solche ganze rationale homogene Function der Coefficienten a der Grundform oder des Grundformensystems, welche sich nur mit Potenzen der Substitutionsdeterminanten multiplicirt, wenn man die Coefficienten a durch die entsprechenden Coefficienten b der linear transformirten Grundformen ersetzt. Diese Invarianten besitzen, wie bekannt, die folgenden elementaren Eigenschaften:

1. Die Invarianten lassen die linearen Transformationen einer gewissen continuirlichen Gruppe zu.

2. Die Invarianten genügen gewissen partiellen linearen Differentialgleichungen.

3. Jede algebraische und insbesondere jede rationale Function von beliebig vielen Invarianten, welche in den Coefficienten a der Grundformen ganz, rational und homogen wird, ist wiederum eine Invariante.

4. Wenn das Product zweier ganzen rationalen Functionen der Coefficienten a eine Invariante ist, so ist jeder der beiden Factoren eine Invariante.

Die Sätze 1. und 2. gestatten die Umkehrung. Nach Satz 3. bildet das System aller Invarianten einen in sich abgeschlossenen Bereich von ganzen Functionen, welcher durch algebraische Bildungen nicht mehr erweitert werden kann. Der Satz 4 sagt aus, dass in diesem Functionenbereiche die gewöhnlichen Theilbarkeitsgesetze gültig sind, d. h.: jede Invariante lässt sich auf eine und nur auf eine Weise als Product von nicht zerlegbaren Invarianten darstellen.

Zur Berechnung der Invarianten und zur weiteren Entwicklung der Theorie bedürfen wir eines Hilfssatzes*), welcher eine fundamentale Eigenschaft des sogenannten Ω-Processes betrifft und kurz wie folgt ausgesprochen werden kann:

Wenn man irgend eine ganze rationale Function der Coefficienten b der linear transformirten Grundform bildet und auf diese den Ω-Process so oft anwendet, bis sich ein von den Substitutionscoefficienten freier Ausdruck ergiebt, so ist der so entstehende Ausdruck eine Invariante.

An diese elementaren Sätze aus der Invariantentheorie schliesst

*) Vergl. meine oben citirte Abhandlung S. 524; der Satz stimmt im Wesentlichen mit einem von P. Gordan und F. Mertens bewiesenen Satze überein. Neuerdings hat Story in den Math. Ann. Bd. 41, S. 469 einen Differentiationsprocess [ ] angegeben, welcher sich direct aus Differentiationen nach den Coefficienten a zusammensetzt und welcher den Ω-Process zu ersetzen im Stande ist; dieser Process ist eine Verallgemeinerung des in meiner Inauguraldissertation für binäre Formen aufgestellten Processes [ ], vergl. Math. Ann. Bd. 30, S. 20.

sich der bereits erwähnte Satz über die Endlichkeit an, welcher wie folgt, lautet:

5. Es giebt eine endliche Anzahl von Invarianten, durch welche sich jede andere Invariante in ganzer rationaler Weise ausdrücken lässt. Wir bezeichnen diese endliche Anzahl von Invarianten kurz als *„das volle Invariantensystem"*.

Die zusammengestellten 5 Sätze regen die Frage an, welche der aufgezählten Eigenschaften sich gegenseitig bedingen und welche getrennt von einander für ein Functionensystem möglich sind. In meiner oben citirten 1sten Note „Ueber die Theorie der algebraischen Invarianten"*) habe ich unter anderem an einem Beispiele gezeigt, dass es ein System von unbegrenzt vielen ganzen rationalen homogenen Functionen giebt, welchem die Eigenschaften 2, 3, 5 zukommen, ohne dass der Satz 4 für dasselbe gilt.

Schliesslich sei erwähnt, dass aus den allgemeinen Theoremen meiner anfangs citirten Abhandlung „Ueber die Theorie der algebraischen Formen" noch 2 weitere Endlichkeitssätze für die Invariantentheorie folgen, nämlich der Satz von der Endlichkeit der irreduciblen Syzygien und der Satz von der Syzygienkette, welche im Endlichen abbricht.

I.
Der Invariantenkörper.

§ 1.
Ein algebraischer Hilfssatz.

Die rationalen Invarianten einer Grundform oder eines Grundformensystems bestimmen einen Functionenkörper und die ganzen rationalen Invarianten sind die ganzen algebraischen Functionen dieses Functionenkörpers; um diese Thatsachen einzusehen, brauchen wir den folgenden einfachen Hilfssatz:

Wenn irgend m ganze rationale und homogene Functionen $f_1, \ldots, f_m$ der n Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ vorgelegt sind, so kann man stets aus denselben gewisse $\varkappa$ ganze rationale und homogene Functionen $F_1, \ldots, F_\varkappa$ der nämlichen Veränderlichen zusammensetzen, zwischen denen keine algebraische Relation mit constanten Coefficienten stattfindet und durch welche sich jede der vorgelegten Functionen $f_1, \ldots, f_m$ als g a n z e algebraische Function ausdrücken lässt.

Zum Beweise bezeichnen wir die Grade der Functionen $f_1, \ldots, f_m$ in den Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ beziehungsweise mit $\nu_1, \ldots, \nu_m$ und ausserdem das Product dieser Gradzahlen mit ν: dann besitzen die m Functionen

*) S. 233.

$$f_1' = f_1^{\frac{\nu}{\nu_1}}, \ldots, f_m' = f_m^{\frac{\nu}{\nu_m}}$$

sämmtlich den Grad ν. Besteht nun zwischen diesen m Functionen keine algebraische Relation mit constanten Coefficienten, so besteht auch zwischen den ursprünglichen Functionen $f_1, \ldots, f_m$ keine solche Relation und diese Functionen bilden daher selbst schon ein System von Functionen der verlangten Beschaffenheit. Im anderen Falle besteht eine Relation von der Gestalt

$$G(f_1', \ldots, f_m') = 0,$$

wo G eine ganze rationale homogene Function von $f_1', \ldots, f_m'$ bedeutet. Wir führen nun eine lineare Transformation der m Functionen aus, indem wir setzen:

$$\begin{aligned} f_1' &= \alpha_{11} f_1'' + \cdots + \alpha_{1m} f_m'', \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f_m' &= \alpha_{m1} f_1'' + \cdots + \alpha_{mm} f_m'', \end{aligned}$$

wo die Determinante der Substitutionscoefficienten $\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{mm}$ von 0 verschieden ist und wo ausserdem für die $\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{mm}$ solche Zahlenwerthe gewählt sein mögen, dass in der linear transformirten Function $H(f_1'', \ldots, f_m'')$ der Coefficient der höchsten Potenz von f_m'' gleich 1 wird. Dann ist offenbar f_m'' eine ganze algebraische Function von $f_1'', \ldots, f_{m-1}''$ und folglich sind auch die Functionen $f_1', \ldots, f_m'$ und somit auch die ursprünglich vorgelegten Functionen $f_1, \ldots, f_m$ sämmtlich durch die $m-1$ Functionen $f_1'', \ldots, f_{m-1}''$ ganz und algebraisch ausdrückbar. Besteht nun zwischen diesen $m-1$ Functionen $f_1'', \ldots, f_{m-1}''$ keine algebraische Relation, so bilden diese $m-1$ Functionen ein System von Functionen der verlangten Beschaffenheit. Im anderen Falle behandeln wir die zwischen diesen $m-1$ Functionen bestehende homogene Relation in der nämlichen Weise wie vorhin die Relation $G=0$, und so gelangen wir schliesslich durch Fortsetzung dieses Verfahrens zu einem Systeme homogener Functionen $F_1, \ldots, F_\varkappa$ vom nämlichen Grade ν in den Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$, welches die im Satze verlangte Beschaffenheit besitzt.

§ 2.

Die Invarianten $J, J_1, \ldots J_\varkappa$.

Es seien $i_1, \ldots, i_m$ die Invarianten eines vollen Invariantensystems; dieselben sind ganze rationale homogene Functionen der Coefficienten der Grundform und so folgt unmittelbar aus dem in § 1 bewiesenen Hilfssatze der Satz:

Ist eine beliebige Grundform oder ein Grundformensystem vorgelegt, so lassen sich stets gewisse $\varkappa$ Invarianten $J_1, \ldots, J_\varkappa$ bestimmen, zwischen

denen keine algebraische Relation stattfindet und durch welche jede andere Invariante ganz und algebraisch ausgedrückt werden kann.

Die Zahl $\varkappa$ ist beispielsweise im Falle einer einzigen binären Grundform n^{ter} Ordnung gleich $n-2$ und im Falle einer ternären Grundform n^{ter} Ordnung gleich $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)-8$.

Die nach dem obigen Verfahren sich ergebenden Invarianten $J_1, \ldots, J_\varkappa$ sind sämmtlich von dem nämlichen Grade in den Coefficienten der Grundform; dieser Grad werde mit ν bezeichnet.

Es gilt ferner der Satz:

Man kann zu den Invarianten $J_1, \ldots, J_\varkappa$ stets eine Invariante J hinzufügen, derart, dass eine jede andere Invariante der Grundform sich rational durch die Invarianten $J, J_1, \ldots, J_\varkappa$ ausdrücken lässt.

Um diese Invariante J zu finden, wählen wir irgend 2 Invarianten des vollen Invariantensystems aus, etwa i_1, i_2 von den Graden ν_1 bezüglich ν_2 und setzen dann

$$i_1' = i_1^{\alpha_1} i_2^{\alpha_2},$$
$$i_2' = i_1^{\beta_1} i_2^{\beta_2} J_1^{\gamma},$$

wo die Exponenten $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma$ ganze positive den Bedingungen

$$\alpha_1\nu_1 + \alpha_2\nu_2 = \beta_1\nu_2 + \beta_2\nu_2 + \gamma\nu,$$
$$\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 1$$

genügende Zahlen sind. Um solche Zahlen zu finden, bestimme man zunächst 3 ganze positive Zahlen $\delta_1, \delta_2, \gamma$, so dass die Bedingung

$$\delta_1\nu_1 + \delta_2\nu_2 = \gamma\nu$$

erfüllt ist und ausserdem die Zahlen δ_1 und δ_2 zu einander prim sind. Dann bestimme man 2 ganze positive Zahlen β_1 und β_2, so dass

$$\delta_1\beta_2 - \delta_2\beta_1 = 1$$

wird: die 5 Zahlen $\alpha_1 = \delta_1 + \beta_1$, $\alpha_2 = \delta_2 + \beta_2$, β_1, β_2, γ sind dann, wie man leicht sieht, von der verlangten Beschaffenheit.

Die Formeln

$$i_1 = i_1'^{\beta_2}\, i_2'^{-\alpha_2} J_1^{\alpha_2\gamma},$$
$$i_2 = i_1'^{-\beta_1} i_2'^{\alpha_1}\, J_1^{-\alpha_1\gamma}$$

lehren, dass i_1 und i_2 sich rational durch i_1', i_2', J_1 ausdrücken lassen. Da die beiden Invarianten i_1', i_2' von dem nämlichen Grade in den Coefficienten der Grundform sind, so ist auch jede lineare Combination

$$i'' = c_1 i_1' + c_2 i_2'$$

eine Invariante. In diesem Ausdrucke können nach einem bekannten Satze aus der Theorie der algebraischen Functionen die Constanten c_1, c_2 so bestimmt werden, dass sowohl i_1' als auch i_2' rationale Functionen von $i'', J_1, \ldots J_\varkappa$ sind. Hieraus folgt, dass sämmtliche

Invarianten der Grundform sich rational durch i'', $J_1, \ldots, J_\varkappa$, i_3, $i_4, \ldots, i_m$ ausdrücken lassen. Wählt man nun aus den Invarianten i'', i_3, $i_4, \ldots, i_m$ wiederum 2 Invarianten aus, etwa i'', i_3, so lässt sich in eben derselben Weise wie vorhin eine Invariante i''' bestimmen, derart, dass sowohl i'' als auch i_3 rationale Functionen von i''', $J_1, \ldots, J_\varkappa$ und somit sämmtliche Invarianten rationale Functionen von i''', $J_1, \ldots, J_\varkappa$, i_4, $i_5, \ldots, i_m$ sind. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens gelangen wir schliesslich zu einer Invariante $i^{(m)} = J$ von der im Satze verlangten Beschaffenheit.

Nach den eben bewiesenen Sätzen ist jede Invariante eine rationale Function von $J, J_1, \ldots, J_\varkappa$ und eine ganze algebraische Function von $J_1, \ldots, J_\varkappa$; es ist aber auch umgekehrt jede von $J, J_1, \ldots, J_\varkappa$ rational und von $J_1, \ldots, J_\varkappa$ ganz und algebraisch abhängende Function i nothwendigerweise eine Invariante der Grundform. Denn da die Function i rational von den Invarianten $J, J_1, \ldots, J_\varkappa$ abhängt, so ist dieselbe nothwendig eine rationale Function von den Coefficienten der Grundform: wir setzen $i = \frac{g}{h}$, wo g und h ganze rationale Functionen von den Coefficienten der Grundform ohne einen gemeinsamen Factor sind. Ferner genügt i einer Gleichung von der Gestalt

$$i^k + G_1 i^{k-1} + \cdots + G_k = 0,$$

wo $G_1, \ldots, G_k$ ganze rationale Functionen von $J_1, \ldots, J_\varkappa$ sind. Setzen wir in diese Gleichung $i = \frac{g}{h}$ ein und multipliciren dieselbe dann mit h^{k-1}, so ergiebt sich, dass $\frac{g^k}{h}$ eine ganze rationale Function von den Coefficienten der Grundform ist. Da aber g und h zueinander prim sind, so ist h nothwendigerweise eine Constante d. h. i ist eine ganze rationale Function der Coefficienten der Grundform und mithin eine ganze rationale Invariante. Hieraus folgt der Satz:

Die Invarianten $J, J_1, \ldots, J_\varkappa$ bestimmen einen Functionenkörper, in welchem die ganzen algebraischen Functionen genau das System der ganzen rationalen Invarianten ausmachen; dieser Functionenkörper werde im folgenden kurz der Invariantenkörper der Grundform genannt.

Es giebt nun nach einem fundamentalen von L. Kronecker aufgestellten Satze in einem jeden Functionenkörper stets eine endliche Anzahl ganzer Functionen derart, dass jede andere ganze Function des Körpers als lineare Verbindung jener endlichen Anzahl dargestellt werden kann, wobei die Coefficienten der linearen Verbindung ganze rationale Functionen des Körpers sind, und die allgemeine von L. Kronecker entwickelte Theorie der algebraischen Functionen lehrt zugleich, wie man die ganzen algebraischen Functionen eines Körpers bestimmen kann. Um hiernach aus den Invarianten $J, J_1, \ldots, J_\varkappa$ das

volle Invariantensystem $i_1, \ldots, i_m$ wieder zurückzugewinnen, berechne man zunächst die Discriminante D der Gleichung k^{ten} Grades für J. Die Invarianten der Grundform d. h. die ganzen algebraischen Functionen des Invariantenkörpers sind dann sämmtlich in der Gestalt

$$i = \frac{\Gamma_1 J^{k-1} + \Gamma_2 J^{k-2} + \cdots + \Gamma_k}{D}$$

darstellbar. Wenden wir das Theorem I in Abschnitt I meiner oben citirten Arbeit*) auf die aus den Functionen $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_k$ zu bildenden unendlichen Reihen an, so erkennen wir in der That, dass es eine endliche Zahl $j_1, \ldots, j_M$ von Invarianten giebt, derart, dass jede andere Invariante i in der Gestalt

$$i = A_1 j_1 + \cdots + A_M j_M$$

dargestellt werden kann, wo $A_1, \ldots, A_M$ ganze rationale Functionen von $J_1, \ldots, J_\varkappa$ sind. Die Invarianten $J_1, \ldots, J_\varkappa, j_1, \ldots, j_M$ sind somit die Invarianten eines vollen Invariantensystems.

Nach Kenntniss der Invarianten $J, J_1, \ldots, J_\varkappa$ erfordert also die Aufstellung des vollen Invariantensystems nur noch die Lösung einer elementaren Aufgabe aus der arithmetischen Theorie der algebraischen Functionen.

II.

Das Verschwinden der Invarianten.

§ 3.

Ein allgemeines Theorem über algebraische Formen.

Da alle Invarianten der Grundform ganze algebraische Functionen von $J_1, \ldots, J_\varkappa$ sind, so folgt unmittelbar die weitere Thatsache:

Wenn man den Coefficienten der Grundform solche besonderen Werthe ertheilt, dass die $\varkappa$ Invarianten $J_1, \ldots, J_\varkappa$ gleich 0 werden, so verschwinden zugleich auch sämmtliche übrigen Invarianten der Grundform.

Es ist nun von grösster Bedeutung für die ganze hier zu entwickelnde Theorie, dass die in diesem Satze ausgesprochene Eigenschaft des Invariantensystems $J_1, \ldots, J_\varkappa$ auch umgekehrt die ursprüngliche in § 2 zu Grunde gelegte Eigenschaft dieser Invarianten bedingt. Um den Nachweis hiervon zu führen, entwickeln wir zunächst ein Theorem, welches sich als drittes allgemeines Theorem aus der Theorie der algebraischen Functionen den beiden Theoremen I und III meiner oben citirten Arbeit**) zugesellt. Dieses Theorem lautet:

Es seien m ganze rationale homogene Functionen $f_1, \ldots, f_m$ der n Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ vorgelegt und ferner seien $F, F', F'', \ldots$

*) Mathematische Annalen Bd. 36, S. 474.

**) Vgl. Math. Ann. Bd, 36, S. 474 und 492.

irgend welche ganze rationale homogene Functionen der nämlichen Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ *von der Beschaffenheit, dass sie für alle diejenigen Werthsysteme dieser Veränderlichen verschwinden, für welche die vorgelegten* m *Functionen* $f_1, \ldots, f_m$ *sämmtlich gleich* 0 *sind: dann ist es stets möglich, eine ganze Zahl* r *zu bestimmen derart, dass jedes Product* $\Pi^{(r)}$ *von* r *beliebigen Functionen der Reihe* $F, F', F'', \ldots$ *dargestellt werden kann in der Gestalt*

$$\Pi^{(r)} = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \cdots + a_m f_m,$$

wo $a_1, a_2, \ldots, a_m$ *geeignet gewählte ganze rationale homogene Functionen der Veränderlichen* $x_1, \ldots, x_n$ *sind.*

Im folgenden Beweise dieses Theorems nehmen wir zunächst an, dass die Formenreihe $F, F', F'', \ldots$ nur aus einer endlichen Anzahl von Formen besteht.

Der Beweis zerfällt in 2 Theile: in dem ersten Theile zeigen wir die Richtigkeit des Theorems für den besonderen Fall, dass die vorgelegten m Formen $f_1, \ldots, f_m$ nur eine endliche Anzahl gemeinsamer Nullstellen besitzen. Um diesen Nachweis zu führen, nehmen wir an, dass das Theorem für Formen mit einer gewissen Anzahl gemeinsamer Nullstellen bereits als gültig erkannt worden ist und zeigen dann, dass dasselbe auch für solche Formen gilt, welche noch eine weitere gemeinsame Nullstelle besitzen.

Die gemeinsamen Nullstellen der Formen $f_1, \ldots, f_m$ seien

$$\begin{gathered} x_1 = \alpha_1,\; x_2 = \alpha_2,\; \ldots,\; x_n = \alpha_n, \\ x_1 = \beta_1,\; x_2 = \beta_2,\; \ldots,\; x_n = \beta_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1 = \varkappa_1,\; x_2 = \varkappa_2,\; \ldots,\; x_n = \varkappa_n. \end{gathered}$$

Wir setzen nun an Stelle der Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ bezüglich die Ausdrücke $x_1\xi_1, x_2\xi_1, \ldots, x_{n-1}\xi_1, \xi_2$ ein, wodurch die Formen $f_1, \ldots, f_m$ in binäre Formen von den Ordnungen $\nu_1, \ldots, \nu_m$ in den Veränderlichen ξ_1, ξ_2 übergehen; dann bilden wir die Ausdrücke

$$\begin{aligned} F_1 &= u_1 f_1 + u_2 f_2 + \cdots + u_m f_m, \\ F_2 &= v_1 f_1 + v_2 f_2 + \cdots + v_m f_m, \end{aligned}$$

wo $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_m$ binäre Formen mit unbestimmten Coefficienten und von solchen Ordnungen in den Veränderlichen ξ_1, ξ_2 sind, dass F_1 und F_2 in eben diesen Veränderlichen homogen werden. Die Resultante der beiden binären Formen F_1, F_2 in Bezug auf die Veränderlichen ξ_1, ξ_2 wird gleich einer ganzen rationalen Function der in den Formen $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_m$ auftretenden unbestimmten Coefficienten, und die Potenzen und Producte dieser unbestimmten Coefficienten erscheinen mit Formen multiplicirt, welche nur die $n-1$ Veränderlichen $x_1, \ldots, x_{n-1}$ enthalten; diese Formen mögen

mit $f_1', \ldots, f_{m'}'$ bezeichnet werden. Aus den Eigenschaften der Resultante zweier binärer Formen wird leicht erkannt, dass die Formen $f_1', \ldots, f_{m'}'$ nur die folgenden gemeinsamen Nullstellen besitzen:

$$x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2,\ \ldots,\ x_{n-1} = \alpha_{n-1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_1 = \varkappa_1,\ x_2 = \varkappa_2,\ \ldots,\ x_{n-1} = \varkappa_{n-1}$$

und dass dieselben ausserdem sämmtlich gleich linearen Combinationen der Formen $f_1, \ldots, f_m$ sind, d. h. es ist

$$\left.\begin{array}{l} f_1' \equiv 0, \\ \cdots\cdots \\ f_{m'}' \equiv 0, \end{array}\right\} \qquad (f_1, \ldots, f_m).$$

Wenden wir das eben angegebene Eliminationsverfahren nunmehr auf die Formen $f_1', \ldots, f_{m'}'$ an, so gelangen wir zu einem Systeme von Formen $f_2'', \ldots, f_{m''}''$ der $n-2$ Veränderlichen $x_1, \ldots, x_{n-2}$; welche nur die gemeinsamen Nullstellen

$$x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2,\ \ldots,\ x_{n-2} = \alpha_{n-2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_1 = \varkappa_1,\ x_2 = \varkappa_2,\ \ldots,\ x_{n-2} = \varkappa_{n-2}$$

besitzen und welche sämmtlich nach dem Modul $(f_1', \ldots, f_{m'}')$ und folglich auch nach dem Modul $(f_1, \ldots, f_m)$ congruent 0 sind. Durch weitere Fortsetzung des Verfahrens ergiebt sich schliesslich ein System von binären Formen $f_1^{(n-2)}, \ldots, f_{m^{(n-2)}}^{(n-2)}$ der Veränderlichen x_1, x_2, welche nur die gemeinsamen Nullstellen

$$x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$x_1 = \varkappa_1,\ x_2 = \varkappa_2$$

besitzen und welche sämmtlich congruent 0 sind nach dem Modul $(f_1, \ldots, f_m)$. Wir wählen eine von diesen binären Formen aus und setzen dieselbe gleich $(\alpha_2 x_1 - \alpha_1 x_2)^{\varrho_{12}} \varphi_{12}$, wo ϱ_{12} eine ganze positive Zahl bedeutet und φ_{12} eine für $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$ nicht verschwindende binäre Form ist. Hierbei ist angenommen, dass die Grössen α_1, α_2 nicht beide gleich 0 sind.

In gleicher Weise finden wir, falls α_1, α_3 nicht zugleich 0 sind, dass es eine ganze Zahl ϱ_{13} und eine für $x_1 = \alpha_1$, $x_3 = \alpha_3$ nicht verschwindende binäre Form φ_{13} der Veränderlichen x_1, x_3 giebt, derart, dass

$$(\alpha_3 x_1 - \alpha_1 x_3)^{\varrho_{13}} \varphi_{13} \equiv 0 \qquad (f_1, \ldots, f_m)$$

ist und es sei schliesslich $\varrho_{n-1,n}$ eine ganze Zahl und $\varphi_{n-1,n}$ eine für $x_{n-1} = \alpha_{n-1}$, $x_n = \alpha_n$ nicht verschwindende binäre Form der Veränderlichen x_{n-1}, x_n derart, dass die Congruenz

$$(\alpha_n x_{n-1} - \alpha_{n-1} x_n)^{\varrho_{n-1,n}} \varphi_{n-1,n} \equiv 0, \quad (f_1, \ldots, f_m)$$

besteht.

Da nach Voraussetzung eine jede Form der Reihe $F, F', F'', \ldots$ für $x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2,\ \ldots,\ x_n = \alpha_n$ verschwindet, so kann allgemein

$$F^{(i)} = F_{12}^{(i)}(\alpha_2 x_1 - \alpha_1 x_2) + F_{13}^{(i)}(\alpha_3 x_1 - \alpha_1 x_3) + \cdots + F_{n-1,n}^{(i)}(\alpha_n x_{n-1} - \alpha_{n-1} x_n)$$

gesetzt werden, wo $F_{12}^{(i)}, F_{13}^{(i)}, \ldots, F_{n-1,n}^{(i)}$ Formen der n Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ sind, und hieraus folgt mit Hilfe der obigen Congruenzen, dass, wenn zur Abkürzung

$$\varrho = \varrho_{12} + \varrho_{13} + \cdots + \varrho_{n-1,n}$$

und

$$\Phi = \varphi_{12}\,\varphi_{13}\ldots\varphi_{n-1,n}$$

gesetzt wird, die Congruenz

$$\Phi\,\Pi^{(\varrho)} \equiv 0, \qquad (f_1, \ldots, f_m)$$

besteht, wo Φ eine für $x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2,\ \ldots,\ x_n = \alpha_n$ nicht verschwindende Form und $\Pi^{(\varrho)}$ das Product von irgend ϱ Formen der Reihe $F, F', F'', \ldots$ bezeichnet.

Die Formen $\Phi, f_1, \ldots, f_m$ besitzen eine geringere Anzahl gemeinsamer Nullstellen als die Formen $f_1, \ldots, f_m$ des ursprünglichen Systems. Nehmen wir also an, dass das Theorem für ein Formensystem mit weniger gemeinsamen Nullstellen bereits als richtig erkannt ist, so folgt, dass es eine Zahl r giebt, derart, dass

$$\Pi^{(r)} \equiv 0 \quad (\Phi, f_1, \ldots, f_m)$$

wo $\Pi^{(r)}$ ein Product aus irgend r Formen der Reihe $F, F', F'', \ldots$ ist, und hieraus folgt dann mit Hilfe der obigen Congruenz

$$\Pi^{(\varrho+r)} \equiv 0 \quad (f_1, \ldots, f_m),$$

wo $\Pi^{(\varrho+r)}$ ein Product aus irgend $\varrho + r$ Functionen der Reihe $F, F', F'', \ldots$ bedeutet. Somit ist bewiesen, dass das Theorem unter der gemachten Annahme auch für das Formensystem $f_1, \ldots, f_m$ gilt.

Nun gilt das Theorem in dem Falle, wo die vorgelegten Formen *keine* gemeinsame Nullstelle haben. In der That, bei dieser Annahme haben auch die binären Formen $f_1^{(n-2)}, \ldots, f_{m^{(n-2)}}^{(n-2)}$ keine gemeinsame Nullstelle; es ist daher jede binäre Form von x_1, x_2, deren Ordnung oberhalb einer gewissen Grenze liegt, insbesondere also auch die Form $x_1^{\varrho_1}$ und die Form $x_2^{\varrho_2}$ für genügend grosse Exponenten ϱ_1 und ϱ_2 congruent 0 nach dem Modul $(f_1, \ldots, f_m)$. Ebenso zeigt man, dass die Formen $x_3^{\varrho_3}, \ldots, x_n^{\varrho_n}$ bei genügend grossen Exponenten $\varrho_3, \ldots, \varrho_n$ congruent 0 sind, nach dem Modul $(f_1, \ldots, f_m)$. Hieraus folgt, dass eine jede Form der Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$, deren Ordnung die Zahl $\varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_n$ übersteigt, congruent 0 ist, nach eben jenem Modul, und damit ist die obige Behauptung bewiesen.

In dem *zweiten* Theil wird nun das Theorem allgemein bewiesen und zwar nehmen wir zu diesem Zwecke an, dass dasselbe für

beliebige Formen von $n-1$ Veränderlichen bereits als richtig erkannt ist und zeigen dann, dass es auch für n Veränderliche gilt.

Setzen wir $x_1 = t x_2$, so gehen die Formen $f_1, \ldots, f_m, F, F', \ldots$ in Formen der $n-1$ Veränderlichen $x_2, \ldots, x_n$ über, deren Coefficienten ganze rationale Functionen des Parameters t sind. Diese Formen von $n-1$ Veränderlichen bezeichnen wir bezüglich mit $g_1, \ldots, g_m, G, G', \ldots$. Wenn wir jetzt dem Parameter t irgend einen bestimmten endlichen Werth ertheilen, so ist offenbar, dass jede Form der Reihe $G, G', \ldots$ für solche Werthe der Veränderlichen $x_2, \ldots, x_n$ verschwindet, für welche die m Formen $g_1, \ldots, g_m$ sämmtlich gleich 0 sind. Es sei nun das Theorem für den Fall von $n-1$ Veränderlichen bewiesen und es sei für diesen Fall auch bereits erkannt, dass man die Zahl r jedenfalls unterhalb einer Grenze wählen darf, welche nur von den Ordnungen und der Anzahl der Formen $g_1, \ldots, g_m, G, G', \ldots$ und nicht von deren Coefficienten abhängt: dann wissen wir folgendes: Es giebt eine Zahl $r = \sigma_{12}$, so dass ein jedes Product $\Pi^{(\sigma_{12})}$ von σ_{12} Formen der Reihe $G, G', \ldots$ für jeden speciellen Werth von t eine Darstellung von der Gestalt

$$\Phi^{(\sigma_{12})} = b_1 g_1 + b_2 g_2 + \cdots + b_m g_m$$

gestattet, wo $b_1, \ldots, b_m$ ganze rationale homogene Functionen der $n-1$ Veränderlichen $x_2, \ldots, x_n$ sind. Betrachten wir in dieser Formel die Coefficienten u der Formen $b_1, \ldots, b_m$ als unbestimmte Grössen und vergleichen dann auf der linken und rechten Seite die Coefficienten der nämlichen Potenzen und Producte der Veränderlichen $x_2, \ldots, x_n$, so erhalten wir ein System von linearen nicht homogenen Gleichungen zur Bestimmung der Coefficienten u. Die Coefficienten in diesen linearen Gleichungen sind ganze rationale Functionen des Parameters t und wir wissen ausserdem, dass dieses System von linearen Gleichungen für jeden besonderen endlichen Werth von t Lösungen besitzt.

Es gilt nun der folgende leicht zu beweisende Hilfssatz:

Wenn ein System von linearen Gleichungen von der Gestalt

$$\begin{gathered} c_{11} u_1 + \cdots + c_{1p} u_p = c_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{q1} u_1 + \cdots + c_{qp} u_p = c_q \end{gathered}$$

vorgelegt ist, wo $c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{qp}, c_1, \ldots, c_q$ ganze rationale Functionen eines Parameters t sind, für jeden besonderen Werth von t Auflösungen besitzt, so kann man für die Unbekannten $u_1, \ldots, u_p$ stets rationale Functionen von t bestimmen, derart, dass nach Einsetzung derselben die obigen Gleichungen bezüglich des Parameters t identisch erfüllt sind.

Wenden wir diesen Hilfssatz auf die oben erhaltenen Gleichungen

an und setzen dann $t = \frac{x_1}{x_2}$, so ergiebt sich nach Fortschaffung der Nenner eine Congruenz von der Gestalt

$$\psi_{12}\,\Pi^{(\sigma_{12})} \equiv 0, \quad (f_1, \ldots, f_m)$$

wo ψ_{12} eine binäre Form der beiden Veränderlichen x_1, x_2 ist, und wo $\Pi^{(\sigma_{12})}$ ein Product von irgend σ_{12} Formen der Reihe $F, F', \ldots$ bedeutet.

In gleicher Weise erhalten wir eine Congruenz von der Gestalt

$$\psi_{13}\,\Pi^{(\sigma_{13})} \equiv 0, \quad (f_1, \ldots, f_m)$$

wo ψ_{13} eine binäre Form der beiden Veränderlichen x_1, x_3 ist und wo $\Pi^{(\sigma_{13})}$ ein Product von σ_{13} Formen der Reihe $F, F', \ldots$ bedeutet, und es sei schliesslich $\sigma_{n-1,n}$ eine ganze Zahl und $\psi_{n-1,n}$ eine Form der beiden Veränderlichen x_{n-1}, x_n derart, dass die Congruenz

$$\psi_{n-1,n}\,\Pi^{(\sigma_{n-1,n})} \equiv 0 \quad (f_1, \ldots, f_m)$$

besteht. Da es nun offenbar nur eine endliche Anzahl von Werthsystemen giebt, für welche die Formen $\psi_{12}, \psi_{13}, \ldots, \psi_{n-1,n}, f_1, \ldots, f_m$ sämmtlich verschwinden, so ist dieses Formensystem ein solches, für welches die Richtigkeit des Theorems bereits feststeht; es kann daher eine Zahl r gefunden werden, so dass die Congruenz

$$\Pi^{(r)} \equiv 0 \quad (\psi_{12}, \psi_{13}, \ldots, \psi_{n-1,n}, f_1, \ldots, f_m)$$

besteht. Mit Hilfe der obigen Congruenzen ergiebt sich hieraus

$$\Pi^{(\sigma+r)} \equiv 0, \quad (f_1, \ldots, f_m)$$

wo σ die grösste der Zahlen $\sigma_{12}, \sigma_{13}, \ldots, \sigma_{n-1,n}$ bezeichnet

Da binäre Formen überhaupt nur eine endliche Anzahl von Nullstellen besitzen können, so gilt das Theorem nach dem ersten Theil des Beweises für den besonderen Fall $n = 2$ und somit auch allgemein für Formen von n Veränderlichen. Enthält nun die vorgelegte Reihe $F, F', \ldots$ unendlich viele Formen, so bestimme man — was nach Theorem I meiner oben citirten Arbeit stets möglich ist — eine Zahl μ derart, dass eine jede Form der Reihe $F, F', \ldots$ gleich einer linearen Combination der μ Formen $F, F', \ldots, F^{(\mu-1)}$ wird. Ist dann das Product von irgend r der Formen $F, F', \ldots, F^{(\mu-1)}$ nach dem Modul $(f_1, \ldots, f_m)$ congruent 0, so gilt offenbar das nämliche auch für jedes Product von r Formen der unendlichen Reihe $F, F', \ldots$ und somit ist das Theorem vollständig bewiesen.

Nach dem eben bewiesenen Theorem ist insbesondere die r^{te} Potenz irgend einer von jenen Formen $F, F', F'', \ldots$ congruent 0 nach dem Modul $(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ — eine Thatsache, welche für den speciellen Fall zweier nicht homogenen Veränderlichen bereits von E. Netto*) ausgesprochen und bewiesen worden ist.

*) Vergl. Acta Mathematica Bd. 7, S. 101.

§ 4.

Der grundlegende Satz über die Invarianten, deren Verschwinden das Verschwinden aller übrigen Invarianten zur Folge hat.

Wir nehmen jetzt die am Anfang des vorigen Paragraphen unterbrochenen Entwickelungen über die Theorie der Invarianten einer Grundform oder eines Grundformensystems wieder auf und beweisen den folgenden grundlegenden Satz:

Wenn irgend μ Invarianten $I_1, \ldots, I_\mu$ die Eigenschaft besitzen, dass das Verschwinden derselben stets nothwendig das Verschwinden aller übrigen Invarianten der Grundform zur Folge hat, so sind alle Invarianten ganze algebraische Functionen jener μ Invarianten $I_1, \ldots, I_\mu$.

Nach Voraussetzung sind die μ Invarianten $I_1, \ldots, I_\mu$ Functionen der Coefficienten der Grundform von der Beschaffenheit, dass allemal, wenn man diesen Coefficienten solche besonderen Werthe ertheilt, welche die μ Invarianten $I_1, \ldots, I_\mu$ zu 0 machen, nothwendig sämmtliche Invarianten der Grundform verschwinden, und daher giebt es dem allgemeinen in § 3 bewiesenen Theorem zufolge eine Zahl r derart, dass jedes Product $\Pi^{(r)}$ von irgend r oder mehr Invarianten der Grundform in der Gestalt

$$\Pi^{(r)} = a_1 I_1 + a_2 I_2 + \cdots + a_\mu I_\mu$$

darstellbar ist, wo $a_1, a_2, \ldots, a_\mu$ ganze rationale homogene Functionen der Coefficienten der Grundform sind. Nunmehr bezeichnen wir wie früher mit $i_1, \ldots, i_m$ die Invarianten eines vollen Invariantensystems und ferner mit ν die grösste von den Gradzahlen dieser Invarianten: dann stellt sich offenbar eine jede beliebige Invariante i der Grundform, deren Grad $\geqq \nu r$ ist, als Summe von Producten $\Pi^{(r)}$ dar und es wird somit

$$i = a_1' I_1 + a_2' I_2 + \cdots + a_\mu' I_\mu,$$

wo $a_1', a_2', \ldots, a_\mu'$ wiederum ganze rationale homogene Functionen der Coefficienten der Grundform sind. Nach den Entwickelungen des Abschnittes V meiner oben citirten Abhandlung „Ueber die Theorie der algebraischen Formen“*) können in dieser Formel die Ausdrücke $a_1', a_2', \ldots, a_\mu'$ durch Invarianten bezüglich $i_1', i_2', \ldots, i_\mu'$ ersetzt werden, so dass sich eine Gleichung von der Gestalt

$$i = i_1' I_1 + i_2' I_2 + \cdots + i_\mu' I_\mu$$

ergiebt. Die Invarianten $i_1', i_2', \ldots, i_\mu'$ sind sämmtlich von niederem Grade in den Coefficienten der Grundform als die Invariante i; sie können ihrerseits wiederum in der nämlichen Weise durch lineare

*) Vgl. Math. Ann. Bd. 36, S. 527.

Combination der Invarianten $I_1, I_2, \ldots, I_\mu$ erhalten werden und dieses Verfahren lässt sich so lange fortsetzen, bis wir zu Invarianten gelangen, deren Grad $< \nu r$ ist. Wir denken uns sämmtliche linear unabhängige Invarianten, deren Grad $< \nu r$ ist, aufgestellt und bezeichnen dieselben mit $j_1, j_2, \ldots, j_w$. Für eine beliebige Invariante i der Grundform besteht dann ein System von w Gleichungen der folgenden Gestalt

$$\begin{aligned}
ij_1 &= G_1^{(1)} j_1 + G_2^{(1)} j_2 + \cdots + G_w^{(1)} j_w, \\
ij_2 &= G_1^{(2)} j_1 + G_2^{(2)} j_2 + \cdots + G_w^{(2)} j_w, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
ij_w &= G_1^{(w)} j_1 + G_2^{(w)} j_2 + \cdots + G_w^{(w)} j_w,
\end{aligned}$$

wo $G_1^{(1)}, G_2^{(1)}, \ldots, G_w^{(w)}$ ganze rationale Functionen der Invarianten $I_1, \ldots, I_\mu$ bedeuten. Durch Elimination von $j_1, j_2, \ldots, j_w$ folgt die Gleichung

$$\begin{vmatrix}
G_1^{(1)} - i & G_2^{(1)} & \ldots & G_w^{(1)} \\
G_1^{(2)} & G_2^{(2)} - i & \ldots & G_w^{(2)} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
G_1^{(w)} & G_2^{(w)} & \ldots & G_w^{(w)} - i
\end{vmatrix} = 0,$$

welche zeigt, dass i eine ganze algebraische Function von $I_1, \ldots, I_\mu$ ist.

Es ist hiernach offenbar für das Studium der Invarianten einer Grundform von grösster Wichtigkeit, die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür zu kennen, dass für diese Grundform die Invarianten sämmtlich gleich 0 sind; wir werden somit, wenn wir die N Coefficienten der Grundform in bekannter Weise als die Coordinaten eines Raumes von $N - 1$ Dimensionen deuten, auf die Aufgabe geführt, dasjenige algebraische Gebilde Z in diesem Raume zu untersuchen, welches durch Nullsetzen aller Invarianten bestimmt ist. Bezeichnet wie früher $\varkappa$ die Anzahl der algebraisch unabhängigen Invarianten, so giebt es den früheren Betrachtungen zufolge genau $\varkappa$ Invarianten $I_1, \ldots, I_\varkappa$, durch deren Nullsetzen das algebraische Gebilde Z bereits völlig bestimmt ist; aus dem eben bewiesenen Satze folgt nun nothwendig $\mu \geqq \varkappa$ d. h. es ist nicht möglich, eine noch kleinere Zahl von Invarianten anzugeben, durch deren Nullsetzen das Gebilde Z ebenfalls schon bestimmt wird.

§ 5.

Das Verschwinden der sämmtlichen Invarianten einer binären Grundform.

Der eben in § 4 bewiesene Satz bildet den Kern der ganzen hier zu entwickelnden Theorie der algebraischen Invarianten. Wir wenden denselben zunächst auf die Theorie der binären Formen an; für diese

lässt sich das algebraische Gebilde Z ohne besondere Schwierigkeit allgemein angeben, wie der folgende Satz lehrt:

Wenn alle Invarianten einer binären Grundform von der Ordnung $n = 2h+1$ bezüglich $n = 2h$ gleich Null sind, so besitzt die Grundform einen $h+1$-fachen Linearfactor und umgekehrt, wenn dieselbe einen $h+1$-fachen Linearfactor besitzt, so sind sämmtliche Invarianten gleich Null.

Um den ersten Theil dieses Satzes zu beweisen, bilden wir für die vorgelegte Grundform

$$f = a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \cdots + a_n x_2^n$$

die folgenden Ueberschiebungen

$$F_1 = [a_0 a_2 - a_1^2] x_1^{2(n-2)} + \cdots,$$
$$F_2 = [a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2] x_1^{2(n-4)} + \cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F_h = \left[a_0 a_{2h} - \binom{2h}{1} a_1 a_{2h-1} + \cdots \pm \frac{1}{2}\binom{2h}{h} a_h^2\right] x_1^{2(n-2h)} + \cdots.$$

Wir stellen dann die Bedingungen dafür auf, dass die Formen $f, F_1, \ldots, F_h$ bezüglich $f, F_1, \ldots, F_{h-1}$ sämmtlich die nämliche Linearform als Factor gemein haben, was etwa auf folgende Weise geschehen kann. Es sei M das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen n, $2(n-2)$, $2(n-4), \ldots, 2(n-2h)$ und man setze

$$M = mn = 2m_1(n-2) = \cdots = 2m_h(n-2h),$$

bezüglich

$$M = mn = 2m_1(n-2) = \cdots = 2m_{h-1}(n-2h+2);$$

je nachdem n eine ungerade oder gerade Zahl ist. Dann bilde man die beiden Formen

$$U = uf^m + u_1 F_1^{m_1} + \cdots + u_h F_h^{m_h},$$
$$V = vf^m + v_1 F_1^{m_1} + \cdots + v_h F_h^{m_h},$$

bezüglich

$$U = uf^m + u_1 F_1^{m_1} + \cdots + u_{h-1} F_{h-1}^{m_{h-1}},$$
$$V = vf^m + v_1 F_1^{m_1} + \cdots + v_{h-1} F_{h-1}^{m_{h-1}},$$

wo $u, u_1, \ldots, u_h$ und $v, v_1, \ldots, v_h$ unbestimmte Parameter sind. Die Resultante dieser beiden Formen U, V, ist von der Gestalt

$$R(U, V) = J_1 P_1 + \cdots + J_\mu P_\mu,$$

wo $P_1, \ldots, P_\mu$ gewisse Potenzen und Producte der unbestimmten Parameter u, v und wo $J_1, \ldots, J_\mu$ Invarianten der Grundform sind. Die Gleichungen

$$J_1' = 0, \ldots, J_\mu = 0$$

stellen die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür dar, dass die Formen $f, F_1, \ldots, F_h$ bezüglich die Formen $f, F_1, \ldots, F_{h-1}$ sämmtlich die nämliche Linearform als Factor enthalten. Denn wenn das letztere nicht der Fall wäre, so könnte man stets den Parametern u, v solche numerische Werthe ertheilen, dass die beiden Formen U, V keinen gemeinsamen Factor enthielten und dieser Umstand würde der Bedingung $R(U, V) = 0$ widersprechen. Wir transformiren jetzt die binäre Grundform f mittelst der Substitution

$$y_1 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2,$$
$$y_2 = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2,$$

wo $\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$ diejenige Linearform bezeichnet, welche eben in jenen Formen als gemeinsamer Factor enthalten ist und wo α_1, α_2 so gewählt sind, dass die Determinante $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$ von Null verschieden ausfällt. Die Coefficienten der transformirten Form g bezeichnen wir mit $b_0, b_1, \ldots, b_n$. Da nun die transformirte Form g und ihre Ueberschiebungen sämmtlich den Factor y_2 besitzen, so müssen ihre Coefficienten nothwendig folgende Gleichungen befriedigen:

$$\begin{aligned} b_0 &= 0, \\ b_0 b_2 - b_1^2 &= 0, \\ &\cdots\cdots \\ b_0 b_{2h} - \binom{2h}{1} b_1 b_{2h-1} + \cdots \pm \tfrac{1}{2}\binom{2h}{h} b_h^2 &= 0 \end{aligned}$$

bezüglich

$$\begin{aligned} b_0 &= 0, \\ b_0 b_2 - b_1^2 &= 0, \\ &\cdots\cdots \\ b_0 b_{2h-2} - \binom{2h-2}{1} b_1 b_{2h-3} + \cdots \pm \tfrac{1}{2}\binom{2h-2}{h-1} b_{h-1}^2 &= 0. \end{aligned}$$

Fügen wir im Falle eines geraden n noch die Gleichung $F_h = 0$ hinzu, so folgen für ein ungerades sowie für ein gerades n die Gleichungen

$$b_0 = 0,\ b_1 = 0, \ldots, b_h = 0$$

und hieraus ergiebt sich, dass die Form g den Factor y_2 wenigstens $h+1$-fach enthält. Es ist selbstverständlich, dass in besonderen Fällen die Berechnung der Bedingungen dafür, dass $f, F_1, \ldots, F_h$ einen gemeinsamen Factor haben, sich erheblich abkürzen lässt.

Der zweite Theil des Satzes wird unmittelbar als richtig erkannt, wenn wir die Grundform so transformiren, dass dadurch die ersten $h+1$ Coefficienten $b_0, b_1, \ldots, b_h$ sämmtlich gleich 0 werden. In der That, wenn $e_{h+1}, e_{h+2}, \ldots, e_n$ beliebige ganze positive Zahlen bedeuten,

so lautet das allgemeinste Glied, welches aus den übrigen Coefficienten $b_{h+1}, b_{h+2}, \ldots, b_n$ gebildet werden kann, wie folgt

$$b_{h+1}^{e_{h+1}} b_{h+2}^{e_{h+2}} \ldots b_n^{e_n};$$

es ist aber für dieses Glied das doppelte Gewicht nothwendig grösser als das n-fache des Grades; jedes Glied einer Invariante enthält daher nothwendig mindestens einen der Coefficienten $b_0, b_1, \ldots, b_h$ als Factor und hat folglich für unsere besondere Grundform den Werth 0.

Die vorhin aufgestellten Invarianten $I_1, \ldots, I_\mu$ bezüglich $I_1, \ldots, I_\mu, F_h$ bilden, wie eben gezeigt worden ist, ein System von Invarianten der Grundform f von der Art, dass das Verschwinden dieser Invarianten nothwendig das Verschwinden aller Invarianten der Grundform zur Folge hat, und *nach dem in* § 4 *bewiesenen Satze sind mithin sämmtliche Invarianten der Grundform f ganze algebraische Functionen jener eben gefundenen. Zu der Herstellung dieses Systems von Invarianten haben wir lediglich Resultantenbildungen verwandt.*

§ 6.

Anwendungen auf besondere binäre Grundformen und Grundformensysteme.

Die allgemeinen bisher von uns erhaltenen Resultate finden in allen besonderen berechneten Fällen die schönste Bestätigung, wie folgende Beispiele zeigen:

Für die binäre Form 5^{ter} Ordnung erfüllen die 3 Invarianten A, B, C von den Graden bezüglich 4, 8, 12 die Bedingungen des in § 4 bewiesenen Satzes. Denn das gleichzeitige Verschwinden derselben bedingt nothwendig das Auftreten eines dreifachen Linearfactors in f und dieser Umstand wiederum hat, wie der in § 5 bewiesene Satz lehrt, zur Folge, dass alle Invarianten der binären Form gleich Null sind. Es müssen daher alle Invarianten ganze algebraische Functionen von A, B, C sein und in der That enthält das volle System nur noch eine weitere Invariante nämlich die schiefe Invariante R, deren Quadrat bekanntlich eine ganze rationale Function von A, B, C ist.

Die binäre Form 6^{ter} Ordnung besitzt 4 Invarianten A, B, C, D von den Graden beziehentlich 2, 4, 6, 10, deren gleichzeitiges Verschwinden nothwendig das Auftreten eines vierfachen Linearfactors bedingt. Dieser Umstand hat wiederum zur Folge, dass alle Invarianten der Form gleich Null sind; in der That ist entsprechend unserem in § 4 bewiesenen Satze die noch übrige schiefe Invariante R der Grundform eine ganze algebraische Function von A, B, C, D, nämlich gleich der Quadratwurzel aus einer ganzen rationalen Function dieser 4 Invarianten.

Wir betrachten ferner eine binäre Grundform f von der 5ten Ordnung und eine lineare Grundform l. Wenn die 6 simultanen Invarianten A, B, C, $(f, l^5)_5$, $(h, l^6)_6$, $(i, l^2)_2$, zugleich verschwinden, wo $h = (f, f)_2$ und $i = (f, f)_4$ gesetzt ist, so folgt: entweder tritt die Linearform l 3-fach als Factor in f auf oder die Form f enthält irgend einen 3-fachen Factor, während die Coefficienten der Linearform l gleich 0 sind, oder die Coefficienten der Form f sind sämmtlich 0. In allen diesen 3 Fällen sind, wie man leicht erkennt, sämmtliche Simultaninvarianten der beiden Grundformen gleich 0 und somit hat also das Verschwinden der genannten 6 Simultaninvarianten das Verschwinden aller übrigen Simultaninvarianten zur Folge. Hieraus folgt nach dem in § 4 bewiesenen Satze, dass alle Simultaninvarianten der beiden Grundformen f und l ganze algebraische Functionen der genannten 6 Invarianten sind.

Da die in Rede stehenden Simultaninvarianten mit dem System der Invarianten und Covarianten einer einzigen binären Grundform 5ter Ordnung identisch sind, so folgt, dass sich sämmtliche 23 invariante Formen einer binären Grundform 5ter Ordnung als ganze algebraische Functionen der 3 Invarianten A, B, C und der 3 Covarianten f, h, i ausdrücken lassen. Berücksichtigen wir noch, dass alle Invarianten und Covarianten der binären Grundform 5ter Ordnung rationale Functionen von f, h, i, $(f, h)_1$, $(f, h)_3$ sind, so kann nach unseren allgemeinen in Abschnitt I ausgeführten Entwicklungen aus diesen Angaben allein das bekannte System jener 23 invarianten Formen berechnet werden. Man hat zu dem Zwecke nur nöthig, alle diejenigen Functionen aufzustellen, welche ganze algebraische Functionen von A, B, C, f, h, i und zugleich rationale Functionen der Covarianten f, h, i, $(f, h)_1$, $(f, h)_3$ sind.

Um die simultanen Invarianten zweier binären cubischen Formen f, g aufzustellen, bilden wir eine lineare Combination $\varkappa f + \lambda g$ derselben und entwickeln die Discriminante dieser Form nach den unbestimmten Parametern $\varkappa$ und λ, wie folgt:

$$D(\varkappa f + \lambda g) = D_0 \varkappa^4 + D_1 \varkappa^3 \lambda + D_2 \varkappa^2 \lambda^2 + D_3 \varkappa \lambda^3 + D_4 \lambda^4.$$

Die 5 Invarianten D_0, D_1, D_2, D_3, D_4 sind offenbar nur dann sämmtlich gleich null, wenn die cubischen Formen f und g beide den nämlichen Linearfactor zweifach enthalten und dieser Umstand wiederum hat zur Folge, dass auch alle übrigen Simultaninvarianten null sind. Unserem Satze zufolge müssen daher alle simultanen Invarianten der beiden cubischen Formen f und g ganze algebraische Functionen von D_0, D_1, D_2, D_3, D_4 sein. Das volle Invariantensystem enthält nun ausser diesen 5 Invarianten nur noch 2 weitere Invarianten, nämlich die Ueberschiebung $(f, g)_3$ und die Resultante R der beiden Formen:

man findet in der That durch Rechnung bestätigt, dass diese beiden Invarianten ganze algebraische Functionen jener 5 Invarianten sind.

Um das simultane System einer cubischen Form f, einer quadratischen Form g und einer linearen Form l zu untersuchen, bezeichnen wir mit d_1, d_2, r bezüglich die Discriminanten von f und g und die Resultante beider Formen; ferner bilden wir die Invarianten $(f, l^3)_3$, $(h, l^2)_2$, $(g, l^2)_2$ und $(h, g)_2$, wo h die Hesse'sche Covariante von f bezeichnet. Wenn diese 7 Simultaninvarianten sämmtlich gleich 0 sind, so nehmen, wie man ohne Schwierigkeit zeigt, die 3 Grundformen nothwendig die Gestalt an

$$f = c\,p^2 q, \quad g = c'\,p^2, \quad l = c''\,p,$$

wo p, q lineare Formen und c, c', c'' gleich 0 oder von 0 verschiedene Constante sind. Da nun für diese besonderen Grundformen offenbar sämmtliche Simultaninvarianten gleich 0 sind, so folgt mit Hilfe des in § 4 bewiesenen Satzes, dass sämmtliche Simultaninvarianten der 3 Grundformen ganze algebraische Functionen jener 7 Simultaninvarianten sind, oder, was auf das Nämliche hinausläuft, dass sämmtliche simultane Invarianten und Covarianten einer cubischen Form f und einer quadratischen Form g ganze algebraische Functionen der 4 Invarianten d_1, d_2, r, $(h, g)_2$ und der 3 Formen f, h, g sind.

Wir behandeln endlich noch ein allgemeineres Beispiel, nämlich das System von ν binären linearen Formen

$$l_1 = a_1 x + b_1 y, \quad l_2 = a_2 x + b_2 y, \ldots, l_\nu = a_\nu x + b_\nu y.$$

Das volle Invariantensystem besteht aus den Determinanten

$$p_{ik} = a_i b_k - a_k b_i \quad (i, k = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Wir bilden die beiden binären Formen $\nu - 1^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\varphi = a_1 \xi^{\nu-1} + a_2 \xi^{\nu-2}\eta + \cdots + a_\nu \eta^{\nu-1},$$
$$\psi = b_1 \xi^{\nu-1} + b_2 \xi^{\nu-2}\eta + \cdots + b_\nu \eta^{\nu-1}$$

und berechnen die Functionaldeterminante derselben

$$(\varphi, \psi)_1 = p_0 \xi^{2\nu-4} + p_1 \xi^{2\nu-5}\eta + \cdots + p_{2\nu-4}\eta^{2\nu-4}.$$

Die Coefficienten $p_0, p_1, \ldots, p_{2\nu-4}$ sind als lineare Combinationen der Determinanten p_{ik} selber Invarianten der linearen Grundformen, und man erkennt leicht, dass, wenn diese Invarianten $p_0, p_1, \ldots, p_{2\nu-4}$ sämmtlich Null sind, nothwendig entweder alle Coefficienten der Form φ oder diejenigen von ψ verschwinden oder beide Formen bis auf einen numerischen Factor mit einander übereinstimmen. In allen diesen Fällen sind sämmtliche Determinanten p_{ik} gleich Null und hieraus folgt mit Hülfe unseres Satzes, dass die Determinanten p_{ik} ganze

algebraische Functionen von $p_0, p_1, \ldots, p_{2\nu-4}$ sind*), woraus zugleich die Unabhängigkeit der letzteren $2\nu - 3$ Invarianten geschlossen werden kann.

§ 7.

Systeme von simultanen Grundformen.

Um die in § 5 für eine binäre Grundform erhaltenen Resultate auf ein System simultaner binärer Grundformen auszudehnen, verfahren wir, wie folgt: wir betrachten die beiden binären Formen von der nämlichen Ordnung n

$$f = a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \cdots + a_n x_2^n,$$

$$g = b_0 x_1^n + \binom{n}{1} b_1 x_1^{n-1} x_2 + \cdots + b_n x_2^n$$

und bilden dann eine lineare Combination $\lambda f + \mu g$ derselben, wo λ und μ 2 Parameter bedeuten. Wenn nun die Invarianten von $\lambda f + \mu g$ für alle Werthe λ und μ verschwinden, so muss nach dem in § 5 bewiesenen Satze die Form $\lambda f + \mu g$ nothwendigerweise einen $\frac{n}{2} + 1$ bezüglich $\frac{n+1}{2}$ fachen Linearfactor besitzen, was für Werthe auch die Parameter λ und μ annehmen mögen und hieraus folgt leicht, dass f und g selber die nämliche Linearform als $\frac{n}{2} + 1$ bezüglich $\frac{n+1}{2}$-fachen Factor enthalten müssen, ein Umstand, welcher seinerseits zur Folge hat, dass auch sämmtliche Simultaninvarianten der beiden Formen f und g gleich 0 sind d. h.

Wenn $J_1, \ldots, J_\mu$ solche Invarianten der einen Grundform f sind, durch welche sich alle übrigen Invarianten dieser Grundform ganz und algebraisch ausdrücken lassen, so gelangt man von diesen Invarianten $J_1, \ldots, J_\mu$ durch wiederholte Anwendung des Aronhold'schen Processes

$$b_0 \frac{\partial}{\partial a_0} + b_1 \frac{\partial}{\partial a_1} + \cdots + b_n \frac{\partial}{\partial a_n}$$

zu einem System von Simultaninvarianten, welches die Eigenschaft besitzt, dass jede Simultaninvariante der beiden Formen f und g eine ganze algebraische Function der Simultaninvarianten dieses Systems ist.

Durch diesen Satz tritt eine neue fundamentale Eigenschaft des Aronhold'schen Processes zu Tage.

---

*) Das nämliche Resultat habe ich auf einem völlig anderen Wege erhalten in meiner Arbeit: „Ueber Büschel von binären Formen mit vorgeschriebener Functionaldeterminante"; Mathematische Annalen Bd. 33, S. 233.

Der besondere Fall $n = 3$ ist bereits oben behandelt worden. Im Fall zweier biquadratischer Grundformen haben wir die beiden Invarianten i und j in Betracht zu ziehen und setzen

$$i(\lambda f + \mu g) = i_0 \lambda^2 + i_1 \lambda \mu + i_2 \mu^2,$$
$$j(\lambda f + \mu g) = j_0 \lambda^3 + j_1 \lambda^2 \mu + j_2 \lambda \mu^2 + j_3 \mu^3.$$

Es folgt dann aus entsprechenden Gründen wie vorhin, dass jede Simultaninvariante der beiden Formen f und g eine ganze algebraische Function der 7 Invarianten $i_0, i_1, i_2, j_0, j_1, j_2, j_3$ ist und diese 7 Simultaninvarianten sind algebraisch von einander unabhängig, da die Zahl $\varkappa$ für das betrachtete Grundformensystem den Werth 7 besitzt.

Setzt man an Stelle der binären Form g die n^{te} Potenz einer Linearform, so gewinnen wir das folgende Resultat:

Aus den Invarianten $J_1, \ldots, J_\mu$ der binären Grundform f ergiebt sich durch wiederholte Anwendung des Processes

$$x_2^n \frac{\partial}{\partial a_0} - x_1 x_2^{n-1} \frac{\partial}{\partial a_1} + \cdots \pm x_1^n \frac{\partial}{\partial a_n}$$

ein System von Covarianten, welches die Eigenschaft besitzt, dass alle übrigen Covarianten der Grundform ganze algebraische Functionen der Covarianten des erhaltenen Systems und der Invarianten $J_1, \ldots, J_\mu$ sind.

Beispielsweise erhält man für die binäre cubische Grundform f durch ein- und zweimalige Anwendung jenes Processes auf ihre Discriminante D die beiden Covarianten $t = (f, h)_1$ und f^2; in der That ist die Hesse'sche Covariante $h = (f, f)_2$ eine ganze algebraische Function von D, t und f, da ja ihre dritte Potenz eine ganze rationale Function dieser invarianten Bildungen wird. Wenden wir ferner auf die Invarianten i und j einer biquadratischen binären Form j jenen Process an, so gelangen wir zu den Covarianten f und $h = (f, f)_2$ und in der That ist das Quadrat der allein noch übrigen Covariante $t = (f, h)_1$ eine ganze rationale Function von i, j, f und h.

Sämmtliche Ueberlegungen lassen sich leicht auf die Theorie der Combinanten von zwei oder mehr binären Grundformen übertragen. So zeigt sich, dass die Combinantinvarianten der beiden Formen f und g dann und nur dann sämmtlich verschwinden, wenn unter den Formen des Formenbüschels $\lambda f + \mu g$ sich zwei Formen befinden, von denen die eine einen r-fachen Linearfactor besitzt und die andere diesen nämlichen Linearfactor $n + 1 - r$-fach enthält und hieraus folgt der Satz:

Eine jede Combinantinvariante zweier binärer Formen f, g ist eine ganze algebraische Function der Invarianten ihrer Functionaldeterminante $(f, g)_1$.

Die Ausdehnung der bisherigen Entwicklungen auf die Theorie der Formen mit mehr Veränderlichen ist ohne weiteres nur in dem

Maasse möglich, als man die Besonderheit derjenigen Formen anzugeben weiss, welche die Eigenschaft besitzen, dass alle ihre Invarianten 0 sind. So ist beispielsweise im Falle einer ternären Form dritter Ordnung das Verschwinden aller Invarianten die Bedingung für das Auftreten eines Rückkehrpunktes in der durch Nullsetzen der Form dargestellten Curve. Wenn wir nun 2 ternäre cubische Formen linear combiniren und die beiden Invarianten

$$S(\lambda f + \mu g) = S_0 \lambda^4 + \cdots + S_4 \mu^4,$$
$$T(\lambda f + \mu g) = T_0 \lambda^6 + \cdots + T_6 \mu^6$$

bilden, so folgt durch die entsprechende Schlussweise, dass alle simultanen Invarianten der beiden Formen f und g ganze algebraische Functionen der 12 Invarianten $S_0, \ldots, S_4$, $T_0, \ldots, T_6$ sind und da die Zahl $\varkappa$ ebenfalls gleich 12 ist, so erkennen wir zugleich, dass diese 12 Invarianten von einander algebraisch unabhängig sind.

Auch die ternäre biquadratische Form kann noch auf dem nämlichen Wege durch Rechnung behandelt werden, wogegen die Erledigung der entsprechenden Probleme für höhere Fälle neuer und allgemeinerer Methoden*) bedarf.

III.

Der Grad des Invariantenkörpers.

§ 8.

Darstellung des asymptotischen Werthes der Zahl $\varphi(\sigma)$.

In § 2 ist ein System von Invarianten $J, J_1, \ldots, J_\varkappa$ bestimmt worden, von der Beschaffenheit, dass alle übrigen Invarianten der Grundform sich ganz und algebraisch durch $J_1, \ldots, J_\varkappa$ und rational durch $J, J_1, \ldots, J_\varkappa$ ausdrücken lassen. Die irreducible Gleichung, welcher J genügt, ist von der Gestalt

$$J^k + G_1 J^{k-1} + G_2 J^{k-2} + \cdots + G_k = 0,$$

wo $G_1, G_2, \ldots, G_k$ ganze rationale Functionen von $J_1, \ldots, J_\varkappa$ sind. Der Grad k dieser Gleichung ist zugleich der Grad des Invariantenkörpers.

Um zunächst für eine binäre Grundform f von der n^{ten} Ordnung die Zahl k zu bestimmen, betrachten wir die Anzahl $\varphi(\sigma)$ derjenigen Invarianten der Grundform f, deren Grad in den Coefficienten der Grundform die Zahl σ nicht überschreitet und zwischen denen keine lineare Relation mit constanten Coefficienten stattfindet. Die Berechnung dieser Zahl $\varphi(\sigma)$ kann auf 2 verschiedenen Wegen geschehen

*) Vgl. die Abschnitte IV und V dieser Arbeit.

und die Vergleichung der auf beiden Wegen gefundenen Resultate für den Grenzfall $\sigma = \infty$ ergiebt dann den gesuchten Werth von k.

Nach § 2 ist jede Invariante i in der Gestalt

$$i = \frac{\Gamma_1 J^{k-1} + \Gamma_2 J^{k-2} + \cdots + \Gamma_k}{D}$$

darstellbar, wo $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$, D ganze rationale Functionen von $J_1, \ldots, J_k$ sind. Aus dieser Darstellungsweise können wir eine obere und eine untere Grenze für die Zahl $\varphi(\sigma)$ ableiten. Beachten wir nämlich dass im vorliegenden Falle die Zahl $\varkappa$ den Werth $n-2$ hat und bezeichnen wir mit $\nu, \nu_1, \ldots, \nu_{n-2}$, δ die Grade der Invarianten $J, J_1, \ldots, J_{n-2}$, D und mit $\lambda(\sigma)$ die Anzahl der Systeme von positiven ganzen Zahlen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-2}$, welche der Ungleichung

$$\nu_1 \xi_1 + \nu_2 \xi_2 + \cdots + \nu_{n-2} \xi_{n-2} \leqq \sigma$$

genügen, so finden wir leicht

$$\lambda(\sigma) + \lambda(\sigma - \nu) + \lambda(\sigma - 2\nu) + \cdots + \lambda(\sigma - [k-1]\,\nu) \leqq \varphi(\sigma),$$

$$\varphi(\sigma) \leqq \lambda(\sigma+\delta) + \lambda(\sigma+\delta-\nu) + \lambda(\sigma+\delta-2\nu) + \cdots + \lambda(\sigma+\delta-[k-1]\,\nu).$$

Nun gilt für die eben definirte Zahl $\lambda(\sigma)$ die Formel

$$\underset{\sigma=\infty}{L}\, \frac{\lambda(\sigma)}{\sigma^{n-2}} = \frac{1}{\overline{n-2}\,!}\, \frac{1}{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_{n-2}}$$

und somit folgt aus obiger Ungleichung

$$\underset{\sigma=\infty}{L}\, \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma^{n-2}} = \frac{1}{\overline{n-2}\,!}\, \frac{k}{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_{n-2}}.$$

§ 9.

Berechnung des Grades k des Invariantenkörpers für eine binäre Grundform n^{ter} Ordnung.

Wir können eben diesen Grenzwerth noch auf einem anderen Wege, nämlich mit Hilfe derjenigen Methode bestimmen, welche von Cayley und Sylvester zur Abzählung der Invarianten von vorgeschriebenen Graden benutzt worden ist. Bekanntlich ist die Anzahl der linear unabhängigen Invarianten vom Grade σ in den Cofficienten der binären Grundform n^{ter} Ordnung gleich dem Coefficienten von $r^{\frac{1}{2}n\sigma}$ in der Entwicklung des Ausdruckes

$$f(r) = \frac{(1-r^{\sigma+1})(1-r^{\sigma+2})\cdots(1-r^{\sigma+n})}{(1-r^2)(1-r^3)\cdots(1-r^n)}\ ^{*)}.$$

*) Vgl. Faà di Bruno, Theorie der binären Formen Leipzig 1881, S. 194.

Dieser Ausdruck kann in die Gestalt

$$f(r) = f_0(r) + r^{\sigma} f_1(r) + r^{2\sigma} f_2(r) + \cdots + r^{n\sigma} f_n(r)$$

gebracht werden, wo $f_0(r), f_1(r), \ldots, f_n(r)$ rationale Functionen von r bedeuten, welche durch die Identität

$$u^n f_0 + u^{n-1} f_1 + \cdots + f_n = \frac{(u-r)(u-r^2)\ldots(u-r^n)}{(1-r^2)(1-r^3)\ldots(1-r^n)}$$

definirt sind. Zur Ausführung der Rechnung bedarf es der Unterscheidung zwischen ungerader und gerader Ordnung n.

Es sei erstens die Ordnung n eine ungerade Zahl. Da es in diesem Falle nur Invarianten von geradem Grade giebt, so erhalten wir offenbar die gesuchte Zahl $\varphi(\sigma)$, wenn wir den Coefficienten

$$\begin{array}{llllll} \text{von } r^n & \text{in den} & \text{Ausdruck} & f_0 + r^2 f_1 + r^4 f_2 + \cdots, \\ \text{,, } r^{2n} & \text{,, ,,} & \text{,,} & f_0 + r^4 f_1 + r^8 f_2 + \cdots, \\ \text{,, } r^{3n} & \text{,, ,,} & \text{,,} & f_0 + r^6 f_1 + r^{12} f_2 + \cdots, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \text{,, } r^{\frac{\sigma}{2}n} & \text{,, ,,} & \text{,,} & f_0 + r^{\sigma} f_1 + r^{2\sigma} f_2 + \cdots \end{array}$$

bestimmen und die Summe dieser Coefficienten bilden oder, was auf das Nämliche hinausläuft, wenn wir die Coefficienten

$$\begin{array}{llllll} \text{von } r^n, & r^{2n}, & r^{3n}, & \ldots, & r^{\frac{\sigma}{2}n} & \text{in } f_0, \\ \text{,, } r^{n-2}, & r^{2(n-2)}, & r^{3(n-2)}, & \ldots, & r^{\frac{\sigma}{2}(n-2)} & \text{,, } f_1, \\ \text{,, } r^{n-4}, & r^{2(n-4)}, & r^{3(n-4)}, & \ldots, & r^{\frac{\sigma}{2}(n-4)} & \text{,, } f_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \text{,, } r, & r^2, & r^3, & \ldots, & r^{\frac{\sigma}{2}} & \text{,, } f_{\frac{n-1}{2}} \end{array}$$

sämmtlich zu einander addiren. Verstehen wir nun unter ε_n eine primitive n^{te} Einheitswurzel, so ist, wie man sieht, die Summe der Coefficienten von $r^n, r^{2n}, r^{3n}, \ldots, r^{\frac{\sigma}{2}n}$ in f_0 gleich dem n^{ten} Theil der Summe der ersten $\frac{\sigma}{2}n$ Coefficienten in der Entwicklung des Ausdruckes

$$f_0'(r) = f_0(r) + f_0(\varepsilon_n r) + f_0(\varepsilon_n^2 r) + \cdots + f_0(\varepsilon_n^{n-1} r).$$

Verstehen wir ferner unter ε_{n-2} eine primitive $n-2^{\text{te}}$ Einheitswurzel, so ist die Summe der betreffenden Coefficienten in f_1 gleich dem $n-2^{\text{ten}}$ Theile der Summe der ersten $\frac{\sigma}{2}(n-2)$ Coefficienten in der Entwicklung des Ausdruckes

$$f_1'(r) = f_1(r) + f_1(\varepsilon_{n-2} r) + f_1(\varepsilon_{n-2}^2 r) + \cdots + f_1(\varepsilon_{n-2}^{n-3} r).$$

Endlich werde

$$f'_{\frac{n-1}{2}}(r) = f_{\frac{n-1}{2}}(r)$$

gesetzt. Wenn wir jetzt für den Parameter r in den Ausdrücken $f'_0, f'_1, \ldots, f'_{\frac{n-1}{2}}$ bezüglich die Grössen

$$t^{\frac{1\cdot3\cdot5\cdots n}{n}}, \quad t^{\frac{1\cdot3\cdot5\cdots n}{n-2}}, \ldots, t^{1\cdot3\cdot5\cdots n}$$

einsetzen, so erkennen wir, dass die gesuchte Zahl $\varphi(\sigma)$ gleich der Summe der ersten $\frac{\sigma}{2}\,1\,.\,3\,.\,5\ldots n$ Coefficienten in der Entwicklung des Ausdruckes

$$h(t) = \frac{1}{n} f'_0\left(t^{\frac{1\cdot3\cdot5\cdots n}{n}}\right) + \frac{1}{n-2} f'_1\left(t^{\frac{1\cdot3\cdot5\cdots n}{n-2}}\right) + \cdots + f'_{\frac{n-1}{2}}\left(t^{1\cdot3\cdot5\cdots n}\right)$$

wird.

Aus einem bekannten Satze von Abel lässt sich leicht die folgende Thatsache ableiten:

Wenn die Coefficienten einer Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots$$

von der Beschaffenheit sind, dass, unter $\varkappa$ eine ganze Zahl verstanden, der Ausdruck

$$\frac{a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_\varrho}{\varrho^\varkappa}$$

für unendlich wachsende ϱ sich einer endlichen Grenze nähert, so ist diese endliche Grenze

$$\frac{1}{\varkappa!} \underset{t=1}{L}\,[(1-t)^\varkappa\,\mathfrak{P}(t)].$$

Mit Hilfe dieses Satzes findet man

$$\underset{\sigma=\infty}{L} \frac{\varphi(\sigma)}{\left(\frac{\sigma}{2}\,1\,.\,3\,.\,5\ldots n\right)^{n-2}} = \frac{1}{(n-2)!} \underset{t=1}{L}\,[(1-t)^{n-2}\,h(t)].$$

Falls nun $n > 3$ ist, kann

$$h(t) = \frac{1}{n} f_0\left(t^{\frac{1\cdot3\cdot5\cdots n}{n}}\right) + \frac{1}{n-2} f_1\left(t^{\frac{1\cdot3\cdot5\cdots n}{n-2}}\right) + \cdots + f_{\frac{n-1}{2}}\left(t^{1\cdot3\cdot5\cdots n}\right) + h'(t)$$

gesetzt werden, wo $h'(t)$ eine solche rationale Function von t bedeutet, dass der Ausdruck $(1-t)^{n-2}\,h'(t)$ in der Grenze für $t=1$ verschwindet. Ferner ist für einen beliebigen Index i

$$(1-t)^{n-1} f_i(r) = \frac{g_i(r)}{\left[2\cdot\frac{1.3.5\ldots n}{n-2i}\right]\left[3\cdot\frac{1.3.5\ldots n}{n-2i}\right]\cdots\left[n\cdot\frac{1.3.5\ldots n}{n-2i}\right]},$$

wo zur Abkürzung

$$[M] = 1 + t + t^2 + \cdots + t^{M-1}$$

gesetzt ist und wo die Zeichen $g_i(r)$ rationale Functionen von r bedeuten, welche durch die Identität

$$(u - r)(u - r^2) \cdots (u - r^n) = g_0(r)\, u^n + g_1(r)\, u^{n-1} + \cdots + g_n(r)$$

definirt sind. Nun führt eine einfache Rechnung zu folgender Formel

$$\underset{t=1}{L}\,[(1 - t)^{n-2}\, h(t)]$$

$$= \sum \frac{1}{n-2i} \frac{g_i(1)\left[\frac{dN(t)}{dt}\right]_{t=1} - \left[\frac{dg_i(r)}{dr}\right]_{r=1} \frac{1.3.5\ldots n}{n-2i} N(1)}{N^2(1)},$$

wo die Summe über die Zahlen $i = 0, 1, 2, \cdots, \frac{n-1}{2}$ zu erstrecken ist und wo zur Abkürzung

$$N(t) = \left[2 \cdot \frac{1.3.5\ldots n}{n-2i}\right]\left[3 \cdot \frac{1.3.5\ldots n}{n-2i}\right] \cdots \left[n \cdot \frac{1.3.5\ldots n}{n-2i}\right]$$

gesetzt ist und hieraus folgt durch geeignete Umformung der Summe rechter Hand

$$\underset{t=1}{L}\,[(1 - t)^{n-2}\, h(t)]$$

$$= -\frac{1}{2 \,.\, n!\,(1.3.5\ldots n)^{n-2}} \sum (-1)^i \binom{n}{i} (n - 2i)^{n-3},$$

wo die Summe wiederum über die Zahlen $i = 0, 1, 2, \ldots \frac{n-1}{2}$ zu erstrecken ist.

Die Vergleichung mit der am Schlusse des § 8 erhaltenen Formel liefert *das Resultat*

$$\frac{k}{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_{n-2}} = -\frac{1}{4}\frac{1}{n!} \sum^{i} (-1)^i \binom{n}{i} \left(\frac{n}{2} - i\right)^{n-3}. \text{*)}$$

$$\left(i = 0, 1, 2, \cdots, \frac{n-1}{2}\right).$$

Die eben für den Grad k des Invariantenkörpers gewonnene Formel wird im Falle einer binären Grundform 5^ter^ Ordnung leicht bestätigt. Da nämlich die 3 Invarianten A, B, C bezüglich von den Graden 4, 8, 12 sind, so haben wir $\nu_1 = 4$, $\nu_2 = 8$, $\nu_3 = 12$ zu setzen und es ergiebt sich dann $k = 2$. In der That genügt die schiefe Invariante R einer Gleichung 2^ten^ Grades und durch diese 4 Invarianten A, B, C, R ist der Invariantenkörper völlig bestimmt.

Es sei z w e i t e n s die Ordnung n eine gerade Zahl. Wir erhalten dann in entsprechender Weise wie vorhin die gesuchte Zahl $\varphi(\sigma)$, wenn wir die Coefficienten

---

*) Diese Formel, sowie die entsprechende für eine gerade Ordnung n habe ich bereits in den Berichten der Gesellschaft der Naturforscher und Aerzte, Halle 1891 mitgetheilt.

$$
\begin{array}{llllllll}
\text{von } & r^0, & r^{1\cdot\frac{n}{2}}, & r^{2\cdot\frac{n}{2}}, & r^{3\cdot\frac{n}{2}}, & \ldots, & r^{\sigma\cdot\frac{n}{2}} & \text{in } f_0, \\
\text{,,} & r^0, & r^{1\left(\frac{n}{2}-1\right)}, & r^{2\left(\frac{n}{2}-1\right)}, & r^{3\left(\frac{n}{2}-1\right)}, & \ldots, & r^{\sigma\left(\frac{n}{2}-1\right)} & \text{,, } f_1, \\
\text{,,} & r^0, & r^{1\left(\frac{n}{2}-2\right)}, & r^{2\left(\frac{n}{2}-2\right)}, & r^{3\left(\frac{n}{2}-2\right)}, & \ldots, & r^{\sigma\left(\frac{n}{2}-2\right)} & \text{,, } f_2, \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\text{,,} & r^0, & r^1, & r^2, & r^3, & \ldots, & r^\sigma, & \text{,, } f_{\left(\frac{n}{2}-1\right)}
\end{array}
$$

sämmtlich zu einander addiren. Mit Hilfe der primitiven Einheitswurzeln $\varepsilon_{\frac{n}{2}}, \varepsilon_{\frac{n}{2}-1}, \ldots$ von den Graden $\frac{n}{2}, \frac{n}{2}-1, \ldots$ gelangen wir entsprechend wie vorhin zu den Functionen $f_0', f_1', \ldots, f'_{\left(\frac{n}{2}-1\right)}$ und wenn wir in diesen Functionen für den Parameter r bezüglich die Grössen $t^{\frac{\frac{n}{2}!}{\frac{n}{2}}}, t^{\frac{\frac{n}{2}!}{\frac{n}{2}-1}}, \ldots, t^{\frac{n}{2}!}$ einsetzen, so erkennen wir, dass die gesuchte Zahl $\varphi(\sigma)$ gleich der Summe der ersten $\sigma\frac{n}{2}!$ Coefficienten in der Entwicklung des Ausdruckes

$$h(t) = \frac{1}{\frac{n}{2}} f_0'\left(t^{\frac{\frac{n}{2}!}{\frac{n}{2}}}\right) + \frac{1}{\frac{n}{2}-1} f_1'\left(t^{\frac{\frac{n}{2}!}{\frac{n}{2}-1}}\right) + \cdots + f'_{\left(\frac{n}{2}-1\right)}\left(t^{\frac{n}{2}!}\right)$$

ist und hieraus folgt dann durch dieselbe Schlussweise, wie vorhin

$$\underset{\sigma=\infty}{L} \frac{\varphi(\sigma)}{\left(\sigma\frac{n}{2}!\right)^{n-2}} = \frac{1}{(n-2)!} \underset{t=1}{L} [(1-t)^{n-2} h(t)].$$

Falls nun $n > 4$ ist, kann wiederum

$$h(t) = \frac{1}{\frac{n}{2}} f_0\left(t^{\frac{\frac{n}{2}!}{\frac{n}{2}}}\right) + \frac{1}{\frac{n}{2}-1} f_1\left(t^{\frac{\frac{n}{2}!}{\frac{n}{2}-1}}\right) + \cdots + f_{\left(\frac{n}{2}-1\right)}\left(t^{\frac{n}{2}!}\right) + h'(t)$$

gesetzt werden, wo $h'(t)$ eine solche rationale Function von t bedeutet, dass der Ausdruck $(1-t)^{n-2} h'(t)$ in der Grenze für $t=1$ verschwindet. Ferner ist für einen beliebigen Index i unter Benutzung der oben erklärten Abkürzungen

$$(1-t)^{n-1} f_i(r) = \frac{g_i(r)}{\left[2 \cdot \frac{\frac{n}{2}!}{\frac{n}{2}-i}\right]\left[3 \cdot \frac{\frac{n}{2}!}{\frac{n}{2}-i}\right] \cdots \left[n \cdot \frac{\frac{n}{2}!}{\frac{n}{2}-i}\right]}.$$

Bezeichnen wir den Nenner des Ausdruckes rechter Hand mit $N(t)$, so wird

$$\underset{t=1}{L}\,[1-t)^{n-2} h(t)]$$

$$= \sum \frac{1}{n-2i} \frac{g_i(1)\left[\frac{dN(t)}{dt}\right]_{t=1} - \left[\frac{dg_i(r)}{dr}\right]_{r=1} \frac{\frac{n}{2}!}{\frac{n}{2}-i} N(1)}{N^2(1)}$$

$$= -\frac{1}{2 \cdot n! \left(\frac{n}{2}!\right)^{n-2}} \sum (-1)^i \binom{n}{i} \left(\frac{n}{2}-i\right)^{n-3},$$

wo die Summe über die Zahlen $i = 0, 1, 2, \ldots, \frac{n}{2} - 1$ zu erstrecken ist.

Die Vergleichung mit der am Schlusse des § 8 erhaltenen Formel liefert *das Resultat*

$$\frac{k}{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_{n-2}} = -\frac{1}{2}\frac{1}{n!} \sum^{i} (-1)^i \binom{n}{i} \left(\frac{n}{2}-i\right)^{n-3}.$$

$$\left(i = 0, 1, 2, \cdots, \frac{n}{2} - 1\right).$$

Die eben gewonnene Formel wird im Falle einer binären Grundform 6^{ter} Ordnung leicht bestätigt. Da nämlich die 4 Invarianten derselben A, B, C, D bezüglich von den Graden 2, 4, 6, 10 sind, so haben wir $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 4$, $\nu_3 = 6$, $\nu_4 = 10$ zu setzen und es ergiebt sich dann $k = 2$. In der That genügt die schiefe Invariante R einer Gleichung 2^{ten} Grades und durch die 5 genannten Invarianten ist der Invariantenkörper völlig bestimmt.

§ 10.

Die typische Darstellung einer binären Grundform.

Die in § 8 und § 9 angewandten Methoden führen zugleich zu einem neuen Beweise für die Möglichkeit einer typischen Darstellung der binären Grundform.

Um dies zu zeigen, nehmen wir **erstens** an, es sei die Ordnung der binären Grundform n eine ungerade Zahl. Die linearen Covarianten der Grundform sind dann sämmtlich von ungeradem Grade in den Coefficienten der Grundform und es bezeichne $\varphi_1(\sigma)$ die Anzahl der linearen Covarianten, deren Grad in den Coefficienten der Grundform

die Zahl σ nicht überschreitet und zwischen denen keine lineare Relation mit constanten Coefficienten stattfindet. Um die typische Darstellung der Grundform auszuführen, bedarf es zweier linearer Covarianten l und m, welche nicht durch eine Relation von der Gestalt

$$Al + Bm = 0$$

mit einander verbunden sind, wenn man unter A und B geeignet gewählte Invarianten versteht. Die Existenz zweier solcher linearer Covarianten kann, wie folgt, bewiesen werden: nehmen wir an die Grundform besitze überhaupt keine lineare Covariante, so hätte offenbar $\varphi_1(\sigma)$ für alle σ den Werth 0. Gäbe es andererseits eine lineare Covariante l von der Art, dass alle übrigen Covarianten der Grundform gleich $A\,l$ sind, wo A eine Invariante bedeutet, so wäre nothwendigerweise, wenn λ den Grad von l bezeichnet

$$\varphi_1(\sigma) = \varphi(\sigma - \lambda)$$

und folglich

$$\underset{\sigma=\infty}{L} \frac{\varphi_1(\sigma)}{\varphi(\sigma)} = 1.$$

Nehmen wir endlich die Existenz zweier linearer Covarianten l und m von der gewünschten Beschaffenheit an und bezeichnen wir mit $p_1, p_2, \ldots, p_r$ die übrigen im vollen Formensysteme vorkommenden linearen Covarianten, so ist jede dieser Covarianten in der Gestalt

$$p_i = \frac{A_i l + B_i m}{C_i}$$

darstellbar, wo A_i, B_i, C_i Invarianten sind und es ist folglich eine jede lineare Covariante p der Grundform in der Gestalt

$$p = \frac{Al + Bm}{C_1 C_2 \ldots C_r}$$

darstellbar. Bezeichnen wir jetzt den Grad der linearen Covariante m mit μ und den Grad der Invariante $C_1 C_2 \ldots C_r$ mit γ, so ergiebt sich für $\varphi_1(\sigma)$ die Ungleichung

$$\varphi(\sigma - \lambda) + \varphi(\sigma - \mu) \leqq \varphi_1(\sigma) \leqq \varphi(\sigma - \lambda + \gamma) + \varphi(\sigma - \mu + \gamma)$$

und folglich ist

$$\underset{\sigma=\infty}{L} \frac{\varphi_1(\sigma)}{\varphi(\sigma)} = 2.$$

Um nun zu entscheiden, welchen Werth der Ausdruck $\underset{\sigma=\infty}{L} \frac{\varphi_1(\sigma)}{\varphi(\sigma)}$ in Wirklichkeit besitzt, wenden wir wiederum die Cayley-Sylvester'schen Abzählungssätze an. Diesen Sätzen zufolge ist die Zahl der linearen Covarianten vom Grade σ gleich dem Coefficienten von $r^{\frac{1}{2}(n\sigma-1)}$ in der Entwicklung des Ausdruckes f, und wir erhalten daher die gesuchte Zahl $\varphi_1(\sigma)$, wenn wir die Coefficienten

$$
\begin{array}{llllll}
\text{von} & r^{\frac{1}{2}(n-1)}, & r^{\frac{1}{2}(3n-1)}, & r^{\frac{1}{2}(5n-1)}, & \ldots, r^{\frac{1}{2}(\sigma n-1)} & \text{in } f_0, \\
,, & r^{\frac{1}{2}(n-1)-1}, & r^{\frac{1}{2}(3n-1)-3}, & r^{\frac{1}{2}(5n-1)-5}, & \ldots, r^{\frac{1}{2}(\sigma n-1)-\sigma} & ,,\ f_1, \\
,, & r^{\frac{1}{2}(n-1)-2}, & r^{\frac{1}{2}(3n-1)-6}, & r^{\frac{1}{2}(5n-1)-10}, & \ldots, r^{\frac{1}{2}(\sigma n-1)-2\sigma} & ,,\ f_2, \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
,, & r^0, & r^1, & r^2, & \ldots, r^{\frac{1}{2}(\sigma-1)} & ,,\ f_{\left(\frac{n-1}{2}\right)}
\end{array}
$$

sämmtlich zu einander addiren. Die Ausführung der Rechnung ergiebt dann unter der Voraussetzung $n > 3$ für den Ausdruck $\underset{\sigma=\infty}{L} \frac{\varphi_1(\sigma)}{\varphi(\sigma)}$ den Werth 2, und hiermit ist der gewünschte Nachweis geführt.

Ist zweitens die Ordnung n eine gerade Zahl, so bezeichnen wir mit $\varphi_2(\sigma)$ die Anzahl der quadratischen Covarianten, deren Grad in den Coefficienten der Grundform die Zahl σ nicht überschreitet und zwischen denen keine lineare Relation mit constanten Coefficienten stattfindet. Um die typische Darstellung der Grundform auszuführen, bedarf es dreier quadratischer Covarianten l, m, p zwischen denen keine Relation von der Gestalt

$$Al + Bm + Cp = 0$$

besteht, wo A, B, C Invarianten sind. Wir erkennen wiederum durch die nämliche Schlussweise wie vorhin, dass es 3 solche Covarianten nothwendig giebt, falls der Quotient $\frac{\varphi_2(\sigma)}{\varphi(\sigma)}$ in der Grenze für $\sigma = \infty$ den Werth 3 annimmt. Dies trifft unter der Voraussetzung $n > 4$ in der That zu, wie eine der vorigen entsprechende Rechnung zeigt.

Die bisherigen Resultate dieses Abschnittes III sind auf rein arithmetischem Wege abgeleitet worden und nur am Anfange des § 8 ist die aus algebraischen Betrachtungen bekannte Thatsache benutzt worden, dass die Zahl $\varkappa$ der algebraisch unabhängigen Invarianten einer binären Grundform n^{ter} Ordnung den Werth $n - 2$ hat. Auch diese Thatsache ergiebt sich, wie im Folgenden kurz gezeigt werden soll, mit Hilfe unserer Methode ohne Benutzung eines Eliminationsverfahrens.

Die Ueberlegungen des § 8 zeigen, dass der Quotient $\frac{\varphi(\sigma)}{\sigma^{\varkappa}}$ in der Grenze für $\sigma = \infty$ einen endlichen von 0 verschiedenen Werth annimmt. In § 9 ist gezeigt worden, dass der Ausdruck $\underset{\sigma=\infty}{L} \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma^{n-2}}$ bis auf einen von 0 verschiedenen Zahlenfactor gleich der Summe

$$\sum^{i}(-1)^i\binom{n}{i}\left(\frac{n}{2}-i\right)^{n-3} \qquad \left(i=0,1,2,\cdots,\frac{n-1}{2}\text{ bezgl. }\frac{n}{2}-1\right)$$

ist. Aus diesen Thatsachen kann $x = n - 2$ geschlossen werden, sobald der Nachweis dafür geführt ist, dass jene Summe eine von 0 verschiedene Zahl darstellt. Um diesen Nachweis zu führen, bestimmen wir die Anzahl der Covarianten $l, m, \ldots, p$, welche in den Veränderlichen von der Ordnung ν sind und zwischen denen keine lineare Relation von der Gestalt

$$Al + Bm + \cdots + Ep = 0$$

besteht, wo $A, B, \ldots, E$ Invarianten sind. Diese Anzahl findet man gleich dem Ausdrucke $\underset{\sigma=\infty}{L}\frac{\varphi_\nu(\sigma)}{\varphi(\sigma)}$, wo $\varphi_\nu(\sigma)$ die Anzahl der Covarianten ν^{ter} Ordnung bezeichnet, deren Grad in den Coefficienten der Grundform die Zahl σ nicht überschreitet und zwischen denen keine lineare Relation mit constanten Coefficienten stattfindet. Berechnen wir diesen Grenzwerth mit Hilfe der Cayley-Sylvester'schen Abzählungssätze entsprechend, wie dies oben für die Fälle $\nu = 1$ und $\nu = 2$ geschehen ist, so erhalten wir einen Ausdruck, in welchem wiederum jene Summe

$$\sum^{i}(-1)^i\binom{n}{i}\left(\frac{n}{2}-i\right)^{n-3}$$

auftritt. Trägt man in diesen Ausdruck an Stelle jener Summe den Werth 0 ein und legt dann der Zahl ν einen genügend grossen Werth bei, so fällt, wie die Rechnung zeigt, der Werth des neu erhaltenen Ausdruckes grösser als $\nu + 1$ aus, und dieser Umstand widerspricht der Thatsache, dass die Anzahl der Covarianten $l, m, \ldots, p$ von der ν^{ten} Ordnung höchstens gleich $\nu + 1$ sein darf. Die Annahme, dass jene Summe den Werth 0 hat, trifft folglich nicht zu und *damit ist zugleich der gewünschte Nachweis erbracht.*

Mit Hilfe der typischen Darstellung einer binären Grundform ist von A. Clebsch*) der folgende Satz bewiesen worden:

Wenn für 2 binäre Formen von irgend einer Ordnung $n > 4$ mit numerischen Coefficienten die entsprechenden Invarianten sämmtlich die nämlichen Werthe haben und ausserdem eine gewisse im Nenner der typisch dargestellten Coefficienten auftretende Invariante N von 0 verschieden ist, so gehören die beiden Formen zu der nämlichen Classe.

Dabei bezeichne ich 2 binäre Formen als zugehörig zur nämlichen Classe, wenn man dieselben durch eine lineare Substitution von nicht verschwindender Determinante in einander transformiren kann. Wenn wir die Werthe für die Invarianten $J_1, \ldots, J_{n-2}$ überdies derart wählen, dass die Discriminante D der Gleichung für J von 0 verschieden ist,

*) Theorie der binären Formen.

so giebt die Zahl k an, wie viel Werthe von J mit jenen Werthen von $J_1, \ldots, J_{n-2}$ vereinbar sind, und hieraus folgt:

Der Grad k des Invariantenkörpers giebt zugleich im allgemeinen die Zahl der von einander verschiedenen Classen von binären Formen an, deren Invarianten $J_1, \ldots, J_{n-2}$ gleich gegebenen Grössen sind.

§ 11.

Das System von ν binären Linearformen.

Die Methoden dieses Abschnittes III lassen sich auch auf Systeme von simultanen binären Grundformen anwenden. Als einfachstes Beispiel diene das System der ν binären Linearformen

$$a_1 x + b_1 y, \quad a_2 x + b_2 y, \ldots, \quad a_\nu x + b_\nu y,$$

welches bereits in § 6 behandelt worden ist. Das volle Invariantensystem besteht aus den Determinanten p_{ik}. Ausserdem genügt jede dieser Invarianten der Differentialgleichung

$$a_1 \frac{\partial J}{\partial b_1} + a_2 \frac{\partial J}{\partial b_2} + \cdots + a_\nu \frac{\partial J}{\partial b_\nu} = 0$$

und umgekehrt jede dieser Differentialgleichung genügende Function J von der Gestalt

$$J = \sum C a_1^{r_1} a_2^{r_2} \ldots a_\nu^{r_\nu} b_1^{s_1} b_2^{s_2} \ldots b_\nu^{s_\nu}$$

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_\nu = s_1 + s_2 + \cdots + s_\nu = \varrho$$

ist eine Invariante der Linearformen vom Gewichte ϱ. Hieraus kann bewiesen werden, dass die Anzahl der Invarianten vom Gewichte ϱ, zwischen denen keine lineare Relation mit constanten Coefficienten stattfindet, gleich ist

$$\chi(\varrho) = \psi[\psi(\varrho)]^2(\varrho) - \psi(\varrho - 1)\,\psi(\varrho + 1),$$

wo $\psi(\varrho)$ die Anzahl der positiven ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_\nu = \varrho$$

bedeutet und daher den Werth $\frac{(\varrho + \nu - 1)!}{\varrho!\,(\nu - 1)!}$ besitzt. Durch Einsetzung dieses Werthes finden wir

$$\chi(\varrho) = \frac{(\varrho+1)\,(\varrho+2)^2\,)\varrho+3)^2 \cdots (\varrho+\nu-2)^2\,(\varrho+\nu-1)}{(\nu-1)!\,(\nu-2)!}.$$

In § 6 ist ein System von Invarianten $p_0, p_1, \ldots, p_{2\nu-4}$ aufgestellt worden, durch welche sich alle übrigen Invarianten der Grundform ganz und algebraisch ausdrücken lassen. Ferner werde eine lineare Function p der Invarianten p_{ik} mit constanten Coefficienten bestimmt

derart, dass alle Invarianten p_{ik} rationale Functionen von $p, p_0, p_1, \ldots, p_{2\nu-4}$ sind. Da in Folge dessen die Invarianten $p, p_0, p_1, \ldots, p_{2\nu-4}$ ein Invariantensystem von der in § 2 behandelten Art bilden, so können wir mit Hilfe der in § 8 angewandten Methode den Grad k des durch diese Invarianten bestimmten Invariantenkörpers berechnen. Es ergiebt sich auf diese Weise

$$k = (2\nu - 4)! \underset{\varrho=\infty}{L} \frac{\chi(\varrho)}{\varrho^{2\nu-4}} = \frac{(2\nu-4)!}{(\nu-1)!\,(\nu-2)!}.$$

Auch kann zugleich gezeigt werden, dass die $2\nu - 3$ Invarianten $p_0, p_1, \ldots, p_{2\nu-4}$ algebraisch von einander unabhängig sind.

Gehen wir zurück auf die Bestimmungsweise der $p_0, p_1, \ldots, p_{2\nu-4}$ in § 6, so erkennen wir, dass die für k gefundene Zahl zugleich die Anzahl der Büschel von binären Formen angiebt, deren Functionaldeterminante eine vorgeschriebene binäre Form von der $2\nu - 4^{\text{ten}}$ Ordnung ist.*)

Endlich sei noch erwähnt, dass die Function $\chi(\varrho)$ nichts anderes ist, als die sogenannte „charakteristische Function" desjenigen algebraischen Gebildes, welches man erhält, wenn man

$$p_{ik} = a_i b_k - a_k b_i \qquad (i, k = 1, 2 \ldots \nu)$$

setzt und hierin die Grössen p_{ik} als die Veränderlichen, a_i, b_i als willkürliche Parameter auffasst. Somit zeigt das eben behandelte Beispiel zugleich, wie die in der vorliegenden Abhandlung entwickelten Principien sich mit denjenigen auf allgemeinen Moduln bezüglichen Methoden in Verbindung bringen lassen, welche ich in Abschnitt III und IV meiner Abhandlung „Ueber die Theorie der algebraischen Formen" auseinandergesetzt habe. In Uebereinstimmung mit den dort gemachten allgemeinen Angaben**) ist der Grad $2\nu - 4$ der charakteristischen Function in Bezug auf ϱ die Dimension des algebraischen Gebildes, während der Coefficient der $(2\nu-4)^{\text{ten}}$ Potenz von ϱ nach Multiplication mit $(2\nu-4)!$ in der That die Ordnung jenes algebraischen Gebildes liefert.

---

*) Vgl. meine Arbeit: „Ueber Büschel von binären Formen mit vorgeschriebener Functionaldeterminante", Mathematische Annalen Bd. 33, S. 227, sowie die dort ausführlich citirte Litteratur dieses Problems.

**) Vgl. meine Abhandlung „Ueber die Theorie der algebraischen Formen". Mathematische Annalen Bd. 36, S. 520.

IV.

Der Begriff der Nullform.

§ 12.

Die Substitutionsdeterminante als Function der Coefficienten der transformirten Grundform.

Nach den Auseinandersetzungen in Abschnitt I und II ist es zur Aufstellung und Untersuchung des vollen Invariantensystems einer Grundform vor Allem erforderlich, ein endliches System von solchen Invarianten zu kennen, deren Verschwinden nothwendig das Verschwinden sämmtlicher Invarianten der Grundform zur Folge hat. Die Aufgabe, ein System solcher Invarianten zu finden, ist in § 5 für eine binäre Grundform f gelöst, jedoch auf einem Wege, welcher bei Benutzung der bisherigen Hilfsmittel keiner Ausdehnung auf Grundformen von mehr Veränderlichen fähig ist. Zwar die Existenz eines solchen Systems von Invarianten, deren Verschwinden das Verschwinden aller übrigen zur Folge hat, folgt unmittelbar aus dem Theorem I in Abschnitt I meiner Arbeit „Ueber die Theorie der algebraischen Formen"*); aber dieses allgemeine Theorem giebt durchaus kein Mittel in die Hand, ein solches System von Invarianten durch eine endliche Anzahl schon vor Beginn der Rechnung übersehbarer Processe aufzustellen in der Art, dass beispielsweise eine obere Grenze für die Zahl der Invarianten dieses Systems oder für ihre Grade in den Coefficienten der Grundform angegeben werden kann. Die hierin liegende Schwierigkeit wird nun vollständig überwunden durch die nachfolgenden Entwicklungen, bei deren Darstellung wir uns der Kürze halber auf den Fall einer einzigen Grundform beschränken, obwohl die Methoden und Resultate von allgemeinster Gültigkeit sind.

Es sei eine ternäre Grundform f von der n^{ten} Ordnung in den Veränderlichen x_1, x_2, x_3 vorgelegt, deren $N = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ Coefficienten $a_1, a_2, \ldots, a_N$ sämmtlich bestimmte numerische Werthe besitzen: dann besteht zunächst unsere Aufgabe darin, zu entscheiden, ob es noch irgend eine Invariante J giebt, welche für die vorgelegte besondere Grundform f von 0 verschieden ist oder ob alle Invarianten von f gleich 0 sind. Um diese Entscheidung zu ermöglichen, transformiren wir die Form f der 3 Veränderlichen x_1, x_2, x_3 mittelst der linearen Substitution

*) Math. Ann, Bd. 36, S. 474.

$$x_1 = \alpha_{11} y_1 + \alpha_{12} y_2 + \alpha_{13} y_3, \qquad \qquad \qquad \qquad \left| \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \end{matrix} \right.$$
$$x_2 = \alpha_{21} y_1 + \alpha_{22} y_2 + \alpha_{23} y_3, \qquad \delta = \left| \begin{matrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{matrix} \right.$$
$$x_3 = \alpha_{31} y_1 + \alpha_{32} y_2 + \alpha_{33} y_3, \qquad \qquad \qquad \qquad \left| \begin{matrix} \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{matrix} \right|$$

wo die Substitutionscoefficienten $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{33}$ unbestimmte Grössen sind. Die Coefficienten der transformirten Form $g(y_1, y_2, y_3)$ bezeichnen wir mit $b_1, b_2, \ldots, b_N$; dieselben sind ganze rationale Functionen vom n^{ten} Grade in $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{33}$ mit bestimmten numerischen Coefficienten. Nehmen wir nun an, es gebe eine Invariante J, welche für die besondere Grundform f verschieden von 0 ist, so wäre

$$J(g) = \delta^p J(f),$$

wo p das Gewicht der Invariante J bedeutet und $J(f)$ eine von 0 verschiedene Zahl ist. Nach der Division durch diese Zahl lehrt die letztere Gleichung, dass die Substitutionsdeterminante δ einer Gleichung genügt, deren erster Coefficient gleich 1 ist und deren übrige Coefficienten ganze rationale Functionen von $b_1, b_2, \ldots, b_N$ sind, d. h. die Substitutionsdeterminante δ ist unter jener Annahme eine g a n z e algebraische Function der Coefficienten $b_1, b_2, \ldots, b_N$.

Es ist nun sehr wesentlich, dass der hierin ausgesprochene Satz auch umgekehrt gilt. Um dies zu zeigen, nehmen wir an, es sei δ eine ganze algebraische Function von $b_1, b_2, \ldots b_N$ und genüge etwa der Gleichung

$$\delta^p + G_1(b)\delta^{p-1} + \cdots + G_p(b) = 0,$$

wo $G_1, G_2, \ldots, G_p$ ganze rationale Functionen von $b_1, b_2, \ldots, b_N$ mit numerischen Coefficienten sind. Diese Gleichung muss identisch erfüllt sein, wenn wir für die Substitutionsdeterminante δ und für die $b_1, \ldots, b_N$ ihre Ausdrücke in den $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{33}$ eintragen. Da nun δ homogen vom 3^{ten} Grade und die $b_1, \ldots, b_N$ homogen vom n^{ten} Grade in den $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{33}$ sind, so können wir offenbar annehmen, dass in der obigen Gleichung diejenigen Coefficienten G_s gleich 0 sind, für welche $\frac{3s}{n}$ eine gebrochene Zahl ist, und dass die übrigen Functionen G_s in den Grössen $b_1, b_2, \ldots, b_N$ homogen vom Grade $\frac{3s}{n}$ sind. Wir denken uns ferner für den Augenblick in der Form f die Coefficienten $a_1, a_2, \ldots, a_N$ als unbestimmte Grössen, und $b_1, b_2, \ldots, b_N$ dementsprechend als Functionen nicht nur der Substitutionscoefficienten $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{33}$, sondern zugleich als linear von $a_1, a_2, \ldots, a_N$ abhängig. Die linke Seite der obigen Gleichung, nämlich der Ausdruck

$$\delta^p + G_1(b)\delta^{p-1} + \cdots + G_p(b)$$

wird nunmehr erst dann identisch für alle Werthe von $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{33}$ verschwinden, sobald wir wieder statt der Grössen $a_1, a_2, \ldots, a_N$ die

betreffenden numerischen Coefficienten der besonderen Grundform f einsetzen. Indem wir auf diesen Ausdruck p-mal den Process

$$\Omega = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial \alpha_{11}} & \frac{\partial}{\partial \alpha_{12}} & \frac{\partial}{\partial \alpha_{13}} \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_{21}} & \frac{\partial}{\partial \alpha_{22}} & \frac{\partial}{\partial \alpha_{23}} \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_{31}} & \frac{\partial}{\partial \alpha_{32}} & \frac{\partial}{\partial \alpha_{33}} \end{vmatrix}$$

anwenden, erhalten wir zufolge des in Abschnitt V meiner Abhandlung „Ueber die Theorie der algebraischen Formen"*) bewiesenen Satzes einen Ausdruck von der Gestalt

$$C_p + J_1(a) + J_2(a) + \cdots + J_p(a),$$

wo C_p eine von 0 verschiedene Zahl bedeutet und $J_1(a), J_2(a), \ldots, J_p(a)$ Invarianten der Grundform f mit den unbestimmt gedachten Coefficienten $a_1, a_2, \ldots, a_N$, sind. Dieser Ausdruck muss nun 0 sein, sobald man für die Grössen $a_1, a_2, \ldots, a_N$ die betreffenden numerischen Coefficienten der Form f einführt und daraus folgt, dass nicht sämmtliche Invarianten $J_1, J_2, \ldots, J_p$ für die besondere Grundform f verschwinden können. Wir sprechen dieses Resultat in folgendem Satze aus:

Eine Grundform mit bestimmten numerischen Coefficienten besitzt dann und nur dann eine von 0 *verschiedene Invariante, wenn die Substitutionsdeterminante δ eine ganze algebraische Function der Coefficienten der linear transformirten Form ist.*

§ 13.

Die Entscheidung ob die vorgelegte Grundform eine von 0 verschiedene Invariante besitzt oder nicht.

Nunmehr soll der Weg angegeben werden, wie man durch endliche und von vornherein übersehbare Processe entscheiden kann, ob δ eine ganze algebraische Function der Grössen $b_1, b_2, \ldots, b_N$ ist oder nicht. Zunächst lehrt der in § 1 bewiesene Hilfssatz, dass es stets möglich ist, aus den Grössen $b_1, b_2, \ldots, b_N$ mittelst geeigneter numerischer Coefficienten $c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{rN}$ solche r lineare Ausdrücke

$$B_1 = c_{11} b_1 + c_{12} b_2 + \cdots + c_{1N} b_N,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$B_r = c_{r1} b_1 + c_{r2} b_2 + \cdots + c_{rN} b_N$$

zu bilden, durch welche alle Grössen $b_1, b_2, \ldots, b_N$ sich als ganze

*) Mathematische Annalen Bd. 36, S. 524.

algebraische Functionen ausdrücken lassen und zwischen denen keine algebraische Relation stattfindet. Die r Ausdrücke $B_1, \ldots, B_r$ sind dann ebenso, wie die Grössen $b_1, \ldots, b_N$ ganze rationale homogene Functionen n^{ten} Grades von $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{33}$ mit numerischen Coefficienten und da zwischen irgend 10 solchen Functionen von $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{33}$ stets eine algebraische Relation bestehen muss, so hat r jedenfalls höchstens den Werth 9.

Um zu untersuchen, unter welchen Umständen die Zahl $r < 9$ ausfällt, denken wir uns in der transformirten Form $g(y_1, y_2, y_3)$ für die Veränderlichen der Reihe nach irgend 8 Werthsysteme

$$\begin{gathered}
y_1 = y_1', \; y_1 = y_1'', \ldots, y_1 = y_1^{(8)}, \\
y_2 = y_2', \; y_2 = y_2'', \ldots, y_2 = y_2^{(8)}, \\
y_3 = y_3', \; y_3 = y_3'', \ldots, y_3 = y_3^{(8)}
\end{gathered}$$

eingesetzt; wir gelangen so zu 8 linearen Ausdrücken $g', g'', \ldots, g^{(8)}$ von der Art der Ausdrücke B. Zwischen g und diesen 8 Ausdrücken bestehe die algebraische Relation

$$G(g, g', \ldots, g^{(8)}) = 0,$$

wo angenommen werden kann, dass nicht auch die Differentialquotienten der ganzen rationalen Function G nach den $g, g', \ldots, g^{(8)}$ für alle $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{33}$ identisch verschwinden. Durch Differentiation der obigen Identität nach den $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{33}$ erhalten wir

$$\begin{gathered}
\frac{\partial G}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial \alpha_{11}} + \frac{\partial G}{\partial g'}\frac{\partial g'}{\partial \alpha_{11}} + \cdots + \frac{\partial G}{\partial g^{(8)}}\frac{\partial g^{(8)}}{\partial \alpha_{11}} = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{\partial G}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial \alpha_{33}} + \frac{\partial G}{\partial g'}\frac{\partial g'}{\partial \alpha_{33}} + \cdots + \frac{\partial G}{\partial g^{(8)}}\frac{\partial g^{(8)}}{\partial \alpha_{33}} = 0
\end{gathered}$$

und hieraus folgt

$$\begin{vmatrix}
\frac{\partial g}{\partial \alpha_{11}} & \frac{\partial g'}{\partial \alpha_{11}} & \cdots & \frac{\partial g^{(8)}}{\partial \alpha_{11}} \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
\frac{\partial g}{\partial \alpha_{33}} & \frac{\partial g'}{\partial \alpha_{33}} & \cdots & \frac{\partial g^{(8)}}{\partial \alpha_{33}}
\end{vmatrix} = 0.$$

Berücksichtigen wir die Gleichungen

$$\frac{\partial g}{\partial \alpha_{ik}} = y_k \frac{\partial f}{\partial x_i}, \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

so liefert die Entwicklung der obigen Determinante nach den Elementen der ersten Verticalreihe eine Relation von der Gestalt

$$\begin{aligned} &D_{11} y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + D_{21} y_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} + D_{31} y_3 \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ &+ D_{12} y_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} + D_{22} y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + D_{32} y_3 \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ &+ D_{13} y_1 \frac{\partial f}{\partial x_3} + D_{23} y_2 \frac{\partial f}{\partial x_3} + D_{33} y_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0, \end{aligned}$$

wo $D_{11}, D_{21}, \ldots, D_{33}$ ganze rationale Functionen der Grössen $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{33}, y_1', y_2', y_3', \ldots, y_1^{(8)}, y_2^{(8)}, y_3^{(8)}$ sind. Wir nehmen an, dass die Unterdeterminanten $D_{11}, D_{21}, \ldots, D_{33}$ nicht sämmtlich identisch für alle diese Parameter verschwinden und legen den letzteren dann solche numerische Werthe bei, dass wenigstens eine jener Unterdeterminanten von 0 verschieden ist. Da die y_1, y_2, y_3 lineare Functionen von x_1, x_2, x_3 sind, so ergiebt sich hiernach aus der obigen Relation eine lineare Differentialgleichung für f von der Gestalt

$$l_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + l_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + l_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0,$$

wo l_1, l_2, l_3 lineare homogene Functionen von x_1, x_2, x_3 sind. Wenn jedoch die obige Annahme nicht zutrifft und somit alle Unterdeterminanten der obigen Determinante identisch verschwinden, so stelle man mit irgend einer dieser Unterdeterminanten die entsprechende Ueberlegung an: man gelangt dann wiederum zu einer linearen Differentialgleichung für f.

Die gewonnene lineare Differentialgleichung für f kann durch Anwendung einer geeigneten linearen Transformation der Veränderlichen leicht näher untersucht werden; es ergiebt sich dann das Resultat:

Die Zahl r ist im allgemeinen nur dann < 9, wenn die vorgelegte Form f die besondere Eigenschaft hat, lineare continuirliche Transformationen in sich selbst zu gestatten.

Wir kehren nun zu der am Anfange dieses Paragraphen angestellten Betrachtung zurück und bestimmen, falls $r < 9$ ist, irgend $9 - r$ Functionen $B_{r+1}, \ldots, B_9$ vom Grade n in $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{33}$ und mit numerischen Coefficienten derart, dass zwischen den 9 Functionen $B_1, \ldots, B_9$ ebenfalls keine algebraische Relation stattfindet. Dass dies unter den obwaltenden Umständen immer möglich ist, lässt sich leicht mit Hilfe einer bekannten Eigenschaft der Functionaldeterminante zeigen. Nunmehr werde die irreducible Gleichung aufgestellt, welche zwischen $\delta, B_1, \ldots, B_9$ besteht; dieselbe sei von der Gestalt

$$\Gamma_0 \delta^\pi + \Gamma_1 \delta^{\pi-1} + \cdots + \Gamma_\pi = 0,$$

wo $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_\pi$ ganze rationale Functionen von $B_1, \ldots, B_9$ bedeuten. Nehmen wir an, es sei δ eine ganze algebraische Function der Grössen $b_1, b_2, \ldots, b_N$, so hängt δ nothwendig auch ganz und

algebraisch von $B_1, \ldots, B_r$ ab und genügt folglich einer Gleichung von der Gestalt

$$\delta^\varrho + E_1 \delta^{\varrho-1} + \cdots + E_\varrho = 0,$$

wo $E_1, \ldots, E_\varrho$ ganze rationale Functionen von $B_1, \ldots, B_r$ sind. Die linke Seite dieser Gleichung muss aber die linke Seite der vorigen Gleichung als Factor enthalten und hieraus kann leicht geschlossen werden, dass Γ_0 gleich einer von 0 verschiedenen Constanten ist und dass die übrigen Coefficienten $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_\pi$ lediglich ganze rationale Functionen der Ausdrücke $B_1, \ldots, B_r$ sind. Um also die gewünschte Entscheidung zu treffen, ist es nur nöthig festzustellen, ob die irreducible, zwischen $\delta, B_1, \ldots, B_9$ bestehende Gleichung von der soeben genannten Beschaffenheit ist oder nicht.

§ 14.

Eine obere Grenze für die Gewichte der Invarianten $J_1, \ldots, J_\varkappa$.

Wir können zugleich für den Grad π jener irreducibeln Gleichung eine obere Grenze finden und zwar mit Hilfe der folgenden Betrachtung:

Es seien $h+1$ Formen $H_1, \ldots, H_{h+1}$ gegeben, welche sämmtlich vom Grade m in den h homogenen Veränderlichen $u_1, \ldots, u_h$ sind. Wir bilden alle Potenzen und Producte R^{ten} Grades der Grössen $H_1, \ldots, H_{h+1}$ und betrachten die Gleichung

$$\sum C_{s_1, s_2, \ldots, s_{h+1}} H_1^{s_1} H_2^{s_2} \ldots H_{h+1}^{s_{h+1}} = 0.$$
$$(s_1 + s_2 + \cdots + s_{h+1} = R).$$

Indem wir auf der linken Seite nach Ausführung der Multiplication sämmtliche Potenzen und Producte der Veränderlichen $u_1, \ldots, u_h$ gleich 0 setzen, ergiebt sich zur Bestimmung der

$$\frac{(R+1)(R+2)\ldots(R+h)}{1 \cdot 2 \ldots h}$$

Coefficienten $C_{s_1, s_2, \ldots, s_{h+1}}$ ein System von

$$\frac{(mR+1)(mR+2)\ldots(mR+h-1)}{1 \cdot 2 \ldots h-1}$$

linearen homogenen Gleichungen; diese Gleichungen werden stets Lösungen haben, sobald

$$\frac{(R+1)\ldots(R+h)}{1 \cdot 2 \ldots h} > \frac{(mR+1)\ldots(mR+h-1)}{1 \cdot 2 \ldots h-1}$$

und folglich um so mehr, sobald

$$(R+1)^h > h(mR+h-1)^{h-1}$$

ist. Diese Ungleichung wird jedenfalls dann erfüllt sein, wenn wir

$R = h(m+1)^{h-1}$ nehmen. Hieraus folgt, dass zwischen den Functionen $H_1, \ldots, H_{h+1}$ nothwendig eine Relation bestehen muss, deren Grad kleiner oder gleich der Zahl $h(m+1)^{h-1}$ ist.

Wir wenden diesen Satz auf die 10 Formen δ^n, $B_1^3, \ldots, B_9^3$ an, von denen jede homogen vom $3n^{\text{ten}}$ Grade in den 9 Veränderlichen $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{33}$ ist; wir setzen also $h = 9$ und $m = 3n$. Auf diese Weise ergiebt sich, dass der Grad π der oben aufgestellten Gleichung jedenfalls die Zahl $9n(3n+1)^8$ nicht übersteigt. Hieraus folgt unter Anwendung des in § 12 eingeschlagenen Beweisverfahrens der Satz:

Wenn die Substitutionsdeterminante δ eine ganze algebraische Function der Coefficienten der linear transformirten Grundform ist, so giebt es nothwendig eine von 0 verschiedene Invariante, deren Gewicht die Zahl $9n(3n+1)^8$ nicht übersteigt.

Dieser Satz führt dann mit Hilfe der in § 4 und § 12 bewiesenen Sätze unmittelbar zu folgendem Satze:

Sämmtliche Invarianten einer ternären Grundform n^{ter} Ordnung lassen sich als ganze algebraische Functionen derjenigen Invarianten ausdrücken, deren Gewicht $\leqq 9n(3n+1)^8$ ist.

Hiernach können auch die in Abschnitt I behandelten Invarianten $J_1, \ldots, J_\varkappa$ stets so angenommen werden, dass die Gewichte derselben unterhalb einer gewissen nur von n abhängigen Grenze liegen und aus der oberen Grenze für die Gewichte folgt dann unmittelbar eine obere Grenze für die Grade der Invarianten $J_1, \ldots, J_\varkappa$.

Um die in diesem Abschnitt IV gefundenen Resultate und die späterhin aus denselben zu ziehenden Folgerungen kürzer aussprechen zu können, führen wir den Begriff der Nullform ein.

Eine Grundform wird eine N u l l f o r m *genannt, wenn ihre Coefficienten solche besonderen numerischen Werthe besitzen, dass alle Invarianten für dieselbe gleich 0 sind.*

Ist eine Nullform f vorgelegt, so lehren die obigen Betrachtungen, dass für gewisse endliche, durch $\Gamma_0 = 0$ bestimmte Werthe von $B_1, \ldots, B_r$ die Determinante δ unendlich grosse Werthe annehmen muss. Da nun für endliche $B_1, \ldots, B_r$ auch die Grössen $b_1, \ldots, b_N$ sämmtlich endliche Werthe haben müssen, so kann — in richtig zu verstehendem Sinne — *die Nullform f auch als eine Form bezeichnet werden, welche die Eigenschaft besitzt, endliche Coefficienten zu behalten bei Anwendung gewisser linearer Substitutionen von unendlich grosser Determinante.* Diese Eigenschaft der Nullform findet in dem folgenden Paragraphen ihren genauen algebraischen Ausdruck.

V.

Die Aufstellung der Nullformen.

§ 15.

Eine der Nullform eigenthümliche lineare Transformation.

Aus den Betrachtungen des Abschnittes IV geht hervor, wie man durch eine endliche Anzahl rationaler Operationen ein System von Invarianten $J_1, \ldots, J_\varkappa$ mit den in Abschnitt I aufgeführten Eigenschaften finden kann. Was die practische Berechnung eines solchen Systems in bestimmten Fällen angeht, so wird dieselbe offenbar wesentlich erleichtert werden, wenn man von vornherein anzugeben weiss, welche Bedeutung das Verschwinden sämmtlicher Invarianten für die vorgelegte Grundform besitzt. Diese Bedeutung ist für eine binäre Grundform in § 5 ermittelt worden und ich habe dann auch auf Grund dieser Kenntniss ein System von Invarianten aufgestellt, durch welche sich alle übrigen Invarianten der binären Grundform ganz und algebraisch ausdrücken lassen. Versucht man auf diesem im binären Gebiete eingeschlagenen Wege oder durch Rechnung auch im Falle von mehr Veränderlichen die Nullformen aufzustellen, so stösst man auf wesentliche Schwierigkeiten und es ist mir nur für eine cubische und eine biquadratische ternäre Grundform durch mühsame Rechnung gelungen, die Nullformen auf solche Weise zu finden. Im gegenwärtigen Abschnitte wird mittelst einer neuen und allgemeinen Methode die Aufgabe, alle Nullformen zu finden, vollständig gelöst werden. Bei der Entwicklung dieser Methode werde ich wiederum der Kürze halber eine einzige ternäre Form zu Grunde legen. Die Methode beruht auf dem folgenden Hilfssatze:

Wenn eine ternäre Nullform f von der n^{ten} Ordnung mit den Coefficienten $a_1, \ldots, a_N$ vorgelegt ist, so lässt sich stets eine lineare Substitution von der Gestalt finden

$$(\alpha) = \begin{pmatrix} \tau^{\mu_1}\mathfrak{P}_{11}, & \tau^{\mu_1}\mathfrak{P}_{12}, & \tau^{\mu_1}\mathfrak{P}_{13} \\ \tau^{\mu_2}\mathfrak{P}_{21}, & \tau^{\mu_2}\mathfrak{P}_{22}, & \tau^{\mu_2}\mathfrak{P}_{23} \\ \tau^{\mu_3}\mathfrak{P}_{31}, & \tau^{\mu_3}\mathfrak{P}_{32}, & \tau^{\mu_3}\mathfrak{P}_{33} \end{pmatrix},$$

wo μ_1, μ_2, μ_3 ganze Zahlen und $\mathfrak{P}_{11}, \mathfrak{P}_{12}, \ldots, \mathfrak{P}_{33}$ gewöhnliche nach ganzen positiven Potenzen der Veränderlichen τ fortschreitende Reihen sind und für welche die Coefficienten $b_1, \ldots, b_N$ der transformirten Nullform g in der Grenze für $\tau = 0$ sämmtlich endlich bleiben, während die Determinante der Substitution

$$\delta = \begin{vmatrix} \tau^{\mu_1}\mathfrak{P}_{11}, & \tau^{\mu_1}\mathfrak{P}_{12}, & \tau^{\mu_1}\mathfrak{P}_{13} \\ \tau^{\mu_2}\mathfrak{P}_{21}, & \tau^{\mu_2}\mathfrak{P}_{22}, & \tau^{\mu_2}\mathfrak{P}_{23} \\ \tau^{\mu_3}\mathfrak{P}_{31}, & \tau^{\mu_3}\mathfrak{P}_{32}, & \tau^{\mu_3}\mathfrak{P}_{33} \end{vmatrix} = \tau^{\mu}\mathfrak{Q}$$

für $\tau = 0$ unendlich wird.

Zum Beweise transformiren wir die vorgelegte Nullform f mittelst der linearen Substitution

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \alpha_{13}y_3, \\ x_2 &= \alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \alpha_{23}y_3, \\ x_3 &= \alpha_{31}y_1 + \alpha_{32}y_2 + \alpha_{33}y_3, \end{aligned} \qquad \delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

wo $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{33}$ unbestimmte Parameter sind. Es entsteht so eine Form g, deren Coefficienten $b_1, \ldots, b_N$ ganze rationale Functionen n^{ten} Grades von $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{33}$ mit bestimmten numerischen Coefficienten sind. Wir construiren dann in der Weise, wie gegen Ende des § 13 dargelegt worden ist, 9 algebraisch von einander unabhängige Functionen $B_1, \ldots, B_9$, durch welche sich alle Functionen $b_1, \ldots, b_N$ ganz und algebraisch ausdrücken und bilden auch wie dort die irreducible Gleichung, welche zwischen δ, $B_1, \ldots, B_9$ besteht; dieselbe ist von der Gestalt

$$\Gamma_0\delta^{\pi} + \Gamma_1\delta^{\pi-1} + \cdots + \Gamma_{\pi} = 0,$$

wo $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_{\pi}$ ganze rationale homogene Functionen von $B_1, \ldots, B_9$ sind und wo insbesondere der erste Coefficient Γ_0 nothwendigerweise ein Ausdruck ist, welcher einige der Grössen $B_1, \ldots, B_9$ wirklich enthält. Denn im entgegengesetzten Falle wäre δ eine ganze algebraische Function von $b_1, \ldots, b_N$ und dann könnte f nicht, wie vorausgesetzt worden ist, eine Nullform sein.

Nunmehr bestimme man 9 Zahlen $B_1^0, \ldots, B_9^0$ derart, dass, wenn man dieselben bezüglich für $B_1, \ldots, B_9$ einsetzt, der Ausdruck Γ_0 verschwindet, dagegen wenigstens einer der übrigen Coefficienten $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{\pi}$ jener irreducibeln Gleichung von 0 verschieden bleibt. Ferner bestimme man 9 Zahlen $B_1^{00}, \ldots, B_9^{00}$ derart, dass, wenn man in jene irreducible Gleichung

$$\begin{aligned} B_1 &= B_1^0 + B_1^{00}t, \\ &\cdots\cdots \\ B_9 &= B_9^0 + B_9^{00}t \end{aligned}$$

einsetzt, dieselbe dann in eine Gleichung zwischen δ und t übergeht, welche ebenfalls irreducibel ist.*) Diese Gleichung zwischen δ und t sei folgende

*) Dass eine solche Bestimmung der $B_1^{00}, \ldots, B_9^{00}$ stets möglich ist, habe ich in meiner Abhandlung „Ueber die Irreducibilität ganzer rationaler Functionen mit ganzzahligen Coefficienten", Crelle's Journal Bd. 110 gezeigt.

$$\Gamma_0^0 \delta^\pi + \Gamma_1^0 \delta^{\pi-1} + \cdots + \Gamma_\pi^0 = 0,$$

wo $\Gamma_0^0, \Gamma_1^0, \ldots, \Gamma_\pi^0$ ganze rationale Functionen von t bedeuten.

Nunmehr betrachten wir die folgenden 9 Gleichungen

$$B_1(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{33}) = B_1^0 + B_1^{00} t,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$B_9(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{33}) = B_9^0 + B_9^{00} t.$$

Da zwischen den 9 Functionen $B_1, \ldots, B_9$ keine algebraische Relation besteht, so verschwindet die Functionaldeterminante derselben

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial B_1}{\partial \alpha_{11}} & \cdots & \frac{\partial B_9}{\partial \alpha_{11}} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial B_1}{\partial \alpha_{33}} & \cdots & \frac{\partial B_9}{\partial \alpha_{33}} \end{vmatrix}$$

nicht identisch für alle $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{33}$ und folglich sind durch jene 9 Gleichungen die 9 Grössen $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{33}$ als algebraische Functionen von t definirt. Ein System zusammengehöriger Zweige dieser algebraischen Functionen werde in der Umgebung der Stelle $t = 0$ durch die folgenden Entwickelungen

$$\alpha_{ik} = t^{\nu_{ik}} P_{ik}\left(t^{\frac{1}{m}}\right) \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

dargestellt, wo m eine positive ganze Zahl, ν_{ik} rationale Zahlen und P_{ik} gewöhnliche nach ganzen positiven Potenzen des Argumentes $t^{\frac{1}{m}}$ fortschreitende Reihen sind. Die Determinante der 9 entwickelten Grössen

$$\delta = \left| t^{\nu_{ik}} P_{ik}\left(t^{\frac{1}{m}}\right) \right| = t^\nu Q\left(t^{\frac{1}{m}}\right)$$

ist von der nämlichen Gestalt und stellt einen Zweig der algebraischen Function $\delta(t)$ dar, welche durch jene Gleichung

$$\Gamma_0^0 \delta^\pi + \Gamma_1^0 \delta^{\pi-1} + \cdots + \Gamma_\pi^0 = 0$$

definirt ist. Da diese Gleichung nun irreducibel ist, so können sämmtliche übrigen $\pi - 1$ Zweige der algebraischen Function $\delta(t)$ aus dem eben gewonnenen Zweige $\delta = t^\nu Q\left(t^{\frac{1}{m}}\right)$ durch analytische Fortsetzung erhalten werden. Diese weiteren $\pi - 1$ Zweige seien

$$\delta' = t^{\nu'} Q'\left(t^{\frac{1}{m'}}\right),$$
$$\delta'' = t^{\nu''} Q''\left(t^{\frac{1}{m''}}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\delta^{(\pi-1)} = t^{\nu^{(\pi-1)}} Q^{(\pi-1)}\left(t^{\frac{1}{m^{(\pi-1)}}}\right)$$

und zwar möge der ursprüngliche Zweig δ übergehen in die Zweige $\delta', \delta'', \ldots, \delta^{(\pi-1)}$ bezüglich auf den Wegen $W', W'', \ldots, W^{(\pi-1)}$ und diese $\pi - 1$ Wege seien in der complexen Ebene der Veränderlichen t so gewählt, dass die Unstetigkeitspunkte der algebraischen Functionen $\alpha_{ik}(t)$ und $\delta(t)$ sämmtlich ausserhalb dieser Wege liegen. Nun verschwindet Γ_0^0 für $t=0$, während die übrigen Coefficienten $\Gamma_1^0, \ldots, \Gamma_\pi^0$ für $t=0$ nicht sämmtlich gleich 0 sind, und daher muss wenigstens einer der π Zweige $\delta, \delta', \ldots, \delta^{(\pi-1)}$ für $t=0$ den Werth ∞ annehmen; es sei dies etwa der Zweig $\delta' = t^{\nu'} Q'$. Da Q' eine nach ganzen positiven Potenzen von $t^{\frac{1}{m'}}$ fortschreitende Reihe ist und m' hierbei eine ganze positive Zahl bedeutet, so muss ν' nothwendig eine negative Zahl sein. Nunmehr verfolgen wir die Werthe derjenigen zusammengehörigen Zweige, welche durch das System von Potenzreihen

$$\alpha_{ik} = t^{\nu_{ik}} P_{ik}\left(t^{\frac{1}{m}}\right) \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

dargestellt sind, auf dem Wege W' und gelangen dadurch zu einem anderen System von zusammengehörigen Zweigen der algebraischen Functionen $\alpha_{ik}(t)$; das System dieser Zweige werde in der Umgebung der Stelle $t=0$ durch die Potenzreihen

$$\alpha'_{ik} = t^{\nu'_{ik}} P'_{ik}\left(t^{\frac{1}{m'}}\right)$$

dargestellt. Bezeichnet M eine positive ganze Zahl, welche sowohl durch m' als auch durch die Nenner der rationalen Zahlen ν'_{ik} theilbar ist, so liefert die Substitution $t = \tau^M$ ein System von Potenzentwicklungen für die algebraischen Functionen α_{ik} von der Gestalt

$$\alpha_{ik} = \tau^{\mu_i} \mathfrak{P}_{ik}(\tau) \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

wo die μ_i ganze Zahlen sind, und dies System ist von der im Satze verlangten Beschaffenheit; denn für $t=0$ erhalten die Grössen $B_1, \ldots, B_9$ die Werthe $B_1^0, \ldots, B_9^0$ und folglich bleiben auch die Grössen $b_1, \ldots, b_N$, da dieselben ganze algebraische Functionen von $B_1, \ldots, B_9$ sind, sämmtlich für $\tau = 0$ endlich.

Die Umkehrung des eben bewiesenen Satzes ist unmittelbar einzusehen. In der That, wenn man für die Grössen $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{33}$ Potenzreihen von der genannten Eigenschaft angeben kann, so ist jedenfalls δ nicht eine ganze algebraische Function von $b_1, \ldots, b_N$ und folglich ist die Grundform f eine Nullform.

§ 16.

Ein Hilfssatz über lineare Substitutionen, deren Coefficienten Potenzreihen sind.

Um den in § 15 gefundenen Satz auf die Berechnung der Nullformen anzuwenden, brauchen wir einen Hilfssatz über die Normirung von linearen Substitutionen, deren Coefficienten Potenzreihen einer Veränderlichen τ sind. Dieser Hilfssatz lautet:

Wenn eine Substitution von der in § 15 bezeichneten Art

$$(\alpha) = \begin{pmatrix} \tau^{\mu_1}\mathfrak{P}_{11}, & \tau^{\mu_1}\mathfrak{P}_{12}, & \tau^{\mu_1}\mathfrak{P}_{13} \\ \tau^{\mu_2}\mathfrak{P}_{21}, & \tau^{\mu_2}\mathfrak{P}_{22}, & \tau^{\mu_2}\mathfrak{P}_{23} \\ \tau^{\mu_3}\mathfrak{P}_{31}, & \tau^{\mu_3}\mathfrak{P}_{32}, & \tau^{\mu_3}\mathfrak{P}_{33} \end{pmatrix},$$

mit der Determinante

$$\delta = \tau^{\mu}\mathfrak{Q}$$

gegeben ist, wo μ_1, μ_2, μ_3, μ ganze Zahlen und $\mathfrak{P}_{11}, \mathfrak{P}_{12}, \ldots, \mathfrak{P}_{33}$ gewöhnliche nach ganzen positiven Potenzen der Veränderlichen τ fortschreitende Reihen sind, so lassen sich stets 2 andere lineare Substitutionen bestimmen

$$(\beta) = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{pmatrix}, \qquad (\gamma) = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix},$$

welche von folgender Beschaffenheit sind:

1) Die Elemente der beiden Substitutionen (β) und (γ) sind gewöhnliche nach ganzen positiven Potenzen von τ fortschreitende Reihen, etwa

$$\beta_{ik} = (\beta_{ik})_0 + (\beta_{ik})_1\,\tau + (\beta_{ik})_2\,\tau^2 + \cdots,$$
$$\gamma_{ik} = (\gamma_{ik})_0 + (\gamma_{ik})_1\,\tau + (\gamma_{ik})_2\,\tau^2 + \cdots,$$

deren constante Glieder den Bedingungen

$$\begin{vmatrix} (\beta_{11})_0 & (\beta_{12})_0 & (\beta_{13})_0 \\ (\beta_{21})_0 & (\beta_{22})_0 & (\beta_{23})_0 \\ (\beta_{31})_0 & (\beta_{32})_0 & (\beta_{33})_0 \end{vmatrix} = 1, \qquad \begin{vmatrix} (\gamma_{11})_0 & (\gamma_{12})_0 & (\gamma_{13})_0 \\ (\gamma_{21})_0 & (\gamma_{22})_0 & (\gamma_{23})_0 \\ (\gamma_{31})_0 & (\gamma_{32})_0 & (\gamma_{33})_0 \end{vmatrix} = 1$$

genügen.

2) Die aufeinander folgende Anwendung der Substitutionen (β), (α), (γ), liefert eine Substitution von der Gestalt

$$(\gamma)\,(\alpha)\,(\beta) = \begin{pmatrix} \tau^{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \tau^{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \tau^{\lambda_3} \end{pmatrix},$$

wo $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ gewisse ganze Zahlen sind.

Zum Beweise setzen wir

$$\mathfrak{P}_{ik} = (\mathfrak{P}_{ik})_0 + (\mathfrak{P}_{ik})_1 \tau + (\mathfrak{P}_{ik})_2 \tau^2 + \cdots,$$
$$\mathfrak{Q} = (\mathfrak{Q})_0 + (\mathfrak{Q})_1 \tau + (\mathfrak{Q})_2 \tau^2 + \cdots;$$

hierbei darf $(\mathfrak{Q})_0$ verschieden von 0 angenommen werden, da man im anderen Falle die Zahl μ um eine oder mehrere Einheiten grösser wählen kann. Ausserdem nehmen wir noch $\mu_1 \geqq \mu_2 \geqq \mu_3$ an. Ist dann $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = \mu$, so wird die Determinante

$$\begin{vmatrix} (\mathfrak{P}_{11})_0 & (\mathfrak{P}_{12})_0 & (\mathfrak{P}_{13})_0 \\ (\mathfrak{P}_{21})_0 & (\mathfrak{P}_{22})_0 & (\mathfrak{P}_{23})_0 \\ (\mathfrak{P}_{31})_0 & (\mathfrak{P}_{32})_0 & (\mathfrak{P}_{33})_0 \end{vmatrix}$$

gleich einer von 0 verschiedenen Constanten sein und folglich liefert die Umkehrung der Substitution

$$(\mathfrak{P}) = \begin{pmatrix} \mathfrak{P}_{11} & \mathfrak{P}_{12} & \mathfrak{P}_{13} \\ \mathfrak{P}_{21} & \mathfrak{P}_{22} & \mathfrak{P}_{23} \\ \mathfrak{P}_{31} & \mathfrak{P}_{32} & \mathfrak{P}_{33} \end{pmatrix}$$

eine Substitution $(\mathfrak{P})^{-1}$, deren Elemente wiederum gewöhnliche nach ganzen positiven Potenzen von τ fortschreitende Reihen sind. Man erhält somit unmittelbar 2 Substitutionen von der im Satze verlangten Beschaffenheit, wenn man setzt

$$(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\gamma) = (\mathfrak{P})^{-1}$$

$$\mu_1 = \lambda_1, \quad \mu_2 = \lambda_2, \quad \mu_3 = \lambda_3.$$

Ist andererseits $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 < \mu$, so muss jene Determinante $|(\mathfrak{P}_{ik})_0|$ den Werth 0 haben und wir können dann 3 nicht sämmtlich verschwindende Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ finden, so dass

$$\varepsilon_1 (\mathfrak{P}_{1i})_0 + \varepsilon_2 (\mathfrak{P}_{2i})_0 + \varepsilon_3 (\mathfrak{P}_{3i})_0 = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

wird. Nunmehr haben wir 3 Fälle zu untersuchen.

1) Es sei $\varepsilon_1 \neq 0$; wir setzen $\varepsilon_1 = 1$. Dann ist

$$(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \tau^{\mu_1 - \mu_2} \varepsilon_2 & \tau^{\mu_1 - \mu_3} \varepsilon_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

eine Substitution von der Determinante $\varepsilon_1 = 1$, deren Elemente ganze rationale Functionen von τ sind, und es wird

$$(\alpha') = (\alpha)(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \tau^{\mu_1'} \mathfrak{P}_{11}', & \tau^{\mu_1'} \mathfrak{P}_{12}', & \tau^{\mu_1'} \mathfrak{P}_{13}' \\ \tau^{\mu_2} \mathfrak{P}_{21}, & \tau^{\mu_2} \mathfrak{P}_{22}, & \tau^{\mu_2} \mathfrak{P}_{23} \\ \tau^{\mu_3} \mathfrak{P}_{31}, & \tau^{\mu_3} \mathfrak{P}_{32}, & \tau^{\mu_3} \mathfrak{P}_{33} \end{pmatrix}$$

wo μ_1' eine ganze Zahl $> \mu_1$ ist, und wo $\mathfrak{P}_{11}'$, $\mathfrak{P}_{12}'$, $\mathfrak{P}_{13}'$ wiederum nach ganzen positiven Potenzen von τ fortschreitende Reihen sind.

2) Es sei $\varepsilon_1 = 0$ und $\varepsilon_2 \neq 0$; wir nehmen $\varepsilon_2 = 1$ an. Dann ist

$$(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & \tau^{\mu_2 - \mu_3}\varepsilon_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

wiederum eine Substitution von der Determinante $\varepsilon_2 = 1$, deren Elemente ganze rationale Functionen von τ sind und es wird

$$(\alpha') = (\alpha)(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \tau^{\mu_1}\mathfrak{P}_{11}, & \tau^{\mu_1}\mathfrak{P}_{12}, & \tau^{\mu_1}\mathfrak{P}_{13} \\ \tau^{\mu_2'}\mathfrak{P}_{21}', & \tau^{\mu_2'}\mathfrak{P}_{22}', & \tau^{\mu_2'}\mathfrak{P}_{23}' \\ \tau^{\mu_3}\mathfrak{P}_{31}, & \tau^{\mu_3}\mathfrak{P}_{32}, & \tau^{\mu_3}\mathfrak{P}_{33} \end{pmatrix}$$

wo μ_2' eine ganze Zahl $> \mu_2$ ist und wo $\mathfrak{P}_{21}'$, $\mathfrak{P}_{22}'$, $\mathfrak{P}_{23}'$ nach ganzen positiven Potenzen von τ fortschreitende Reihen sind.

3) Es sei $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 0$, und $\varepsilon_3 \neq 0$; wir setzen $\varepsilon_3 = 1$. Dann ist

$$(\mathfrak{P}_{31})_0 = 0, \quad (\mathfrak{P}_{32})_0 = 0, \quad (\mathfrak{P}_{33})_0 = 0$$

und folglich können wir setzen

$$(\alpha') = (\alpha) = \begin{pmatrix} \tau^{\mu_1}\mathfrak{P}_{11}, & \tau^{\mu_1}\mathfrak{P}_{12}, & \tau^{\mu_1}\mathfrak{P}_{13} \\ \tau^{\mu_2}\mathfrak{P}_{21}, & \tau^{\mu_2}\mathfrak{P}_{22}, & \tau^{\mu_2}\mathfrak{P}_{23} \\ \tau^{\mu_3'}\mathfrak{P}_{31}', & \tau^{\mu_3'}\mathfrak{P}_{32}', & \tau^{\mu_3'}\mathfrak{P}_{33}' \end{pmatrix},$$

wo μ_3' eine Zahl $> \mu_3$ ist und wo $\mathfrak{P}_{31}'$, $\mathfrak{P}_{32}'$, $\mathfrak{P}_{33}'$ wiederum nach ganzen positiven Potenzen von τ fortschreitende Reihen sind.

Ist nun die Exponentensumme $\mu_1' + \mu_2 + \mu_3$ bezüglich $\mu_1 + \mu_2' + \mu_3$, $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3' = \mu$, so ist nach dem vorhin Bewiesenen für die Substitution (α') unser Satz richtig und folglich gilt derselbe, wenn wir die Gleichung

$$(\gamma)(\alpha')(\beta) = (\gamma)(\alpha)\{(\varepsilon)(\beta)\}$$

berücksichtigen, auch für die Substitution (α). Ist jedoch jene Exponentensumme $< \mu$, so wiederhole man das eben auf (α) angewandte Verfahren nunmehr für die Substitution (α'). Da bei jedem weiteren Schritte die bezügliche Exponentensumme sich wenigstens um eine Einheit vermehrt, so wird man nach einer endlichen Zahl r von Wiederholungen des beschriebenen Verfahrens zu einer Substitution $(\alpha^{(r)})$ gelangen, für welche die Exponentensumme gleich μ ist. Damit ist der Beweis für unseren Hilfssatz erbracht.

§ 17.

Die kanonische Nullform.

Die Elemente der Substitution

$$(\beta_0) = \begin{pmatrix} (\beta_{11})_0 & (\beta_{12})_0 & (\beta_{13})_0 \\ (\beta_{21})_0 & (\beta_{22})_0 & (\beta_{23})_0 \\ (\beta_{31})_0 & (\beta_{32})_0 & (\beta_{33})_0 \end{pmatrix}$$

sind constante Zahlen und da überdies die Determinante $|(\beta_{ik})_0| = 1$ ist, so gestattet diese Substitution die Umkehrung. Wir transformiren nun die vorgelegte Nullform f mittelst dieser Umkehrung und erhalten so eine Nullform $f' = (\beta_0)^{-1}f$, deren Coefficienten wiederum Constante sind. In Folge der in § 16 aufgestellten Formel ist

$$\underset{\tau=0}{L}\left[\begin{pmatrix} \tau^{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \tau^{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \tau^{\lambda_3} \end{pmatrix} f'\right] = \underset{\tau=0}{L}\,[(\gamma)(\alpha)(\beta)f'] .$$

Andererseits ist

$$\underset{\tau=0}{L}\,[(\gamma)(\alpha)(\beta)f'] = \underset{\tau=0}{L}\,[(\gamma)(\alpha)\underset{\tau=0}{L}\,\{(\beta)f'\}] = \underset{\tau=0}{L}\,[(\gamma)(\alpha)f].$$

Nach § 15 liefert die Anwendung der Substitution (α) auf f eine Form, deren Coefficienten für $\tau = 0$ sämmtlich endlich bleiben und da (γ) eine Substitution ist, deren Elemente nach ganzen positiven Potenzen fortschreitende Reihen sind, so ist auch $(\gamma)(\alpha)f$ eine Form, deren Coefficienten für $\tau = 0$ sämmtlich endlich bleiben. Somit folgt dann die nämliche Eigenschaft auch für die Form

$$\begin{pmatrix} \tau^{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \tau^{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \tau^{\lambda_3} \end{pmatrix} f' = f'(\tau^{\lambda_1} x_1, \tau^{\lambda_2} x_2, \tau^{\lambda_3} x_3) .$$

Da die Determinante der Substitution (α) für $\tau = 0$ unendlich wird, so ist die Summe $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ nothwendig eine negative Zahl.

Umgekehrt, wenn es für eine Form f mit numerischen Coefficienten 3 ganze Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ von den genannten Eigenschaften giebt, so ist die Form f offenbar eine Nullform; wir wollen eine Nullform von dieser besonderen Art eine kanonische Nullform nennen und sprechen dann die folgende Definition aus:

Eine ternäre Form $f = \Sigma a_{n_1 n_2 n_3} x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3}$ von der Ordnung n möge eine „kanonische Nullform" heissen, wenn sich 3 ganze Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, deren Summe negativ ist, finden lassen von der Art, dass jeder Coefficient $a_{n_1 n_2 n_3}$ den Werth 0 hat, für welchen die Zahl $\lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2 + \lambda_3 n_3$ negativ ausfällt, während die übrigen Coefficienten beliebige numerische Werthe besitzen.

Die vorigen Entwickelungen lehren dann den Satz:

Eine jede Nullform kann mittelst einer geeigneten linearen Substitution von der Determinante 1 *in eine kanonische Nullform transformirt werden.*

Verstehen wir unter einer Classe von Formen die Gesammtheit aller derjenigen Formen, welche durch lineare Substitution mit nicht verschwindender Determinante ineinander transformirt werden können, so spricht sich der eben gewonnene Satz, wie folgt aus:

In jeder Classe von Nullformen giebt es eine kanonische Nullform.

Die Aufgabe, alle Nullformen aufzustellen, ist somit auf die Frage nach den kanonischen Nullformen zurückgeführt, und diese Frage verlangt lediglich die Construction aller Systeme ganzer Zahlen λ_1, λ_2, λ_3 von der oben genannten Beschaffenheit.

§ 18.

Die Aufstellung der kanonischen Nullformen.

Um die am Schlusse des vorigen Paragraphen gestellte Aufgabe zu lösen, nehmen wir in einer Ebene ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seitenlänge n als Coordinatendreieck an und bestimmen dann die Coordinaten eines Punktes P dieser Ebene, wie folgt: wir ziehen durch P je eine Parallele zu den Seiten AC, BA, CB, welche die Dreieckseiten BC, CA, AB bezüglich in den Punkten A', B', C' treffen mögen. Die Abschnitte $\xi_1 = PA'$, $\xi_2 = PB'$, $\xi_3 = PC'$ seien dann die Coordinaten des Punktes P. Theilen wir jetzt jede der 3 Dreieckseiten in n gleiche Theile und ziehen dann durch diese Theilpunkte zu jeder Seite je $n-1$ Parallelen, so zerfällt das Coordinatendreieck in lauter gleichseitige Dreiecke von der Seitenlänge 1. Jedem so entstehenden im Inneren oder auf den Seiten des Coordinatendreiecks gelegenen Eckpunkte $\xi_1 = n_1$, $\xi_2 = n_2$, $\xi_3 = n_3$ entspricht dann ein Glied $a_{n_1 n_2 n_3} x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3}$ der ternären Form von der n^{ten} Ordnung und es entspricht auch umgekehrt einem jeden Gliede der ternären Form je ein Eckpunkt der construirten Dreiecke.

Sind nun u_1, u_2, u_3 beliebige reelle Constante, deren Summe $u_1 + u_2 + u_3$ von 0 verschieden ist, so stellt die Gleichung

$$u_1 \xi_1 + u_2 \xi_2 + u_3 \xi_3 = 0$$

eine Gerade dar, welche nicht durch den Mittelpunkt M des Coordinatendreieckes hindurchgeht. Wir bestimmen alle diejenigen Eckpunkte n_1, n_2, n_3, welche ausserhalb und mit dem Mittelpunkte M auf der nämlichen Seite von jener Geraden $u_1 \xi_1 + u_2 \xi_2 + u_3 \xi_3 = 0$ gelegen sind und setzen dann in der ternären Form n^{ter} Ordnung alle diesen Eckpunkten n_1, n_2, n_3 entsprechenden Coefficienten $a_{n_1 n_2 n_3}$ gleich 0,

dagegen die übrigen Coefficienten gleich irgendwelchen numerischen Werthen. Die so erhaltene Form werde mit $f_{u_1 u_2 u_3}$ bezeichnet; dieselbe ist eine kanonische Nullform. Um dies einzusehen, bestimmen wir 3 rationale Zahlen u_1', u_2', u_3' von nicht verschwindender Summe und von der Beschaffenheit, dass alle ausserhalb und mit M auf ein und der nämlichen Seite von jener Geraden $u_1 \xi_1 + u_2 \xi_2 + u_3 \xi_3 = 0$ gelegenen Eckpunkte auch ausserhalb und mit M auf der nämlichen Seite von der Geraden $u_1' \xi_1 + u_2' \xi_2 + u_3' \xi_3 = 0$ liegen und umgekehrt. Das dies immer möglich ist, sieht man leicht ein, wenn man die 3 Fälle unterscheidet, dass auf jener Geraden $u_1 \xi_1 + u_2 \xi_2 + u_3 \xi_3 = 0$ keine, eine oder mehrere der betrachteten Eckpunkte gelegen sind und man dann die u_1', u_2', u_3' genügend wenig von u_1, u_2, u_3 verschieden annimmt. Dann bestimmen wir eine positive oder negative ganze Zahl u derart, dass die Producte uu_1', uu_2', uu_3' ganze Zahlen mit negativer Summe sind. Setzt man diese ganzen Zahlen bezüglich gleich λ_1, λ_2, λ_3, so erweist sich mittelst derselben in der That die vorhin construirte Form $f_{u_1 u_2 u_3}$ als kanonische Nullform, da in $f_{u_1 u_2 u_3}$ alle diejenigen Coefficienten $a_{n_1 n_2 n_3}$ gleich 0 sind, für welche

$$\lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2 + \lambda_3 n_3 < 0$$

ausfällt.

Sind ferner v_1, v_2, v_3 reelle Constante, deren Summe verschwindet, so stellt die Gleichung $v_1 \xi_1 + v_2 \xi_2 + v_3 \xi_3 = 0$ eine Gerade dar, welche durch den Mittelpunkt M geht. In diesem Falle bestimmen wir alle diejenigen Eckpunkte u_1, u_2, u_3, welche auf jener Geraden $v_1 \xi_1 + v_1 \xi_2 + v_3 \xi_3 = 0$ liegen sowie alle diejenigen, welche ausserhalb und mit dem Coordinateneckpunkt A auf der nämlichen Seite jener Geraden $v_1 \xi_1 + v_2 \xi_2 + v_3 \xi_3 = 0$ gelegen sind und setzen dann in der ternären Form n^{ter} Ordnung alle diesen Eckpunkten n_1, n_2, n_3 entsprechenden Coefficienten $a_{n_1 n_2 n_3}$ gleich 0, dagegen die übrigen gleich beliebigen Werthen. Die so erhaltene Form werde mit $f_{v_1 v_2 v_3}$ bezeichnet; dieselbe ist wiederum eine kanonische Nullform. Um dies einzusehen, verschieben wir die Gerade $v_1 \xi_1 + v_2 \xi_2 + v_3 \xi_3 = 0$ parallel mit sich und in der Richtung von A weg derart, dass dabei kein Eckpunkt von der Geraden überschritten wird, welcher nicht schon zu Anfang auf der Geraden lag. Ist dann die neue Lage der Geraden durch die Gleichung $u_1 \xi_1 + u_2 \xi_2 + u_3 \xi_3 = 0$ dargestellt, so stimmt die Form $f_{v_1 v_2 v_3}$ offenbar mit $f_{u_1 u_2 u_3}$ überein und ist daher nach dem Vorhergehenden eine kanonische Nullform.

Bei der Definition der kanonischen Nullform $f_{v_1 v_2 v_3}$ hätten wir an Stelle der dem Punkte A zugewandten Seite der Geraden $v_1 \xi_1 + v_2 \xi_2 + v_3 \xi_3 = 0$ auch mit gleichem Rechte die andere Seite in Betracht ziehen können. Die so entstehende kanonische Nullform ist der ersteren umkehrbar eindeutig zugeordnet.

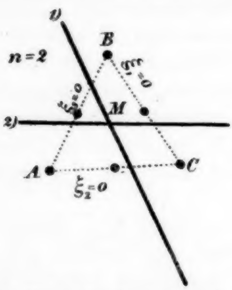
Die kanonischen Nullformen $f_{u_1 u_2 u_3}$ sind nun lediglich specielle Fälle der zuletzt behandelten kanonischen Nullformen $f_{v_1 v_2 v_3}$. Um dies zu beweisen, nehmen wir an, dass die Punkte M und A auf der nämlichen Seite der zu betrachtenden Geraden $u_1 \xi_1 + u_2 \xi_2 + u_3 \xi_3 = 0$ liegen und ziehen dann zu dieser Geraden durch M eine Parallele; die Gleichung dieser Parallelen sei $v_1 \xi_1 + v_2 \xi_2 + v_3 \xi_3 = 0$, wo die Summe $v_1 + v_2 + v_3 = 0$ ist. Man erhält nun die Form $f_{u_1 u_2 u_3}$ aus der Form $f_{v_1 v_2 v_3}$, wenn man in letzterer alle diejenigen Coefficienten gleich 0 nimmt, welche durch die zwischen beiden Parallelen gelegenen Eckpunkte dargestellt werden.

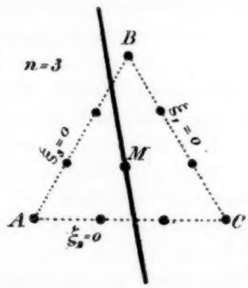
Liegen die Punkte M und A nicht auf der nämlichen Seite der Geraden $u_1 \xi_1 + u_2 \xi_2 + u_3 \xi_3 = 0$, so ist noch zuvor eine Vertauschung der Coordinaten nothwendig.

Nach dem Vorstehenden ist es zur Aufstellung einer vollständigen Tabelle der kanonischen Nullformen nur nöthig, die kanonischen Nullformen $f_{v_1 v_2 v_3}$ zu ermitteln und wir erhalten somit zur Construction jener Tabelle die folgende Regel:

Man ziehe durch den Mittelpunkt M irgend eine gerade Linie und bestimme dann diejenigen Eckpunkte, welche auf dieser Geraden oder auf der dem Punkte A zugewandten Seite ausserhalb dieser Geraden gelegen sind. Die diesen Eckpunkten n_1, n_2, n_3 entsprechenden Coefficienten $a_{n_1 n_2 n_3}$ in der ternären Form n^{ter} Ordnung setze man gleich 0, *während man die übrigen Coefficienten beliebig lasse.*

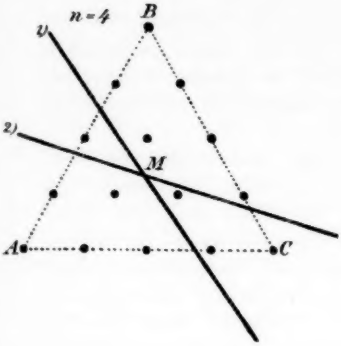
Da man auf die angegebene Art alle kanonischen Nullformen erhält, so folgt, dass die Anzahl der verschiedenen Arten von Nullformen übereinstimmt mit der Anzahl der wesentlich verschiedenen Stellungen, welche ein durch M gehender Strahl den betrachteten Eckpunkten gegenüber einnehmen kann. Dabei dürfen jedoch diejenigen Stellungen unberücksichtigt bleiben, für welche die entsprechenden Formen specielle kanonische Nullformen sind.

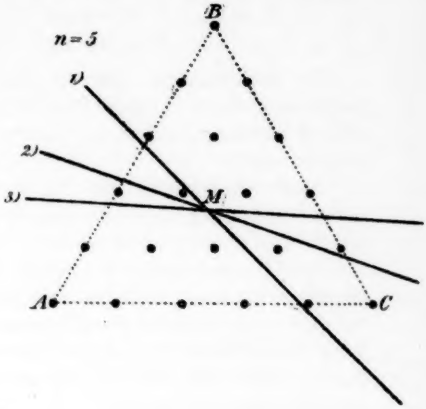


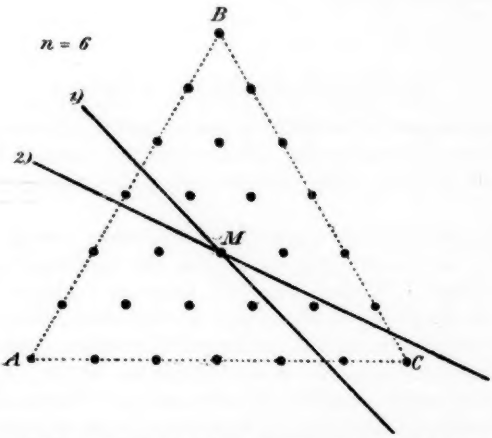


Um die gefundene Regel an einigen Beispielen zu erläutern, habe ich die obenstehenden und die auf Seite 365 folgenden Figuren entworfen,

denen man sofort die ternären kanonischen Nullformen bis zur 6^{ten} Ordnung entnimmt. Man erhält dann die folgende Tabelle, in welcher der Kürze halber $x_1 = 1$, $x_2 = x$, $x_3 = y$ gesetzt ist, ferner a eine







willkürliche Grösse und $(xy)_s$ einen homogenen Ausdruck s^{ten} Grades in x, y mit willkürlichen Coefficienten bedeutet.

$n = 2.$ 1) $(xy)_2$,

2) $ax + x(xy)_1$.

$n = 3.$ $ay^2 + (xy)_3$.

$n = 4.$ 1) $(xy)_3 + (xy)_4$,

2) $x\{ax + x(xy)_1 + (xy)_3\}$.

$n = 5.$ 1) $a x^3 + (xy)_4 + (xy)_5$,

2) $x \{x(xy)_1 + x(xy)_2 + (xy)_4\}$,

3) $x^2 \{a + (xy)_1 + (xy)_2 + (xy)_3\}$.

$n = 6.$ 1) $x^3(xy)_1 + (xy)_5 + (xy)_6$,

2) $x \{a x^2 + x^2(xy)_1 + x(xy)_3 + (xy)_5\}$.

Zu bemerken ist, dass im Falle $n = 2$ die beiden kanonischen Nullformen durch lineare Transformationen in einander übergeführt werden können, so dass in diesem Falle thatsächlich nur eine Nullform existirt.

Nach Berechnung der Nullformen kann man leicht angeben, welche Ausartung diejenigen ebenen Curven aufweisen, die durch Nullsetzen dieser Nullformen definirt sind. So erhält man aus dieser Tabelle für eine cubische ternäre Form das oben in § 7 S. 335 angegebene Resultat bestätigt. Ferner finden wir beispielsweise, dass für eine biquadratische Form f sämmtliche Invarianten dann und nur dann verschwinden, wenn die Curve $f = 0$ entweder einen 3-fachen Punkt besitzt oder wenn sie in eine cubische Curve und eine Wendetangente derselben zerfällt.

§ 19.

Die quaternären cubischen Nullformen.

Die dargelegte zur Aufstellung aller ternären Nullformen dienende Methode lässt sich unmittelbar auf den Fall von Formen und Formensysteme mit beliebig vielen Veränderlichen und Veränderlichenreihen ausdehnen.

Um beispielsweise die quaternären Nullformen von der 3. Ordnung aufzustellen, construiren wir im Raume ein reguläres Tetraeder mit der Kantenlänge 3, theilen dann jede Kante in 3 gleiche Stücke und ziehen durch die Theilpunkte zu jeder der 4 Seitenflächen je 2 Parallelebenen; dieselben zerschneiden das Tetraeder in lauter reguläre Tetraeder mit der Kantenlänge 1. Je einem Eckpunkte (n_1, n_2, n_3, n_4) dieser Tetraeder entspricht ein Glied der quaternären cubischen Form. Um alle kanonischen Nullformen zu ermitteln, haben wir alle möglichen Stellungen aufzusuchen, welche eine durch den Mittelpunkt M des Tetraeders gehende Ebene gegenüber den bezeichneten Eckpunkten einnehmen kann. Zu dem Zwecke benutzen wir das ursprüngliche Tetraeder zu einer ähnlichen Coordinatenbestimmung im Raume, wie vorhin das gleichseitige Dreieck in der Ebene. Dann wird eine jede den Mittelpunkt $M = (1, 1, 1, 1)$ enthaltende Ebene durch eine Gleichung von der Gestalt $u_1 \xi_1 + u_2 \xi_2 + u_3 \xi_3 + u_4 \xi_4 = 0$ dargestellt, wo $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0$ ist. Wir nehmen $u_1 \geqq u_2 \geqq u_3 \geqq u_4$ an und

nennen kurz einen Punkt $(\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0, \xi_4^0)$ des Raumes links oder rechts von der Ebene $u_1\xi_1 + u_2\xi_2 + u_3\xi_3 + u_4\xi_4 = 0$ gelegen, je nachdem $u_1\xi_1^0 + u_2\xi_2^0 + u_3\xi_3^0 + u_4\xi_4^0 \geqq$ oder < 0 ist. Aus der Gleichung $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0$ und den angenommenen Ungleichungen folgt $u_1 > 0$. Wir unterscheiden nun die beiden Fälle 1) $u_2 \leqq 0$, 2) $u_2 > 0$. Im Falle 1) erkennen wir leicht, dass die 9 Punkte (3, 0, 0, 0), (2, 1, 0, 0), (2, 0, 1, 0), (2, 0, 0, 1), (1, 2, 0, 0), (1, 0, 2, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 1) nothwendigerweise links von jener Geraden liegen und die Gleichung $5\xi_1 - \xi_2 - \xi_3 - 3\xi_4 = 0$ stellt auch wirklich eine Ebene dar, auf deren linker Seite gerade jene 9 Punkte liegen, während sämmtliche übrigen 11 Eckpunkte rechts von derselben gelegen sind. Im Falle 2) haben wir 2 Unterfälle 2a) und 2b) zu unterscheiden, je nachdem $\mu_3 \leqq 0$ oder $\mu_3 > 0$ ist. Im Falle 2a) liegen nothwendigerweise die 8 Eckpunkte (3, 0, 0, 0), (2, 1, 0; 0), (2, 0, 1, 0), (2, 0, 0, 1), (1, 2, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 1), (0, 3, 0, 0) links von jener Ebene und die Gleichung $5\xi_1 + \xi_2 - 3\xi_3 - 3\xi_4 = 0$ stellt auch wirklich eine Ebene dar, auf deren linker Seite jene 8 Punkte liegen, während sämmtliche übrigen 12 Eckpunkte rechts von derselben gelegen sind. Der Fall 2b) führt zu einer Ebene, auf deren linker Seite diejenigen 10 Eckpunkte, für welche $\xi_4 = 0$ ist und auf deren rechter Seite die übrigen 10 Eckpunkte gelegen sind. Wenn wir nun der Kürze wegen $x_1 = 1$, $x_2 = x$, $x_3 = y$, $x_4 = z$ setzen und unter a eine willkürliche Grösse unter $(xyz)_s$ und $(yz)_s$ homogene Ausdrücke s^{ten} Grades von x, y, z bezüglich y, z mit beliebigen Coefficienten verstehen, so erhalten wir folgende Tabelle der Nullformen:

1) $z^2 + (xyz)_3$,

2a) $(yz)_2 + (yz)_3 + x(yz)_2 + x^2(yz)_1$,

2b) $az + z(xyz)_1 + z(xyz)_2$.

Da aber, wie leicht zu sehen, die Nullform 2b) durch Anwendung einer geeigneten linearen Substitution in eine Gestalt transformirt werden kann, welche in der Form 2a) als Specialfall enthalten ist, so folgt, dass es nur 2 wesentlich verschiedene Arten von Nullformen giebt. Indem wir ferner die Ausartungen derjenigen cubischen Flächen ermitteln, welche durch Nullsetzen dieser Nullformen dargestellt werden, finden wir den folgenden Satz:

Für eine quaternäre cubische Form f verschwinden dann und nur dann sämmtliche Invarianten, wenn die durch $f = 0$ dargestellte Fläche entweder einen Doppelpunkt besitzt, für welchen die 2te Polare eine doppelt gezählte Ebene ist oder wenn dieselbe einen Doppelpunkt besitzt, für welchen die 2te Polare aus 2 getrennten Ebenen besteht, deren Schnittlinie ganz auf der Fläche liegt.

Auch die Theorie der quadratischen und bilinearen Formen mit beliebig vielen Veränderlichen kann auf dem eingeschlagenen Wege behandelt werden.

Ferner lassen sich durch die nunmehr gewonnenen Hilfsmittel alle diejenigen Sätze auf Formen mit 3 und mehr Veränderlichen ausdehnen, welche in Abschnitt II lediglich für binäre Formen abgeleitet sind. *Insbesondere erweist sich der in § 7 gefundene Satz über eine fundamentale Eigenschaft des Aronhold'schen Processes als allgemein gültig.*

Die gewonnenen Resultate über ternäre Nullformen gestatten die folgende geometrische Deutung: wenn wir die ternäre Form f durch einen Punkt in einem Raume von $N-1$ Dimensionen darstellen, so ist in diesem Raume durch das Nullsetzen aller Invarianten ein algebraisches Gebilde bestimmt, dessen irreducible Bestandtheile zufolge der obigen Entwicklung von vornherein angegeben werden können; zugleich sieht man, dass diese Gebilde sämmtlich rational d. h. von solcher Art sind, dass man ihre Punkte erhalten kann, indem man die Coordinaten derselben gleich rationalen Functionen von Parametern einsetzt.

Fassen wir alle Invarianten der ternären Grundform zu einem Modul zusammen, so haben wir durch die obigen Entwicklungen zugleich alle diejenigen irreduciblen Moduln bestimmt, welche in jenem Modul enthalten sind.

§ 20.

Das Verschwinden der Invarianten einer Nullform und die Ordnung dieses Verschwindens.

Die Thatsache, dass für eine kanonische Nullform sämmtliche Invarianten 0 sind, kann auch direct aus der obigen Definition der kanonischen Nullform abgeleitet werden und auf diesem Wege erhalten wir zugleich einen bemerkenswerthen Aufschluss über die Vielfachheit des Verschwindens der Invarianten einer beliebigen Nullform.

Eine Invariante der Grundform

$$f=\sum a_{n_1, n_2, n_3}\, x_1^{n_1}\, x_2^{n_2}\, x_3^{n_3}$$

ist nämlich eine ganze rationale Function der Coefficienten $a_{n_1 n_2 n_3}$, deren Glieder sämmtlich den gleichen Grad g und die gleichen Gewichte $p=\frac{1}{3}\,n g$ besitzen. Schreiben wir dieselbe also in der Gestalt

$$J=\sum C\prod a_{n_1 n_2 n_3}^{e_{n_1 n_2 n_3}},$$

wo C den Zahlencoefficient des betreffenden Gliedes bezeichnet, so gelten für die Exponenten $e_{n_1 n_2 n_3}$ die folgenden 3 Gleichungen

$$\sum n_1\, e_{n_1 n_2 n_3} = \frac{1}{3}\, ng,$$

$$\sum n_2\, e_{n_1 n_2 n_3} = \frac{1}{3}\, ng,$$

$$\sum n_3\, e_{n_1 n_2 n_3} = \frac{1}{3}\, ng,$$

wo die Summe über alle Systeme von Zahlen n_1, n_2, n_3 zu erstrecken ist, deren Summe n beträgt. Es möge nun $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ein System von 3 Zahlen sein, durch welche eine kanonische Nullform der oben gegebenen Definition gemäss bestimmt wird. Die Summe dieser 3 Zahlen sei gleich $-\lambda$, wo λ eine positive von 0 verschiedene Zahl bedeutet. Aus den letzteren Gleichungen folgt dann

$$\sum (\lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2 + \lambda_3 n_3)\, e_{n_1 n_2 n_3} = \frac{1}{3}\, ng(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = -\frac{1}{3}\, \lambda ng.$$

Lassen wir in der Summe linker Hand alle diejenigen Glieder weg, deren Werthe $\geqq 0$ sind, so erhalten wir

$$\sum{}' (\lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2 + \lambda_3 n_3)\, e_{n_1 n_2 n_3} \leqq -\frac{1}{3}\, \lambda ng$$

oder

$$\sum{}' (|\lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2 + \lambda_3 n_3|)\, e_{n_1 n_2 n_3} \geqq \frac{1}{3}\, \lambda ng,$$

wo die Summe $\sum{}'$ über alle Systeme von Zahlen n_1, n_2, n_3 zu erstrecken ist, für welche $\lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2 + \lambda_3 n_3$ negativ ausfällt. Bezeichnet ferner Λ den grössten der absoluten Werthe von $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, so ist

$$|\lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2 + \lambda_3 n_3| \leqq n\Lambda$$

und hieraus ergiebt sich

$$\sum{}' e_{n_1 n_2 n_3} \geqq \frac{\lambda g}{3\Lambda}$$

d. h. in jedem Gliede $C\,\Pi\, a_{n_1 n_2 n_3}^{e_{n_1 n_2 n_3}}$ einer Invariante erreicht oder übersteigt die Summe der Exponenten derjenigen Coefficienten $a_{n_1 n_2 n_3}$, welche für eine kanonische Nullform gleich 0 sind, eine gewisse positive Zahl $\frac{\lambda g}{3\Lambda}$ und daher *verschwinden für eine kanonische Nullform nicht nur alle Invarianten, sondern auch sämmtliche nach den $a_{n_1 n_2 n_3}$ genommenen Differentialquotienten derselben bis zu einer gewissen Ordnung G hin, wo G die grösste ganze, den Werth $\frac{\lambda g}{3\Lambda}$ nicht übersteigende Zahl bedeutet* und mithin eine Zahl ist, welche zugleich mit dem Grade g selbst über alle Grenzen hinaus wächst. Da nun jede beliebige Nullform nach dem obigen Satze in eine kanonische Nullform transformirt

werden kann, *so gilt die eben gefundene Eigenschaft für eine jede Nullform* und auf diesen Umstand lässt sich ein neuer Beweis für die Endlichkeit des vollen Invariantensystems gründen, auf welchen ich jedoch hier nicht näher eingehe.*)

VI.

Die Aufstellung des vollen Invariantensystems.

§ 21.

Die drei Schritte zur Erlangung des vollen Invariantensystems.

Um nach der in Abschnitt I und II entwickelten Methode das volle Invariantensystem zu erhalten, hat man der Reihe nach die folgenden 3 Aufgaben zu lösen:

1. Man stelle ein System S_1 von Invarianten auf, durch welche sich alle übrigen Invarianten der Grundform als ganze algebraische Functionen ausdrücken lassen.

2. Man stelle ein System S_2 von Invarianten auf, durch welche sich alle übrigen Invarianten rational ausdrücken lassen.

3. Man berechne ein vollständiges System S_3 von ganzen algebraischen Functionen in dem durch die Systeme S_1 und S_2 bestimmten Invariantenkörper. Die Functionen dieses Systems S_3 sind Invarianten und bilden, zusammengenommen mit den Invarianten S_1, das gesuchte volle Invariantensystem.

Von diesen 3 Aufgaben ist die erste die schwierigste. Nach dem in § 4 bewiesenen Satze erhält man ein System S_1, indem man solche Invarianten ermittelt, deren Verschwinden nothwendig das Verschwinden aller Invarianten zur Folge hat, und hierzu wiederum genügt es nach dem in § 14 bewiesenen Satze, alle diejenigen Invarianten in Betracht zu ziehen, deren Gewicht eine gewisse Zahl nicht übersteigt. Was endlich die wirkliche Berechnung eines solchen Systems S_1 in bestimmten Fällen angeht, so wird dieselbe wesentlich durch die in § 18 gewonnene Kenntniss der Nullformen erleichtert; denn mittelst dieser Kenntniss kann in jedem besonderen Falle offenbar leicht entschieden werden, ob irgend welche bereits gefundenen Invarianten von der Beschaffenheit sind, dass ihr Verschwinden nothwendig das Verschwinden sämmtlicher Invarianten zur Folge hat.

Die Aufstellung eines Systems S_2 ist mit Hilfe einer typischen Darstellung oder durch eine geeignete in jedem besonderen Falle an-

*) Diesen Beweis habe ich dargelegt in meiner 3ten oben citirten Note S. 7; derselbe gebraucht nicht das Theorem I meiner Arbeit: Ueber die Theorie der algebraischen Formen, Math. Ann. Bd. 36, S. 474.

zustellende Rechnung möglich. Wir wollen jedoch im folgenden Paragraphen zeigen wie auch ohne die Kenntniss eines Systems S_2 das volle Invariantensystem aufgestellt werden kann.

§ 22.

Die Ableitung des vollen Invariantensystems aus den Invarianten $J_1, \ldots, J_\varkappa$.

Es sei $i_1, \ldots i_m$ ein System S_1 von Invarianten, durch welche sich alle übrigen ganz und algebraisch ausdrücken lassen. Der in § 1 bewiesene Hilfssatz lehrt dann, aus diesen Invarianten ein System von $\varkappa$ Invarianten $J_1, \ldots, J_\varkappa$ berechnen, durch welche sich ebenfalls alle Invarianten der Grundform ganz und algebraisch ausdrücken lassen, und zwischen denen keine algebraische Relation stattfindet. Ist dies geschehen, so wähle man aus den Functionen $b_1, \ldots, b_N$ eine gewisse Zahl τ von Functionen aus — es seien dies etwa $b_1, \ldots, b_\tau$, so dass zwischen $J_1, \ldots, J_\varkappa$, $b_1, \ldots, b_\tau$ keine algebraische Relation stattfindet und dass sämmtliche übrigen Functionen $b_{\tau+1}, b_{\tau+2}, \ldots, b_N$ algebraische Functionen von $J_1, \ldots, J_\varkappa, b_1, \ldots, b_\tau$ sind*). Nun gilt, wenn p_1 das Gewicht der Invariante J_1 bezeichnet, die Gleichung

$$\delta^{p_1} J_1(a_1, \ldots, a_N) = J_1(b_1, \ldots, b_N)$$

und da infolgedessen die Grösse δ eine algebraische Function von $J_1, b_1, \ldots, b_N$ ist, so lassen sich nach einem bekannten Satze in dem Ausdrucke

$$B = c\delta + c_{\tau+1} b_{\tau+1} + c_{\tau+2} b_{\tau+2} + \cdots + c_N b_N$$

die Constanten $c, c_{\tau+1}, c_{\tau+2}, \ldots, c_N$ derart bestimmen, dass sämmtliche Grössen $\delta, b_{\tau+1}, b_{\tau+2}, \ldots, b_N$ rationale Functionen von $B, J_1, \ldots, J_\varkappa, b_1, \ldots, b_\tau$ sind. Die Function B genügt einer Gleichung von der Gestalt

$$B^\mu + R_1 B^{\mu-1} + \cdots + R_\mu = 0,$$

wo $R_1, \ldots, R_\mu$ rationale Functionen von $J_1, \ldots, J_\varkappa, b_1, \ldots, b_\tau$ sind.

Wir betrachten jetzt $J_1, \ldots, J_\varkappa, b_1, \ldots, b_\tau$ als die unabhängigen Veränderlichen und bestimmen dann in dem durch B definirten Functionenkörper ein Fundamentalsystem d. h. ein System von ganzen algebraischen Functionen $B_1, \ldots, B_M$ des Körpers derart, dass jede andere ganze Function des Körpers sich in der Gestalt

$$G_1 B_1 + G_2 B_2 + \cdots + G_M B_M$$

*) Die Zahl $\varkappa$ hat in dem vorliegenden Falle einer ternären Grundform n^{ter} Ordnung den Werth $N - 8$ und die Zahl τ hat den Werth 9.

darstellen lässt, wo $G_1, G_2, \ldots, G_M$ ganze rationale Functionen von $J_1, \ldots, J_\varkappa$, $b_1, \ldots, b_\tau$ sind. Die Functionen B_s genügen, da sie ganze algebraische Functionen von $J_1, \ldots, J_\varkappa$, $b_1, \ldots, b_\tau$ sind, je einer Gleichung von der Gestalt

$$B_s^\mu + \Gamma_{1s} B_s^{\mu-1} + \cdots + \Gamma_{\mu s} = 0, \quad (s = 1, 2, \ldots, M),$$

wo $\Gamma_{1s}, \ldots, \Gamma_{\mu s}$ ganze rationale Functionen von $J_1, \ldots, J_\varkappa$, $b_1, \ldots b_\tau$ sind, und da diese Functionen andrerseits rational von $B, J_1, \ldots, J_\varkappa$, $b_1, \ldots, b_\tau$ abhängen, so gehen dieselben, wenn man an Stelle der Grössen $b_1, \ldots, b_N$ ihre Ausdrücke in $a_1, \ldots, a_N$, $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{33}$ einsetzt, über in ganze rationale Functionen von $a_1, \ldots, a_N$, $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{33}$.

Bezeichnen wir, wenn irgend ein von $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{33}$ ganz und rational abhängender Ausdruck A vorgelegt ist, allgemein das von diesen Grössen $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{33}$ freie Glied mit $[A]$, so sind offenbar die Ausdrücke $[B_1], \ldots, [B_M]$ sämmtlich Invarianten der Grundform. In der That $[B_s]$ genügt der Gleichung

$$[B_s]^\mu + [\Gamma_{1s}]\,[B_s]^{\mu-1} + \cdots + [\Gamma_{\mu s}] = 0$$

und da nun lediglich die Grössen $b_1, \ldots, b_\tau$ noch die Substitutionscoefficienten $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{33}$ enthalten, so ist klar, dass die Ausdrücke $[\Gamma_{11}], \ldots, [\Gamma_{1s}], \ldots [\Gamma_{\mu s}]$ ganze rationale Functionen der Invarianten $J_1, \ldots, J_\varkappa$ sind. Hieraus folgt wegen der in der Einleitung genannten Eigenschaft 3. des Invariantensystems, dass $[B_1], \ldots, [B_M]$ Invarianten sind.

Andrerseits ist eine jede Invariante J der Grundform f wegen der Gleichung

$$\delta^p J(a_1, \ldots, a_N) = J(b_1, \ldots, b_N)$$

eine rationale Function der Grössen $\delta, b_1, \ldots, b_N$ und da sie ausserdem ganz und algebraisch von $J_1, \ldots, J_\varkappa$ abhängt, so ist sie eine ganze algebraische Function des betrachteten Körpers und als solche nothwendig in der Gestalt

$$J = G_1 B_1 + \cdots + G_M B_M$$

darstellbar, wo $G_1, \ldots, G_M$ ganze rationale Functionen von $J_1, \ldots, J_\varkappa$ $b_1, \ldots, b_\tau$ sind. Aus dieser Formel erhält man

$$J = [G_1]\,[B_1] + \cdots + [G_M]\,[B_M],$$

wo $[G_1], \ldots, [G_M]$ ganze rationale Functionen von $J_1, \ldots, J_\varkappa$ sind. Diese Gleichung sagt aus, dass $J_1, \ldots, J_\varkappa$, $[B_1], \ldots, [B_M]$ ein System von Invarianten bilden, durch welche sich eine jede andere Invariante der Grundform f ganz und rational ausdrücken lässt.

Die auseinandergesetzte Methode zur Aufstellung des vollen Invariantensystems erfordert lediglich rationale und von vornherein übersehbare Processe und die nähere Ausführung liefert auch zugleich eine nur von n abhängige obere Grenze für die Gewichte der Invarianten des vollen Invariantensystems. Hiermit sind, glaube ich, die wichtigsten allgemeinen Ziele einer Theorie der durch die Invarianten gebildeten Functionenkörper erreicht.

Königsberg, den 29. September 1892.

Der aus den Sätzen über Wärmegleichgewicht folgende Beweis des Princips des letzten Multiplicators in seiner einfachsten Form.

Von

Ludwig Boltzmann in München.

Ich bin schon im Jahre 1871*) bei Behandlung des Wärmegleichgewichtes unter Gasmolekülen durch Zufall auf einen eigenthümlichen Beweis des Jacobi'schen**) Principes des letzten Multiplicators gestossen. Dieser Beweis ist jedoch dort nicht in seiner einfachsten, von jeder Beziehung zur Gastheorie losgelösten Form mitgetheilt und es sei mir daher gestattet, hier nochmals darauf zurückzukommen, weil er mir doch einen neuen Einblick in das Wesen des Jacobi'schen Satzes oder wenigstens in dessen Beziehungen zu scheinbar ganz fremden Gebieten der Mechanik zu bieten scheint.

Sei x eine independente Variable. Die dependenten Variablen $x_1, x_2 \ldots x_n$ seien durch die Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1}{dx} = \frac{X_1}{X}, \quad \frac{dx_2}{dx} = \frac{X_2}{X} \ldots \frac{dx_n}{dx} = \frac{X_n}{X}$$

und durch die Anfangswerthe $x_1^0, x_2^0 \ldots x_n^0$ gegeben, welche zu $x = 0$ (oder wenn man will $x = x^0$) gehören. Sämmtliche X seien Functionen von $x, x_1 \ldots x_n$. Den Inbegriff aller bei Voraussetzung bestimmter Anfangswerthe als Functionen von x ausgedrückten Werthe von $x_1\, x_2 \ldots x_n$ nennen wir kurz ein System. Wir betrachten alle Systeme, für welche die Anfangswerthe zwischen den Grenzen

(1) x_1^0 und $x_1^0 + dx_1^0$, x_2^0 und $x_2^0 + dx_2^0 \ldots x_n^0$ und $x_n^0 + dx_n^0$

liegen. Für dieselben sollen die zu irgend einem andern x gehörigen Werthe zwischen

$$x_1 \text{ und } x_1 + dx_1,\ x_2 \text{ und } x_2 + dx_2 \ldots x_n \text{ und } x_n + dx_n,$$

die zu $x + \delta x$ gehörigen Werthe zwischen

$$x_1' \text{ und } x_1' + dx_1',\ x_2' \text{ und } x_2' + dx_2' \ldots x_n' \text{ und } x_n' + dx_n'$$

*) Sitzber. d. Wiener Acad. Bd. 63, Maiheft 1871.

**) Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, ges. Werke Supplementband 10. bis 15. Vorlesung.

liegen. Dann ist

$$dx_1' dx_2' \cdots dx_n' = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1'}{\partial x_1}, & \frac{\partial x_2'}{\partial x_1} & \cdots \\ \frac{\partial x_1'}{\partial x_2} & . & \cdots \\ . & . . . . & . \end{vmatrix} dx_1\, dx_2 \ldots dx_n.$$

Ferner ist für jedes i

$$x_i' = x_i + \frac{X_i}{X}\,\delta x, \quad \frac{\partial x_i'}{\partial x_i} = 1 + \delta x \left(\frac{1}{X}\,\frac{\partial X_i}{\partial x_i} - \frac{X_i}{X^2}\,\frac{\partial X}{\partial x_i}\right)$$

und die obige Formel liefert, wenn man δx^2 vernachlässigt,

$$dx_1' dx_2' \cdots dx_n' = \left[1 + \frac{\delta x}{X}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right)\right.$$
$$\left. - \frac{\delta x}{X}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{X_1}{X}\,\frac{\partial X}{\partial x_1} \cdots \frac{X_n}{X}\,\frac{\partial X}{\partial x_n}\right)\right] dx_1\, dx_2 \cdots dx_n.$$

Setzt man $Z = e^{\int \frac{dx}{X}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x} \cdots \frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right)}$ und bezeichnet mit einem Striche oben die zu $x + \delta x$, mit einer oben angehängten Null aber die zu $x = 0$ gehörigen Werthe, so findet man für den Ausdruck in der eckigen Klammer

$$1 + \frac{\delta Z}{Z} - \frac{\delta X}{X} = \frac{Z'}{X'} \cdot \frac{X}{Z}$$

und hat daher

$$\frac{X'}{Z'}\, dx_1' dx_2' \cdots dx_n' = \frac{X}{Z}\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_n.$$

Da eine analoge Gleichung für alle früheren und folgenden Zuwächse von x gilt, so folgt auch

$$(2) \qquad \frac{X}{Z}\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_n = \frac{X^0}{Z^0}\, dx_1^0\, dx_2^0 \cdots dx_n^0.$$

Nun seien

$$\varphi_i(x, x_1 \ldots x_n) = a_i \quad i = 1, 2 \ldots n$$

die Integrale obiger Differentialgleichungen.

Für die durch die Bedingungen (1) gegebenen Systeme sollen die a zwischen den Grenzen

$$a_1 \text{ und } a_1 + da_1,\ a_2 \text{ und } a_2 + da_2 \cdots a_n \text{ und } a_n + da_n$$

liegen und wir bezeichnen mit D die Functionaldeterminante

$$\sum \pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n};$$

dann ist für jedes gegebene x

$$da_1\, da_2 \cdots da_n = D\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_n = D^0\, dx_1^0\, dx_2^0 \ldots dx_n^0.$$

Dies liefert in Verbindung mit Gleichung (2)

$$\frac{ZD}{X} = \frac{Z^0 D^0}{X^0} = C$$

wobei C eine für jedes System constante Grösse ist, d. h. der Ausdruck $ZD : X$ reducirt sich, wenn man $x_1 x_2 \ldots x_n$ durch x und die a ausdrückt, bloss auf eine Function der letztern.

Um nun auf den Fall zu kommen, dass wir alle Integrale bis auf eines (bis auf φ_1) kennen, wollen wir in der obigen für ein beliebiges constantes x geltenden Gleichung

$$da_1\, da_2 \cdots da_n = D\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_n$$

beiderseits die Differentiale $dx_1\, da_2\, da_3 \cdots da_n$ einführen. Rechts ist zu setzen

$$dx_1\, dx_2 \cdots dx_n = \frac{1}{\Delta}\, dx_1\, da_2 \cdots da_n$$

wobei in

$$\Delta = \sum \pm \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}$$

x und x_1 als constant, $\varphi_2 \ldots \varphi_n$ aber als Functionen von $x_2 \ldots x_n$ zu betrachten sind.

Links dagegen ist

$$da_1 = \frac{\partial \varphi_1 (x x_1 a_2 \cdots a_n)}{\partial x_1}\, dx_1 .$$

Man erhält also, wenn man durch $dx_1\, da_2 \ldots da_n$ wegdividirt

$$\frac{\partial \varphi_1 (x x_1 a_2 \cdots a_n)}{\partial x_1} = \frac{D}{\Delta} = \frac{CX}{\Delta Z} .$$

Wenn alle Integrale bis auf φ_1 bekannt sind, so ist aber dies ein integrirender Factor der Differentialgleichung $dx_1 = \frac{X_1}{X}\, dx$. X ist gegeben, Δ lässt sich berechnen, Z ist freilich im allgemeinen unbekannt, kann aber wie Jacobi gezeigt hat, in gewissen Specialfällen leicht gefunden werden.

Ueber Kreisbogenpolygone.

(Erste Abhandlung).

Von

A. Schönflies in Göttingen.

Seit den Untersuchungen des Herrn Schwarz über conforme Abbildung ist das Kreisbogenpolygon mehr und mehr zu einem fundamentalen Hilfsmittel der modernen functionentheoretischen Betrachtungen geworden; ein Studium seiner geometrischen Natur dürfte daher auch ausserhalb der reinen Geometrie nicht ohne Nutzen sein.

Ich möchte hierfür im besondern auf diejenigen Untersuchungen verweisen, die Herr Klein in letzter Zeit im Gebiet der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung angestellt hat; in ihnen ist auch die eigentliche Veranlassung zu der folgenden Arbeit enthalten. Bekanntlich hat Herr Schwarz zuerst gezeigt,*) dass der Quotient zweier Zweige der hypergeometrischen Reihe die Abbildung der Halbebene auf ein Kreisbogendreieck vermittelt. Steht hier noch die blosse Thatsache der Abbildung im Vordergrund des Interesses, so ist Herr Klein dazu fortgeschritten, das Kreisbogendreieck zum eigentlichen Operationsobject zu machen, und des weiteren darauf hinzuweisen, dass für die Theorie der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten ganz allgemein dasjenige Kreisbogenpolygon mit Erfolg zu benutzen ist, auf welches die Halbebene durch den Quotienten zweier Particularlösungen abgebildet wird.**)

Hierbei liegt natürlich die Voraussetzung zu Grunde, dass es gelingt, die Gesammtheit der Kreisbogenpolygone morphologisch zu beherrschen. Für die Kreisbogendreiecke ist diese Aufgabe von Herrn Klein in einer Arbeit über die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe vollständig erledigt worden.***) Eine analoge Untersuchung der

*) Ueber diejenigen Fälle, in denen die Gauss'sche hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes ist. (Crelle's Journ. Bd. 75, S. 292).

**) Vgl. besonders Ueber die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe. Diese Annalen, Bd. 37, S. 573.

***) a. a. O. S. 579 ff.

allgemeinen Kreisbogen-n-ecke steht aber noch aus*); sie zu geben, ist die Absicht einiger Abhandlungen, von denen ich heute die erste mittheile.

Ich beschränke mich zunächst darauf, die geradlinigen Polygone in Betracht zu ziehen. Als Träger der Polygone ist die einfach oder mehrfach überdeckte complexe Ebene zu betrachten. Für die functionentheoretischen Beziehungen verweise ich auf meine kürzlich in den Göttinger Nachrichten erschienene Note, in der die bezüglichen Verhältnisse ausführlicher angegeben worden sind. Ich hatte mich dort auf die Betrachtung derjenigen Polygone beschränkt, die von inneren Windungspunkten frei sind. Inzwischen hat Herr van Vleck auch die Abbildung solcher Polygone genauer studirt, die innere Windungspunkte enthalten; und demgemäss habe ich jetzt, was geometrisch keinerlei Schwierigkeiten macht, die Erörterung dieser Polygone gleichfalls in den Kreis der Betrachtung gezogen.

Die Theorie der allgemeinen Kreisbogenpolygone, die sich in mehrfacher Hinsicht von der Theorie der geradlinigen Polygone wesentlich unterscheidet, denke ich demnächst folgen zu lassen.

§ 1.
Beispiele einfacher Polygontypen.

Wir beschäftigen uns zunächst mit solchen Polygonen, deren Inneres von Windungspunkten frei ist.

Legt man m Dreiecke SAB, SCD, ... so aneinander, dass die Ecken S sämmtlich in einen festen Punkt O fallen, so entsteht, falls die Summe aller in O zusammenstossenden Winkel grösser als 2π ist, ein Polygon $\mathfrak{P}$ das in O einen Windungspunkt besitzt. Die einfachste Gestalt eines solchen Polygons zeigt die nebenstehende Fig. 1**). Ist $\lambda\pi$ der in O liegende Winkel, und ist

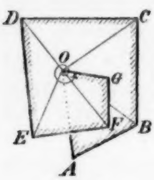


Fig. 1.

$$\lambda\pi = 2w\pi + \lambda'\pi, \quad 0 \leq \lambda' < 2$$

so ist O ein w-facher Windungspunkt. Wir wollen $\lambda'\pi$ den *Winkelrest* des Winkels $\lambda\pi$ nennen.

Der kleinste Werth von n, für den ein derartiges n-Eck existirt, ist $n = 5$; wir haben nämlich mindestens drei Dreiecke nöthig, um einen Windungspunkt zu erhalten. Polygone mit mehreren

*) Einige Bemerkungen hierüber finden sich bereits in den von Herrn Klein von 1891—1892 gehaltenen Vorlesungen. Vgl. ferner folgende Arbeiten des Herrn Klein: *Ueber Lamé'sche Functionen* (Göttinger Nachrichten 1890, S. 86), *Ueber den Hermite'schen Fall der Lamé'schen Gleichung* (Math. Annalen 40).

**) Das Innere der Polygone ist durch eine leichte Schraffirung kenntlich gemacht. Soweit thunlich, sind die unsichtbaren Theile der Figuren punktirt gezeichnet.

Windungspunkten gewinnen wir, indem wir Polygone mit einem Windungspunkt beliebig aneinandersetzen. Ein Polygon mit zwei Windungspunkten, das im übrigen lauter endliche Seiten besitzt, existirt bereits für $n = 7$. Man erhält es am einfachsten, indem man (Fig. 2) ein Fünfeck und ein Sechseck mit je einem Windungspunkt aneinandersetzt, für welches die Winkel an den coincidirenden Ecken zusammen gleich π sind; alsdann sind diese Punkte für das neue Polygon keine Eckpunkte, und man erhält in der That ein Siebeneck. Man schliesst auf diese Weise weiter, dass m Windungspunkte bei lauter endlichen Seiten bereits in einem Polygon mit $2m + 3$ Ecken auftreten können. Es ist klar, dass diese Windungspunkte in beliebiger Art zusammenfallen können.

Fig. 2.

Eine Seite, die ν mal durch den Unendlichkeitspunkt zieht, soll *ν-fach umlaufend* genannt werden; den einfachsten Fall eines Polygons mit einer einfach umlaufenden Seite zeigt Fig. 3, die ein Dreieck ABC darstellt. Drehen wir im Dreieck ABC die Seite AC um A nach aussen, so entsteht ein Dreieck, dass ausser der umlaufenden Seite überdies in A einen Windungspunkt hat, und wenn wir mit der Drehung der Seite AC fortfahren, so erhalten wir schliesslich ein Dreieck, dessen Seite BC zweifach umlaufend ist, u. s. w.

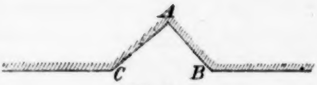


Fig. 3.

Wir können uns ein Polygon mit einer zweifach umlaufenden Seite noch auf andre Weise bilden. Wir benutzen dazu (Fig. 4) ein Dreieck ABC und das Fünfeck $CDEFG$ mit je einer umlaufenden Seite und zwar setzen wir voraus, dass die beiden Winkel C zusammen gleich π sind. Legen wir nun das Fünfeck von aussen so an das Dreieck, das C auf C und CD auf CB fällt, so entsteht wiederum ein Polygon mit einer zweifach umlaufenden Seite, nämlich das Polygon $ABDEFG$. Ausdrücklich möge bemerkt werden, dass in diesem Polygon kein Eckpunkt ein Windungspunkt ist.

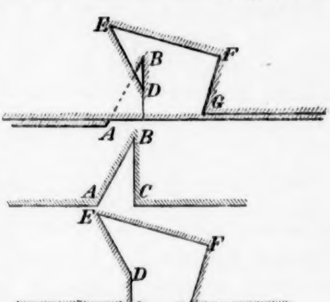


Fig. 4.

In dieser Weise können wir fortfahren; wir können uns dadurch Polygone mit beliebig vielen mehrfach umlaufenden Seiten verschaffen.

Endlich führen wir noch einige Polygone an, deren Fläche den Unendlichkeitspunkt in sich enthält. Zieht die Fläche p mal durch ihn hindurch, so sagen wir, das Polygon besitzt p *Flächendurchgänge.*

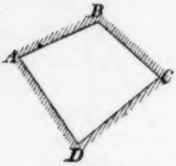


Fig. 5.

Ist $ABCD$ ein gewöhnliches Viereck, so bestimmt (Fig. 5) das Aeussere von $ABCD$ ein Viereck, das einen Flächendurchgang besitzt; es besteht aus demjenigen Theil der complexen Ebene, der nach Entfernung des elementaren Vierecks übrig bleibt. Wir brauchen jetzt wieder nur zwei derartige Polygone an einander zu setzen um ein Polygon mit zwei Flächendurchgängen zu erhalten. Ein solches Polygon zeigt z. B. Fig. 6; es besteht aus den beiden Vierecken $ABCD$ und $DEFA$ und hat daher in A einen Windungspunkt.

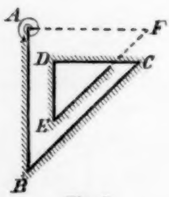


Fig. 6.

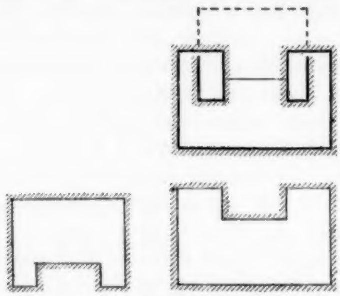


Fig. 7.

Ein anderes derartiges Polygon zeigt Fig. 7; es hat keinen Windungspunkt und geht durch Zusammensetzung der beiden nebenstehenden Achtecke hervor u. s. w. u. s. w.

Die meisten der hier vorgeführten Polygone bedecken Theile der Ebene mehrfach und sind daher mehrblättrige Flächenstücke. Wir führen in dieser Hinsicht folgenden Sprachgebrauch ein. Sind Q und R irgend zwei im Innern oder auf dem Umfang gelegene Punkte, die durch einen ganz in einer Ebene enthaltenen, und im Innern des Polygons verlaufenden Linienzug l verbunden werden können, so sagen wir, *Q und R liegen in demselben Blatt.* Giebt es einen solchen Linienzug nicht, so sagen wir, *Q und R liegen in verschiedenen Blättern.* Denken wir uns den Linienzug l in einer und derselben Ebene gezeichnet, so darf er sich im ersten Fall nicht kreuzen, im zweiten besitzt er nothwendig mindestens einen Kreuzungspunkt. Im Grenzfalle, d. h. wenn Q und R übereinander liegen, wollen wir ebenfalls sagen, dass sie verschiedenen Blättern angehören. Der Linienzug l kehrt dann in sich selbst zurück, *kann aber nicht in einen Punkt zusammengezogen werden.*

Wir beantworten im Anschluss hieran die Frage, ob und wann mehrere Ecken oder Seiten des Polygons coincidiren können, und zwar ist dies so zu verstehen, dass wir uns die Begrenzung des Polygons in einer und derselben Ebene gezeichnet denken. Es sei A ein Eckpunkt, der mit dem Seitenstück s in demselben Blatt liegt. Bewegt sich der Punkt A so, dass er von innen auf s fällt, so hört das Polygon auf, einfach zusammenhängend zu sein; es zerfällt in zwei getrennte Polygone, die in A zusammenstossen. Wird jedoch die Ecke A so bewegt, dass sie von aussen auf s fällt, so hört der Zusammenhang nicht auf; wir haben nach dem Obigen A und s als in verschiedenen Blättern liegend aufzufassen, und dass Coincidenz in verschiedenen Blättern stattfinden darf, ist selbstverständlich. Wenn man nun A noch weiter in der bisherigen Richtung, also in das Innere des Polygons hineinrücken lässt, so liegt A bereits in einem andern Blatt, als die darunter befindliche Polygonfläche.

Das gleiche gilt, wenn zwei Ecken oder zwei Seiten aufeinander fallen.

Ueber die Winkel des Polygons bemerken wir noch folgendes. Es handelt sich um die Auffassung solcher Polygone, für welche einige Winkelzahlen λ resp. λ' ganzzahlige Werthe annehmen. Ist $\lambda > 2$, so liegt an der bezüglichen Ecke W ein Windungspunkt, die Schenkel des Winkels verlaufen in verschiedenen Blättern, dieser Fall stellt also eine eigentliche Besonderheit nicht dar. Das gleiche gilt für $\lambda = 2$; wir haben dann wieder nur den Grenzfall vor uns, dass die beiden Winkelschenkel von aussen zusammenfallen.

Endlich bedarf auch der Fall $\lambda = 1$ keiner besonderen Erörterung. Den Fall $\lambda = 0$ schliessen wir dagegen aus; er bedingt zwar keine wesentlichen Ausnahmen für die im Folgenden abzuleitenden Sätze, doch bedürfen die Beweise für $\lambda = 0$ einiger Modificationen, auf die wir, um die Darstellung nicht zu sehr zu dehnen, nicht besonders eingehen wollen.

Schliesslich möge noch darauf hingewiesen werden, dass für die hier im Vordergrund stehenden Zwecke kreisverwandte Polygone nicht als verschieden zu betrachten sind. Die Theorie der geradlinigen Polygone ist daher mit der Theorie derjenigen Polygone, deren Seiten sämmtlich durch denselben Punkt gehen, identisch.

Im Interesse der Anschauung werden wir uns auch gelegentlich die Polygone stereographisch auf die Kugel projicirt denken.

§ 2.

Die Hauptrelation.

Für das Folgende setzen wir zunächst voraus, dass alle Ecken des Polygons $\mathfrak{P}$ im Endlichen liegen.

Wir suchen eine Relation, welche die Windungszahlen w mit der Zahl p der Flächendurchgänge und mit den Seitenumlaufszahlen v verbindet. Wir erhalten sie, indem wir das Polygon in ein anderes verwandeln, in welchem alle w, v, p den Werth Null haben. Ein solches Polygon soll ein *Elementarpolygon* heissen; ich bemerke, dass auch ein Elementarpolygon Theile der Ebene mehrfach überdecken kann. (Fig. 8).

Einen Windungspunkt W entfernt man dadurch, dass man ihn durch einen gewöhnlichen Querschnitt q ausschneidet, der auf dem

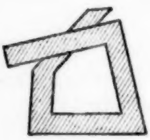


Fig. 8.

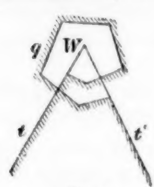


Fig. 9.

einen Schenkel t beginnt und auf dem andern t' endigt (Fig. 9). Dies ist, wenn man den Querschnitt q nur nahe genug um den Punkt W verlaufen lässt, immer möglich; wir dürfen im besondern noch voraussetzen, dass in dem durch q ausgeschnittenen Polygon — von W abgesehen — alle Winkel kleiner als π sind. Der Querschnitt theilt das Polygon $\mathfrak{P}$ in allen Fällen in zwei einfach zusammenhängende Polygone.

Eine einmal durch den Unendlichkeitspunkt ziehende Seite s ersetzen wir (Fig. 10) durch den ganz im Endlichen verlaufenden Linienzug $ABCD$, in dem der Einfachheit halber alle Winkel rechte sind; d. h. wir schneiden den Unendlichkeitspunkt durch das Viereck $ABCD$ aus. Da wir angenommen haben, dass jede Ecke des Polygons im Endlichen liegt, so muss es stets möglich sein, die Punkte A, B, C, D dem Unendlichkeitspunkt so nahe anzunehmen, dass kein Polygoneckpunkt innerhalb des ausgeschnittenen Vierecks $ABCD$ liegt.

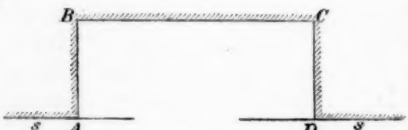


Fig. 10.

Der Linienzug $ABCD$ ist ebenfalls ein einfacher Querschnitt, der $\mathfrak{P}$ in zwei einfach zusammenhängende Polygone theilt.

Ist s eine mehrfach umlaufende Seite, so wird der gleiche Process für jedes Theilstück von s, das den Unendlichkeitspunkt enthält, einzeln vorgenommen.

Wir haben das Polygon jetzt bereits in ein anderes verwandelt, das lauter endliche Seiten besitzt und von Windungspunkten frei ist. Es kann nun noch Flächendurchgänge besitzen. Um sie zu tilgen, umgeben wir (Fig. 11) die Unendlichkeitspunkte in den bezüglichen Blättern mit je einem geschlossenen r-Eck ϱ und ziehen von irgend einem ihrer Punkte eine Gerade t durch das Innere des Polygons, bis sie — was jetzt nothwendig im Endlichen geschehen muss — den Polygonumfang trifft. Alsdann bildet das r-Eck mit t zusammen einen σ-förmigen Querschnitt, und damit ist jetzt das ursprüngliche Polygon in ein anderes übergeführt, das einfach zusammenhängend ist, von Windungspunkten und Flächendurchgängen frei ist, und lauter endliche Seiten enthält, d. h. in ein Elementarpolygon.

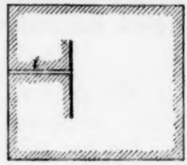


Fig. 11.

Für ein Elementarpolygon $\mathfrak{P}'$ gilt die Winkelrelation der Elementargeometrie, d. h. es ist, wenn n die Seitenzahl bedeutet, $\lambda_1\pi, \lambda_2\pi$ . . die Winkel sind und $S\pi$ ihre Summe ist,

$$S = \sum \lambda_i = n - 2.$$

Um dies nachzuweisen, genügt es, $\mathfrak{P}'$ durch einen Querschnitt, der auf seinen Seiten endigt, in zwei Theilpolygone $\mathfrak{P}_1'$ und $\mathfrak{P}_2'$ zu zerlegen, und zu zeigen, dass die Formel für $\mathfrak{P}'$ gilt, wenn sie für $\mathfrak{P}_1'$ und $\mathfrak{P}_2'$ richtig ist. Sind n_1, n_2, S_1, S_2 die bezüglichen Zahlen, so ist, da der Querschnitt auf den Seiten von $\mathfrak{P}'$ endigt,

$$n_1 + n_2 = n + 4,$$
$$S_1 + S_2 = S + 2.$$

Nun ist aber

$$S_1 = n_1 - 2, \quad S_2 = n_2 - 2,$$

also folgt schliesslich

$$S = n - 2.$$

Die Formel bleibt auch noch bestehen, wenn das Polygon Windungspunkte enthält. Wir denken uns einen Windungspunkt W wie oben durch einen Querschnitt q ausgeschnitten, und bezeichnen das durch q abgetrennte Polygon, welches W enthält, wieder als ein r-Eck ϱ. Wird W mit allen seinen Ecken verbunden, so zerfällt es in $r - 2$ gewöhnliche Dreiecke, also ist wieder

$$S_\varrho = r - 2$$

wo $S_\varrho\pi$ die Winkelsumme des r-Ecks bedeutet. Ist $\mathfrak{P}_1$ das Restpolygon, so ist auch für dieses

$$S_1 = n_1 - 2.$$

Nun hat ein jeder Querschnitt q bezüglich $r-1$ Ecken, also folgt

$$n_1 + \sum r = n + 2\sum(r-1),$$
$$S_1 + \sum S_\varrho = S + 2\sum(r-2),$$

wo sich die Summe über alle Windungspunkte erstreckt, und hieraus ergiebt sich schliesslich

$$S = n - 2; \text{ d. h.}$$

Für jedes n-Eck, das lauter endliche Seiten besitzt und keinen Flächendurchgang enthält, hat die Winkelsumme den Werth $(n-2)\pi$.

Hat das Polygon $\mathfrak{P}$ umlaufende Seiten, aber keine Flächendurchgänge, so verfahren wir folgendermassen: Bei einer Seite s, die ν-fach umlaufend ist, werde jeder Unendlichkeitspunkt, wie oben angegeben, durch einen rechtwinkligen Querschnitt q getilgt, dann verwandelt sich das n-Eck $\mathfrak{P}$ in ein Polygon $\mathfrak{P}_1'$ das

$$n_1 = n + 4\sum\nu$$

Ecken enthält. Für dieses Polygon gilt die eben abgeleitete Formel, d. h. es ist

$$S_1 = n_1 - 2.$$

Nun bestehen die Winkel von $\mathfrak{P}_1$ einerseits aus denjenigen von $\mathfrak{P}$, andrerseits aus denen, die an den Querschnitten liegen. Für jeden Querschnitt ist die bezügliche Winkelsumme gleich 2π, daher folgt

$$S_1 = S + 2\sum\nu$$

d. h. es ist

$$S = n - 2 + 2\sum\nu.$$

Jede einmal durch den Unendlichkeitspunkt ziehende Seite vermehrt daher die Winkelsumme um 2π.

Enthält schliesslich das Polygon $\mathfrak{P}$ auch Flächendurchgänge, so schneiden wir, wie oben, den Unendlichkeitspunkt in jedem Blatt durch ein einfaches r-Eck aus und ziehen die p Transversalen, welche die r-Ecke zu σ-förmigen Querschnitten ergänzen. Von diesen Transversalen nehmen wir der Einfachheit halber an, dass sie nicht in Eckpunkten endigen, alsdann enthält das so entstandene Polygon $\mathfrak{P}_1$ im Ganzen

$$n_1 = n + \sum_1^p r_i + 4p$$

Eckpunkte. Seine Winkel bestehen erstens aus den Winkeln von $\mathfrak{P}$, zweitens aus den Winkeln der r-Ecke, und drittens aus den Winkeln an den p Transversalen, d. h. es ist

$$S_1 = S + \sum_1^p (r_i - 2) + 2p.$$

Nun ist andrerseits

$$S_1 = n_1 - 2 + 2\sum v$$

und daraus folgt schliesslich

$$S = n - 2 + 2\sum v + 4p.$$

Jeder Flächendurchgang erhöht daher die Winkelsumme um 2π.

Führen wir endlich die Winkel $\lambda\pi$ selber ein, so erhalten wir für jedes Polygon $\mathfrak{P}$ mit lauter im Endlichen gelegenen Eckpunkten die Relation

$$\text{(I)} \qquad \sum \lambda = n - 2 + 2\sum v + 4p$$

resp. auch

$$\text{(I')} \qquad \sum \lambda' + 2\sum w = n - 2 + 2\sum v + 4p.$$

§ 3.

Reductionsprocesse und Erweiterungsprocesse.

Um die Gesammtheit der morphologisch verschiedenen Polygontypen zu beherrschen, bedürfen wir einer systematischen Eintheilung der Polygone. Hiermit wollen wir uns in den nächsten Paragraphen beschäftigen.

Für den Fall der Dreiecke ist die bezügliche Aufgabe von Herrn Klein bereits gelöst worden.*) Man kann die Gesammtheit aller Dreiecke dadurch erzeugen, dass man von gewissen einfachen Dreieckstypen ausgeht und an sie Halbebenen oder Vollebenen in bestimmter Weise anhängt; ebenso lässt sich umgekehrt jedes Dreieck durch Tilgung von Halbebenen oder Vollebenen auf ein einfaches Dreieck reduciren. Wir wollen die bezüglichen Processe *Erweiterungsprocesse*, resp. *Reductionsprocesse* nennen.

Es empfiehlt sich, diese Methode auf Polygone von beliebiger Seitenzahl zu übertragen. *Wir stellen uns also die Aufgabe, vom Polygon $\mathfrak{P}$ durch Ausschaltung von Flächenstücken und Wiederzusammenfügung der übrigbleibenden Stücke zu einem Polygon $\mathfrak{P}'$ herabzusteigen, das mit $\mathfrak{P}$ die Ecken gemein hat.*

Wir suchen zu diesem Zweck sofort allgemein die Frage zu beantworten, was für Reductionsprocesse dieser Art überhaupt morphologisch möglich sind. Zunächst suchen wir solche Processe, bei denen sich ausser den Eckpunkten auch die Winkelreste $\lambda'\pi$ nicht ändern. Dies bedeutet, dass in der Relation

*) a. a. O. S. 582.

$$\sum \lambda' + 2\sum w = n - 2 + 2\sum v + 4p$$

sowohl $\Sigma\lambda'$ als auch $n - 2$ constant bleibt, die gesuchten Reductionsprocesse müssen daher auch

$$2\sum w - 2\sum v - 4p$$

constant lassen. Hieraus folgt, dass nur zweierlei derartige Processe existiren können. Tilgt man einen Seitenumlauf — und zwar kann bei der Constanz der Ecken und Winkelreste nur ein voller Seitenumlauf in Frage kommen, — so muss auch ein Windungspunkt wegfallen, und lässt sich ein Flächendurchgang beseitigen, so verschwinden gleichzeitig zwei Windungspunkte.

Diese beiden Processe sind aber auch wirklich morphologisch ausführbar. Ein voller Seitenumlauf bildet nämlich in allen Fällen die vollständige Begrenzung einer Halbebene. Soll es möglich sein diese Halbebene aus dem Polygon auszuschalten, so darf sie einerseits in ihrem Innern kein Stück der Polygonbegrenzung enthalten, andrerseits muss sie sich, wie wir eben sahen, um eine Ecke W des Polygons, die nur in ihr liegen kann, herumwinden. Wir bezeichnen den bezüglichen Process als *Ausschaltung einer Halbebene;* seine Umkehrung, die *Einschaltung einer Halbebene* stimmt mit dem überein, was Herr Klein als *transversale Anhängung einer Halbebene* bezeichnet hat.

Soll sich ein Flächendurchgang tilgen lassen, so muss nothwendig eine volle Ebene wegfallen; denn in dem auszuschaltenden Flächenstück können Theile der Begrenzung des Polygons nicht enthalten sein. Andrerseits muss dieses Blatt zwei augenscheinlich verschiedene Ecken des Polygons enthalten, um die es sich herumwindet. Wir bezeichnen den bezüglichen Process als *Ausschaltung resp. Abtrennung einer Vollebene* und nennen seine Umkehrung *Einschaltung resp. Anhängung einer Vollebene.* Es folgt:

Reductionsprocesse, welche die Ecken und die Winkelreste eines Polygons unverändert lassen, giebt es nur zwei, nämlich die Ausschaltung einer Halbebene und die Ausschaltung einer Vollebene.

Wir haben hierzu noch einen dritten Reductionsprocess zu fügen. Es ist derjenige, dessen Umkehrung Herr Klein als *laterale Anhängung einer Halbebene* bezeichnet hat. Die Anhängung einer Halbebene lässt die Ecken des Polygons gleichfalls ungeändert, vermehrt aber zwei an derselben Seite liegende Winkel um je π, und ändert damit für jeden der beiden Eckpunkte die Richtung der Seite; war die Seite endlich, so wird sie durch Anhängung der Halbebene einfach umlaufend und umgekehrt. Den reciproken Process bezeichnen wir als *Abtrennung einer Halbebene.* Es ist klar, dass es andere Reductionsprocesse, welche zwar die Ecken des Polygons unverändert lassen, aber die Seiten-

richtungen umkehren, nicht geben kann. Denn ein im Endlichen begrenzter Flächentheil kann für die Ausschaltung nicht in Frage kommen, eine Vollebene enthält überhaupt keine Seite, jedes derartige tilgbare Flächenstück muss daher eine Halbebene sein, deren Inneres dem Polygon angehört. Beachtet man endlich, dass eine solche Halbebene nur die Richtung einer einzigen Seite modificiren kann, so ist damit die Behauptung erwiesen.

Werden in einem Polygon $\mathfrak{P}$ alle zulässigen Reductionsprocesse ausgeführt, so entsteht ein Polygon $\mathfrak{P}'$, das *reducirtes Polygon* heissen soll. Jedes Polygon, das nicht selbst reducirt ist, kann aus einem reducirten Polygon durch Erweiterungsprocesse abgeleitet werden; wir erhalten daher die Gesammtheit der Polygone, wenn wir in den reducirten Polygonen alle zulässigen Erweiterungsprocesse vornehmen.

Wir sind damit vor die Frage geführt, unter welchen Bedingungen die Erweiterungsprocesse morphologisch möglich sind. Es handele sich zunächst um die Einschaltung einer Halbebene. Wir gehen am zweckmässigsten von der Halbebene aus und prüfen, welcher Art die Polygone sind, denen die Halbebene angehören kann. Es sei W der in ihr liegende Eckpunkt und s die sie begrenzende Gerade. Denken wir uns die Halbebene längs einer von W nach s gehenden Transversalen t zerschnitten, so müssen sich die Flächenstücke, die mit der Halbebene zusammen ein Polygon constituiren sollen, oberhalb und unterhalb der Halbebene von t aus nach entgegengesetzten Seiten fortsetzen; überdies müssen die Seiten des oberen und unteren Blattes, die vom Endpunkt von t ausgehen, die Richtung von s haben. Der besondere Fall, dass ein Flächenstück nur nach einer Seite angesetzt wird, resp. dass nur von einem der beiden Endpunkte von t eine Seite ausgeht, die die Richtung von s hat, soll hierin eingeschlossen sein. Jedes so gebildete Polygon ist ein solches, wie wir es verlangen. Nun ändert sich nichts, wenn wir die Transversale t durch einen beliebigen in der Halbebene nach s verlaufenden einfachen Linienzug l ersetzen; welches auch seine Gestalt ist, so wird man, wenn er sich nur nicht selber schneidet, die bezüglichen Flächenstücke nach beiden Seiten anheften können und dadurch ein einfach zusammenhängendes Polygon erhalten. Schneidet sich dagegen der Linienzug l, so kann er überhaupt nicht als in *einer* Ebene liegend betrachtet werden. Lassen wir jetzt die Halbebene aus dem Spiel, so folgt:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Ecke W und die Seite s eines Polygons zur Einschaltung einer Halbebene verwendbar sind, besteht darin, dass W auf der inneren Seite von s liegt, und dass sich ein Linienzug l von W nach s so durch das Polygoninnere resp. längs des Polygonumfangs ziehen lässt, dass

er ganz in einer Ebene enthalten ist, sich nicht selbst schneidet und nicht jenseits der Seite s oder ihrer Verlängerung verläuft.

Um die Bedingung zu finden, unter der die Einschaltung einer Vollebene morphologisch möglich ist, gehen wir ebenfalls von der Vollebene aus. Zwei ihrer Punkte W und W_1 müssen Eckpunkte eines jeden Polygons sein, dem die Ebene angehören soll. Schneiden wir nun wieder die Ebene längs der von W nach W_1 gehenden Geraden t auf, so müssen sich die beiden Flächenstücke, die mit der Ebene zusammen das Polygon constituiren sollen, oberhalb und unterhalb der Ebene von t aus nach entgegengesetzten Richtungen fortsetzen. Der oben behandelte Grenzfall, nämlich die Ansetzung nur eines Flächenstückes, ist auch hier eingeschlossen. Ferner leuchtet wieder ein, dass t durch einen Linienzug l von beliebiger Gestalt ersetzt werden kann, wenn er nur in W und W_1 endigt und sich nicht selbst schneidet. Daher folgt:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass zwei Ecken W und W_1 eines Polygons für die Einschaltung einer Vollebene verwendbar sind, besteht darin, dass sich im Innern oder auf dem Umfang des Polygons ein von W und W_1 verlaufender Linienzug l legen lässt, der ganz in einer Ebene bleibt und sich nicht selber schneidet. In dem Fall, dass der Linienzug l ganz auf dem Umfang des Polygons verläuft, ist es natürlicher, den Erweiterungsprocess, als *Anhängung einer Vollebene* zu bezeichnen.

Ein Beispiel zeigt die Figur 12, die nebenstehende Figur 12a stellt ein Polygon dar, das dieselben Winkel besitzt, wie das Polygon

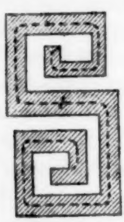


Fig. 12.

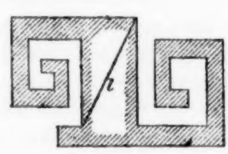


Fig. 12a.

von Fig. 12, aber so gezeichnet ist, dass l geradlinig angenommen werden kann.

Endlich folgt, wie sofort ersichtlich ist, dass *die Anhängung einer Halbebene nur in dem einen Fall nicht zulässig ist, wenn die bezügliche Seite sich selbst überschlägt*, d. h. mehr als einen vollen Umlauf darstellt. Dagegen ist es gleichgiltig, ob sie endlich ist, oder ob sie durch das Unendliche zieht. Hieraus ergiebt sich, dass *dieselbe Polygonseite entweder nur für die Anhängung oder nur für die Einschaltung*

einer Halbebene verwendbar ist. Dass es unmöglich ist, zuerst eine Einschaltung und dann eine Anhängung vorzunehmen, ist nach dem Vorstehenden unmittelbar klar; das umgekehrte ist deshalb ausgeschlossen, weil nach Anhängung einer Halbebene an die Seite s eine Polygonecke W, die auf der inneren Seite von s läge, nicht existirt; denn auf der inneren Seite von s liegt ja nur die Halbebene selbst.

Wir beweisen endlich noch, *dass sich zwei Linienzüge l und l_1, längs deren Halbebenen oder Vollebenen in dasselbe Polygon eingeschaltet werden sollen, nicht schneiden können.* Wird nämlich längs l eine Halbebene oder Vollebene eingeschaltet, so liegen jetzt die beiden Hälften von l_1 nicht mehr in demselben Blatt, und es ist auch nicht möglich beide Endpunkte von l_1 durch eine andere Linie zu verbinden, die ganz in demselben Blatt verläuft. Jede derartige Linie läuft nämlich ganz um den Punkt W herum, von welchem l ausgeht, und schneidet sich daher nothwendig selbst.

§ 4.

Reducirte Polygone.

Wie das vorstehende zeigt, kommt den reducirten Polygonen eine hervorragende Stellung innerhalb der Gesammtheit der Polygone zu. Wir werden uns daher mit ihnen ausführlicher zu beschäftigen haben und beweisen zunächst folgenden für die weiteren Entwicklungen wichtigen Satz:

Jedes reducirte Polygon lässt sich aus reducirten Dreiecken zusammensetzen.

Ist $\mathfrak{P}$ ein reducirtes Polygon, das weder umlaufende Seiten noch Flächendurchgänge enthält, so versteht sich die Richtigkeit des Satzes von selbst. Denn da der Unendlichkeitspunkt weder auf dem Umfang noch im Innern des Polygons liegt, so trifft jede Gerade, die von einem beliebigen Punkt des Umfangs in das Innere eintritt, den Umfang schon nach endlichem Verlauf zum zweiten Mal. Sie zerlegt das Polygon stets in zwei Theile, die selbst reducirt sind; denn auch diese Polygone bleiben mit den Seiten und mit der Fläche ganz im Endlichen, u. s. w.

Wenn dagegen $\mathfrak{P}$ umlaufende Seiten oder Flächendurchgänge enthält, so kann man nicht mehr behaupten, dass eine Gerade, die von einem beliebigen Punkt des Umfangs in das Innere eintritt, den Umfang zum zweiten Mal im Endlichen trifft; und selbst wenn dies der Fall ist, so folgt doch nicht, dass die beiden Polygone, in die $\mathfrak{P}$ zerlegt wird, selbst reducirt sind. Man betrachte z. B. das Achteck

$ABCDEFGH$, (Fig. 13) dessen Fläche einmal durch den Unendlichkeitspunkt zieht. Dieses Achteck ist reducirt. Von den Reductionsprocessen könnte überhaupt nur die Abtrennung einer Halbebene in Frage kommen, aber auch diese ist ausgeschlossen. Schneidet man nun durch die Gerade AC das Dreieck ABC ab, so bleibt ein Siebeneck $ACDEFGH$ übrig, das reducirbar ist; von ihm kann längs AC eine Halbebene abgetrennt werden.

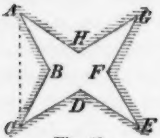


Fig. 13.

Das Beispiel zeigt, dass der Begriff des reducirten Polygons ein Hilfsbegriff ist, der für die eigentliche Gestaltung der reducirbaren und reducirten Polygone wenig Bedeutung hat. Lässt man nämlich den Punkt B in der obigen Figur wandern, so sind die Polygone, die entstehen, wenn B über die Gerade AC hinübertritt, reducirbare Polygone, ohne dass sich doch der Charakter des Polygons bei der Bewegung von B wesentlich ändert. Trotzdem ist die Einführung dieses Hilfsbegriffs durchaus zweckmässig und innerlich berechtigt. Einerseits zeigt dies ja der obige Satz, andrerseits werden wir sehen, dass wir gerade mit Benutzung der reducirten Polygone eine einfache Methode auffinden können, um alle n-Ecke systematisch abzuleiten.

Es sei nun $\mathfrak{P}$ ein Polygon, in dem eine Seite s einfach oder mehrfach umlaufend ist. Es sei A ein Endpunkt von s, ferner sei s' das von A ausgehende, ins Unendliche ziehende Stück von s, endlich sei s'' dasjenige Stück, das sich vom Unendlichkeitspunkt an weiter fortsetzt. Nun enthält die durch s begrenzte Halbebene sicher ein Stück des Polygonumfanges, denn enthielte sie nur einen Punkt, so wäre sie ausschaltbar, und enthielte sie auch den Punkt nicht, so könnte sie abgetrennt werden, und das Polygon wäre nicht reducirt. Man kann nun jedenfalls (Fig. 14) von A aus eine Gerade h ziehen, die mit s' einen so kleinen Winkel bildet, dass sie ganz innerhalb der Polygonfläche liegt.

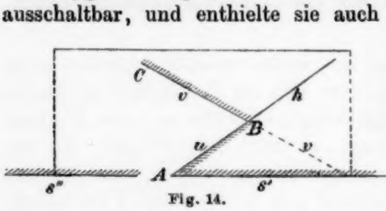


Fig. 14.

Diesen Winkel lassen wir nun wachsen, bis die Gerade zum ersten Mal die in der Halbebene liegende Begrenzung des Polygons in B erreicht, so geht von B sicher mindestens eine in der betrachteten Halbebene liegende Polygonseite aus. Wir nehmen zunächst an, dass in dieser Halbebene noch eine zweite von B ausgehende Polygonseite existirt, dann ist AB entweder selbst diese Seite des Polygons, oder AB liegt im Innern. Im letzten Fall benutzen wir AB als Theilungslinie, es bedarf daher nur der Fall der weiteren Erörterung, dass AB eine Polygonseite u ist.

Von den beiden Theilpolygonen ist nämlich nur dasjenige weiter zu betrachten, das die Seite s enthält. Es sei BC die zweite von B ausgehende Seite v, die mit AB in einer Ebene liegt, so bildet sie mit AB sicher einen Winkel*), der grösser als π ist. Trifft nun v über B hinaus verlängert, die Seite s' in einem im Endlichen gelegenen Punkt, so ist die Verlängerung v' eine Gerade, die das Polygon $\mathfrak{P}$ in zwei reducirte Theilpolygone $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ zerlegt. Da die in $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ neu auftretende Gerade v' endlich ist, und die an ihr liegenden Winkel kleiner als π sind, so ist nur zu beweisen, dass $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ in Bezug auf s nicht mehr reducirbar sind. Für dasjenige Polygon, das nur einen endlichen Theil von s' enthält, es sei $\mathfrak{P}_1$, versteht sich dies von selbst; für das andere, d. h. für $\mathfrak{P}_2$, ergiebt es sich folgendermassen. Nach Annahme ist $\mathfrak{P}$ reducirt, d. h. es giebt keinen von s nach einer Ecke von $\mathfrak{P}$ laufenden Linienzug, längs dessen eine Halbebene, die einen Umlauf von s enthält, ausschaltbar wäre. Daraus folgt das gleiche aber erst recht für $\mathfrak{P}_2$; denn um $\mathfrak{P}_2$ zu erhalten, haben wir von denjenigen Blättern von $\mathfrak{P}$, in denen der fragliche Linienzug verlaufen müsste, noch ein Stück abschneiden müssen. Das gleiche gilt für die Polygone, die durch die Theilungslinie AB entstehen.

Wenn s' und die Verlängerung v' divergiren, so schliessen wir zunächst, dass v endlich sein muss. Denn v liegt mit der aus dem Unendlichen kommenden Seite s in derselben Ebene, was man am einfachsten erkennt, wenn man den Unendlichkeitspunkt wie in § 1, durch einen rechtwinkligen Linienzug ausschneidet. Liegt nun am Endpunkt C von v ein Winkel, der kleiner als π ist, so ist auch die von ihm ausgehende Seite CD endlich, und man kann B mit D durch die im Innern des Polygons enthaltene Gerade BD verbinden. Ist dagegen der Polygonwinkel C grösser als π, so trifft die Verlängerung v'' von v sicher noch eine in demselben Blatt liegende Seite, spätestens jedoch s''. Es ist daher BD, resp. v'' eine Gerade, die $\mathfrak{P}$ in zwei Polygone $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ zerlegt, die selbst reducirt sind; das letztere wird genau so bewiesen, wie es oben geschehen ist.

Es bliebe endlich noch der Fall zu erledigen, dass v parallel zu s ist. Von diesem wollen wir vorläufig absehen; wir werden die bezüglichen Erörterungen in § 6 bringen.

Wir haben nun noch den Fall zu betrachten, dass eine zweite von B ausgehende Seite, die mit s in einer Ebene liegt, nicht existirt. Alsdann ist B ein Windungspunkt. Ist nun AB keine Polygonseite, so zerfällt $\mathfrak{P}$ durch AB in $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{P}''$, und zwar sei $\mathfrak{P}''$ dasjenige Polygon, das s enthält. Liegt alsdann BC in $\mathfrak{P}''$, so bleibt das vor-

*) Tritt der Grenzfall ein, dass der Winkel B gleich π ist, so sei B' der erste Punkt, für den der Winkel nicht mehr den Werth π hat, alsdann tritt nur AB' an die Stelle von AB.

stehende für $\mathfrak{P}''$ in Kraft, liegt aber BC in $\mathfrak{P}'$, so sind $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{P}''$ reducirt, und wir können uns wieder auf den Fall beschränken, dass AB Polygonseite ist. Nun ist zweierlei zu unterscheiden; die Seite s kann nämlich entweder kürzer sein als ein voller Umlauf, oder sie überschlägt sich selbst. Ist sie zunächst kürzer als ein voller Umlauf, so sei (Fig. 15) A_1 ihr zweiter Endpunkt; dieser Fall soll in der Grenze auch den umfassen, dass s einen vollen Umlauf darstellt, also A und A_1 in einander fallen. Die Gerade BA_1 liegt in der Nähe von B sicher innerhalb des Polygons, sie verläuft daher entweder ganz innerhalb, oder wenn dies nicht der Fall ist, so muss sie doch zwischen B und A_1 den Polygonumfang treffen. Es sei $\mathfrak{s}$ die von ihr getroffene Seite; diese Seite liegt mit s in einer Ebene und ist daher sicher endlich. Man kann daher BA_1 stets durch eine andere von B ausgehende Gerade ersetzen, welche entweder durch eine Ecke von $\mathfrak{s}$ oder doch durch eine andere in der Ebene gelegene Ecke von $\mathfrak{P}$ geht. Wir haben damit $\mathfrak{P}$ wieder in zwei Polygone getheilt, die, was genau wie oben bewiesen werden kann, selbst reducirt sind; die Theilungslinie verbindet in beiden Fällen zwei Ecken von $\mathfrak{P}$.

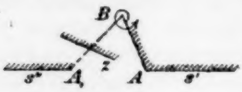


Fig. 15.

Es ist endlich noch zu erörtern, wie wir das Polygon $\mathfrak{P}$ theilen können, wenn B ein Windungspunkt ist und s sich selbst überschlägt. Da das Polygon nicht reducirbar sein soll, so muss (Fig. 16) in demjenigen Stück, das s'' enthält, ein Theil t der Polygongrenze so verlaufen, dass er an irgend einer Stelle über AB hinübertritt. Alsdann verbinde man B mit irgend einem erreichbaren Eckpunkt dieses Linienzuges und man hat wieder eine Theilungslinie, die $\mathfrak{P}$ in zwei reducirte Polygone theilt.

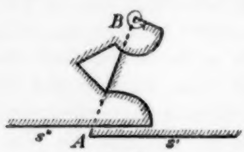


Fig. 16.

Es ist aber noch der Nachweis zu führen, dass unserer Theilung die Bedeutung einer wirklichen Reduction zukommt, d. h. es ist zu zeigen, *dass* $\mathfrak{P}_1$ *und* $\mathfrak{P}_2$ *Polygone von geringerer Seitenzahl sind, als* $\mathfrak{P}$ *selbst.* Nun sind die Theilungslinien in allen Fällen entweder Verbindungslinien von zwei Eckpunkten, oder Verlängerungen von Seiten, die in das Innere eintreten, und auf einer Seite endigen. Daher folgt, wenn $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ resp. n_1 und n_2 Ecken besitzt,

$$n_1 + n_2 = n + 2.$$

Nun muss aber n_1, resp. n_2 mindestens den Werth 3 haben, folglich ist zugleich

$$n_1 < n \quad \text{und} \quad n_2 < n,$$

womit die Behauptung erwiesen ist.

Endlich sei noch auf eine letzte Folgerung hingewiesen. Es sei wieder $\mathfrak{P}$ ein Polygon, das eine von dem Punkt A ausgehende umlaufende Seite s enthält. Wenn die Theilungslinie, die es zerschneidet, auf s endigt, so enthält dasjenige Polygon $\mathfrak{P}_1$, dem der Punkt A angehört, entweder ein endliches Stück von s, oder ein Stück, das einfach umlaufend ist, sich aber nicht selbst überschlägt; und zwar ist dies Polygon stets in einer einzigen Halbebene enthalten, nämlich in derjenigen, die durch s begrenzt wird. Durch fortgesetzte Reduction bezüglich der Seite s geht daher $\mathfrak{P}$ schliesslich in ein anderes Polygon über, das *von s entweder nichts oder nur einen endlichen Theil enthält*, überdies besitzt keines der abgeschnittenen Polygone, in dem ein Theil von s vorkommt, einen Flächendurchgang.

Hieraus folgt, dass wir uns bei der Zerlegung der mit Flächendurchgängen behafteten Polygone auf Polygone mit lauter endlichen Seiten beschränken können. Hier verfahren wir folgendermassen. Wir nehmen zunächst an, das Polygon $\mathfrak{P}$ enthalte einen Windungspunkt W. Wir verlängern einen seiner Schenkel u über W hinaus, so muss die Verlängerung u' vor der Rückkehr nach W die Polygonbegrenzung nothwendig noch einmal treffen; denn sonst würde die so begrenzte Halbebene abtrennbar sein und das Polygon wäre nicht reducirt. Es sei (Fig. 17) V der Punkt, in dem die Polygonbegrenzung von u' getroffen wird, so kann WV sowohl endlich als auch einfach umlaufend sein. In jedem Fall theilt aber u' das Polygon $\mathfrak{P}$ in zwei Polygone $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$, die selbst reducirt sind. Die Reducirbarkeit ist wieder nur für die neu eingeführten Begrenzungsstücke zu prüfen. Diese sind u' und die Theile derjenigen übrigens endlichen Seite, auf der V liegt. Für diese kommt die Reducirbarkeit nicht in Frage, für u' ist sie deshalb ausgeschlossen, weil jedes Theilpolygon im Punkt V einen Winkel hat, der kleiner als π ist.

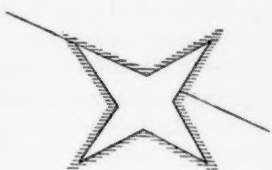


Fig. 17.

Enthält das Polygon keinen Windungspunkt, so muss in ihm sicher mindestens ein Winkel vorkommen, der grösser als π ist. Aus der Formel I' des § 2 folgt nämlich, da hier $\Sigma w = 0$, $\Sigma v = 0$ und $p \geqq 1$ vorausgesetzt wird, dass

$$\sum \lambda' \geqq n + 2$$

ist; daher muss mindestens ein Winkel grösser als π sein. Mit diesem Winkel können wir nun ebenso verfahren, wie mit dem Windungspunkt; wir verlängern einen seiner Schenkel über den Eckpunkt in das Innere der Polygonfläche, und können dann genau wie oben weiterschliessen. Wir bemerken noch, dass hier, wie vorher,

$\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ den in $\mathfrak{P}$ vorhandenen Flächendurchgang nicht mehr besitzen.

Sind wieder $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ Polygone von n_1 resp. n_2 Ecken, so folgt, dass auch hier

$$n_1 + n_2 \leqq n + 2$$

also

$$n_1 < n \quad \text{und} \quad n_2 < n$$

ist, und zwar gilt das Zeichen $<$, wenn V ein Eckpunkt ist, alsdann ist $n_1 + n_2 = n + 1$. Unsere Zerlegung ist daher wieder eine wirkliche Reduction; setzen wir sie weiter und weiter fort, so muss das Polygon $\mathfrak{P}$, wie behauptet wurde, in lauter reducirte Dreiecke zerfallen.

Es fragt sich noch, wie gross die Zahl dieser Dreiecke ist; man findet, dass ihre Zahl, wie bei der Zerlegung elementarer Polygone, $n - 2$ ist. Wir bezeichnen die Anzahl durch $\mathfrak{N}$ und nehmen an, der Satz sei für $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ richtig, d. h. es sei

$$\mathfrak{N}_1 = n_1 - 2 \quad \text{und} \quad \mathfrak{N}_2 = n_2 - 2$$

so folgt

$$\begin{aligned} \mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2 &= n_1 + n_2 - 4 \\ &\leqq n - 2. \end{aligned}$$

Gilt das Ungleichheitszeichen, so können wir doch eines der $n - 3$ reducirten Dreiecke selbst in zwei reducirte Dreiecke zerlegen, demnach folgt als schliessliches Hauptresultat der Satz:

Jedes reducirte n-Eck, dessen Ecken im Endlichen liegen, kann in $n - 2$ reducirte Dreiecke zerlegt werden.

§ 5.

Eintheilung der reducirten Polygone.

Gemäss dem vorstehenden Paragraphen können wir die reducirten n-Ecke aufstellen, sobald wir alle reducirten Dreiecke kennen. Die reducirten Dreiecke sind bereits von Herrn Klein abgeleitet worden;*) man gelangt zu ihnen auch durch folgende einfache morphologische Betrachtungen. Zunächst ist leicht zu sehen, dass es ein reducirtes Dreieck mit einer sich selbst überschlagenden Seite nicht geben kann. Denn ist diese Seite AB, so liegt, wie aus den Entwickelungen des vorigen Paragraphen hervorgeht, sicher ein Windungspunkt C in je einem Blatt mit A und B; das so bestimmte Dreieck ist aber durch Ausschaltung einer Halbebene reducirbar. Ist die Seite AB einfach umlaufend, ohne sich zu überschlagen, so folgt ebenfalls aus dem vorigen Paragraphen, dass jedes reducirte Dreieck, welches AB enthält, durch Verbindung von A und B mit einem auf der *inneren* Seite

*) Dies wurde in Vorlesungen aus dem Semester 1890/91 dargelegt.

von AB gelegenen Punkt C entsteht (Fig. 18). Daraus folgt zunächst, dass ein reducirtes Dreieck mit Flächendurchgängen nur mit endlichen Seiten existiren kann. Ein solches Dreieck ist aber reducirbar; denn da die Seiten endlich sind, so liegen A, B, C in demselben Blatt, jedes derartige Dreieck muss daher aus dem elementaren Dreieck ABC oder aus dem einen

Fig. 18.

Flächendurchgang besitzenden Dreieck ABC durch Erweiterungsprocesse ableitbar sein. Das letztgenannte Dreieck kann aber selbst durch Abtrennung einer Halbebene reducirt werden, womit die Behauptung erwiesen ist.

Wir erhalten daher zwei verschiedene Typen reducirter Dreiecke; der eine besitzt lauter endliche Seiten, der andere hat eine einfach umlaufende Seite. Für den ersten ist die Winkelsumme gleich π, für den anderen ist sie 3π.

Alle reducirten Polygone entstehen durch Zusammensetzung dieser beiden Dreieckstypen. Ein reducirtes n-Eck enthält daher im Maximum $n - 2$ einfach umlaufende Seiten, andrerseits können sich auch Flächendurchgänge einstellen. Dies legt den Gedanken nahe, die reducirten n-Ecke nach der Zahl, der Art und der Anordnung der ihnen zugehörigen Seitenumläufe und Flächendurchgänge einzutheilen. Hierin haben wir diejenigen Besonderheiten zu erblicken, welche sie von den Polygonen der Elementargeometrie unterscheiden. Dagegen betrachten wir das Auftreten von Windungspunkten nicht als wesentlichen Eintheilungsgrund. Allerdings sind die Windungspunkte massgebend dafür, zwischen welchen Ecken und Seiten des Polygons Einschaltungsprocesse ausführbar sind, aber diese Eigenschaft theilen sie mit den Winkelzahlen und auch mit den Seiten selbst; kann von der Ecke A nach der Seite s ein Linienzug l gezogen werden, längs dessen Halbebenen einschaltbar sind, so kann dieser Process beim Variiren der Winkel und Seiten morphologisch unmöglich werden, auch ohne dass Windungspunkte auftreten. Endlich zeigt auch die Relation des § 2, dass die Seitenumläufe und Flächendurchgänge die eigentlichen Singularitäten der allgemeinen Polygone sind.

Wir rechnen demnach alle diejenigen reducirten n-Ecke in eine Gattung, welche dieselbe Zahl der Flächendurchgänge, sowie dieselbe Zahl und Reihenfolge der Seitenumläufe aufweisen. Innerhalb jeder Gattung können wir diejenigen, welche die gleichen Winkel in derselben Reihenfolge enthalten, zu einer *Art* zusammenfassen; jede Art besteht schliesslich aus den einzelnen *Individuen*, die durch Parallelverschiebung der Seiten aus einander hervorgehen. Zu bemerken ist, dass innerhalb derselben Gattung die Winkel keineswegs beliebig variabel sind; es bestehen für sie stets gewisse Ungleichheitsbedingungen,

die aus der Art der Zusammensetzung des n-Ecks fliessen. Im besonderen ergiebt sich für die Dreiecke:

Es giebt zwei verschiedene Gattungen reducirter Dreiecke; die eine besitzt lauter endliche Seiten, die andere hat eine einfach umlaufende Seite.

Für die erste Gattung beträgt die Winkelsumme π; jede der drei Winkelzahlen λ_1, λ_2, λ_3 ist im übrigen beliebig. Es ist also

$$0 < \lambda_1 < 1,\quad 0 < \lambda_2 < 1,\quad 0 < \lambda_3 < 1^{*}),\quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1.$$

Für die zweite Gattung beträgt die Winkelsumme 3π; ein und nur ein Winkel ist grösser als π, nämlich derjenige, dessen Schenkel die beiden endlichen Seiten sind; d. h.

$$0 < \lambda_1 < 1,\quad 1 < \lambda_2 < 2,\quad 0 < \lambda_3 < 1^{*}),\quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 3.$$

Die Vierecke entstehen durch Zusammensetzung zweier Dreiecke. Die Zusammensetzung kann gemäss § 4 auf zwei Weisen erfolgen; entweder coincidiren zwei Seiten mit beiden Eckpunkten, oder es coincidirt nur ein Paar Eckpunkte, dafür fallen aber die von ihnen ausgehenden Seiten in dieselbe Gerade. Die Summe der an ihnen liegenden Winkel ist daher π. Uebrigens ist zu bemerken, dass diese Zusammensetzung nur in Frage kommt, wenn mindestens eines der beiden Dreiecke eine umlaufende Seite besitzt. Dasselbe gilt für die Ableitung beliebiger Polygone.

Zwei Dreiecke erster Gattung liefern die Vierecke erster Gattung mit lauter endlichen Seiten und der Winkelsumme 2π; in der That ist es gleichgiltig, ob die Dreiecke auf die eine oder die andere Art aneinandergesetzt werden. Für sie ist

$$0 < \lambda_1 < 2,\quad 0 < \lambda_3 < 2,\quad 0 < \lambda_3 < 2,\quad 0 < \lambda_4 < 2,$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 2.$$

Ein Dreieck erster Gattung und eines zweiter Gattung liefern ein Viereck zweiter Gattung mit einer umlaufenden Seite. Coincidiren bei der Zusammensetzung zwei Ecken, so gelten für die Winkel die Relationen

$$0 < \lambda_1 < 1,\quad 1 < \lambda_2 < 3,\quad 0 < \lambda_3 < 1,\quad 0 < \lambda_4 < 2,$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 4.$$

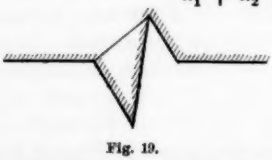


Fig. 19.

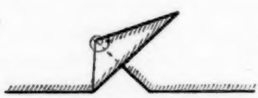


Fig. 19a.

Wir geben hier zwei verschiedene Arten solcher Vierecke, das eine enthält einen Windungspunkt, das andere nicht. (Fig. 19 u. 19a).

*) Ueber die Grenzfälle, dass λ den Werth 0, 1, 2 hat, vgl. oben S. 381. Wir wollen festsetzen, ein Dreieck zweiter Gattung für $\lambda_2 = 2$ noch als reducirt zu betrachten.

Diejenige Zusammensetzung beider Dreiecke, bei der nur ein Paar Ecken coincidiren, ist noch auf zwei Weisen möglich; das Dreieck erster Gattung kann sowohl an eine endliche, als auch an die umlaufende Seite des Dreiecks zweiter Gattung angesetzt werden. Aber nur im ersten Fall gelangen wir zu Vierecken zweiter Gattung, die unter den vorstehenden noch nicht enthalten sind. Die bezüglichen Winkelrelationen sind

$$0 < \lambda_1 < 1, \quad 1 < \lambda_2 < 2, \quad 1 < \lambda_3 < 2, \quad 0 < \lambda_4 < 1,$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 4.$$

Zwei solcher Vierecke zeigen Fig. 20 und 20a, das eine hat eine sich selbst überschlagende Seite.

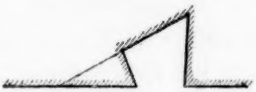


Fig. 20.

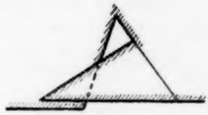


Fig. 20a.

Zwei Dreiecke zweiter Gattung können zunächst so zusammengesetzt werden, dass zwei endliche Seiten und überdies die von ihnen eingeschlossenen Eckpunkte coincidiren. Dadurch entsteht eine Vierecksgattung, die durch zwei benachbarte umlaufende Seiten charakterisirt ist. Ist $\lambda_2\pi$ der von den beiden endlichen Seiten eingeschlossene Winkel, so ist

$$0 < \lambda_1 < 1, \quad 2 < \lambda_2 < 4, \quad 0 < \lambda_3 < 1, \quad 0 < \lambda_4 < 2,$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 6.$$

Der Winkel $\lambda_2\pi$ bedingt daher nothwendig einen Windungspunkt (Fig. 21)*).

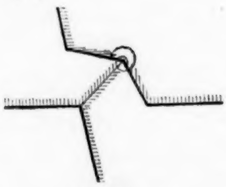


Fig. 21.

Fig. 22.

Setzt man zwei Dreiecke zweiter Gattung so zusammen, dass zwar zwei endliche Seiten, aber nicht die von ihnen eingeschlossenen Winkel coincidiren, so entsteht ein Viereck, in dem die umlaufenden Seiten einander gegenüberliegen (Fig. 22)*). Die Bedingungen für die Winkelzahlen sind diesmal

*) In diesen beiden Figuren sind die beiden Dreiecke, die das Viereck ausmachen, durch verschiedene Schraffirung kenntlich gemacht.

$$0 < \lambda_1 < 1, \quad 1 < \lambda_2 < 3, \quad 0 < \lambda_3 < 1, \quad 1 < \lambda_4 < 3^{*}),$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 6.$$

Setzt man zwei Dreiecke zweiter Gattung so zusammen, dass die umlaufenden Seiten coincidiren, so entsteht ein Viereck, das einen Flächendurchgang besitzt, aber nicht mehr reducirt ist; es geht durch Abtrennung einer Halbebene in ein Viereck erster Gattung über.

Endlich ist noch zu erörtern, ob eine Zusammensetzung möglich ist, bei der nur ein Paar Ecken coincidirt. Da beide in diesen Ecken liegende Winkel kleiner als π sein müssen, so kann hierfür nur die umlaufende Seite in Frage kommen; aber auch in diesem Fall entsteht ein Viereck mit einem Flächendurchgang, das reducirbar ist. Es folgt:

Es giebt vier Gattungen reducirter Vierecke. Die erste enthält keine, die zweite eine umlaufende Seite, die dritte und vierte enthalten je zwei; bei den Vierecken dritter Gattung sind sie benachbarte, bei denen der vierten Gattung gegenüberliegende Seiten.

In ähnlicher Weise schliesst man, dass es sieben Gattungen reducirter Fünfecke giebt. Ein Flächendurchgang tritt in ihnen noch nicht auf, aber eine Gattung ist bereits durch eine zweifach umlaufende Seite ausgezeichnet.

Reducirte Polygone mit einem Flächendurchgang treten zuerst für $n = 6$ auf; der Umfang des Polygons muss nämlich so gestaltet sein, dass an keiner Seite zwei Winkel grösser als π auftreten (Fig. 23). Hieraus folgt, dass ein reducirtes Polygon mit p Flächendurchgängen mindestens $4p + 2$ Ecken besitzt. Aus der Winkelrelation folgt zunächst, dass p seinen grössten Werth für $\Sigma\nu = 0$ erreicht, d. h. wenn alle Seiten endlich sind. Nun ist ein reducirtes Polygon mit p Flächendurchgängen aus p reducirten Polygonen mit je einem Flächendurchgang zu bilden; geht aber die Zusammensetzung der Polygone so vor sich, dass von zwei coincidirenden Eckpunkten Seiten entgegengesetzter Richtung ausgehen, so ist das resultirende Polygon nicht mehr reducirt. Also folgt:

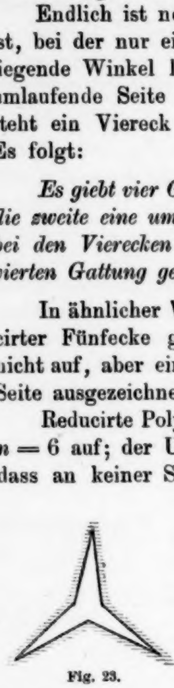


Fig. 23.

*) Bezüglich der Grenzfälle ist Folgendes zu bemerken. Die Zulässigkeit von ganzzahligen Werthen λ innerhalb der bezüglichen Grenzen versteht sich von selbst. Wirkliche Grenzwerthe von λ können nur erreicht werden von λ_2, resp. λ_3 im zweiten Fall der Vierecke zweiter Gattung und von λ_2 bei den Vierecken dritter Gattung. Es hat keine Mühe, sich die bezüglichen Vierecktypen wirklich herzustellen. Das letztgenannte Viereck hat drei übereinander fallende Punkte; es ist eine doppelt gelegte Halbebene.

Die Maximalzahl der in einem reducirten n-Eck auftretenden Flächendurchgänge ist $E\left(\frac{n-2}{4}\right)$.

Wir fügen zu diesem Satz noch ein weiteres Theorem dieser Art. Wir stellen dazu die Frage, wie viel von den $n-2$ Dreiecken durch einen Flächendurchgang absorbirt werden, und welcher Art diese Dreiecke sind. Die Zahl ergiebt sich, da wir zu jedem Flächendurchgang ein Sechseck nöthig haben, gleich vier. Nun entsteht ein Flächendurchgang bei lauter endlichen Seiten stets durch Zusammensetzung zweier Polygone mit je einer einfach umlaufenden Seite; von den vier Dreiecken haben daher zwei eine umlaufende Seite, zwei andere nicht. Es folgt:

Hat ein reducirtes n-Eck p Flächendurchgänge, so hat es höchstens noch $n-4p-2$ *umlaufende Seiten und seine Winkelsumme beträgt höchstens* $\{3(n-2)-4p\}\,\pi$.

Das Maximum der Winkelsumme wird also nur dann erreicht, wenn $p=0$, also $\Sigma v = n-2$ ist; es hat den Werth $3(n-2)$. Es ist zu beachten, dass die Maximalzahl der möglichen Seitenumläufe für jedes p auch wirklich erreicht werden kann.

Hiermit sind wir in den Stand gesetzt, für jedes n die Zahl und die Natur der möglichen Gattungen von n-Ecken anzugeben. Sie unterscheiden sich nach den Werthen von p und nach der Zahl und Anordnung der umlaufenden Seiten. Die p Flächendurchgänge absorbiren, wie wir sahen, $4p$ Dreiecke; die noch übrigen $m = n-4p-2$ Dreiecke können beliebig an das aus den $4p$ Dreiecken gebildete $(4p-2)$-Eck angesetzt werden. Wir können in erster Linie an eine und dieselbe Seite ein $(m-2)$-Eck ansetzen, dann an eine Seite ein $(m-3)$-Eck, an eine andere ein Dreieck u. s. w. u. s. w., so erhalten wir sicher alle die verschiedenen Gattungen reducirter n-Ecke.

Endlich sei noch auf einen letzten Umstand hingewiesen. Es seien $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ zwei reducirte Polygone von gleicher Seitenzahl, gleichen Winkeln, sowie von gleicher Zahl und Art der Flächendurchgänge und der umlaufenden Seiten. Derartige Polygone sind durch analoge Zusammensetzung gleichartiger Dreiecke zu bilden; für beide sind gleichviele Dreiecke mit nur endlichen, resp. mit umlaufenden Seiten in gleicher Anordnung zu benutzen. Hat nun $\mathfrak{P}_1$ resp. $\mathfrak{P}_2$ in W_1 resp. W_2 je einen Windungspunkt, so tragen zu ihm in beiden Polygonen die nämlichen Dreiecke bei; liegt daher W_1 mit einer Seite s_1 von $\mathfrak{P}_1$ in einem Blatt, so gilt dies auch für W_2 und s_2; d. h.

Alle reducirten n-Ecke derselben Art besitzen die gleiche Art des Zusammenhangs.

Uebrigens brauchen zweien beliebigen Ecken von $\mathfrak{P}_1$, die in dem gleichen Blatt liegen, nicht immer zwei Ecken von $\mathfrak{P}_2$ zu entsprechen, die ebenfalls im gleichen Blatt liegen.

§ 6.

Einfluss unendlichferner Eckpunkte.

Wir beschäftigen uns jetzt mit denjenigen Modificationen der vorstehenden Resultatė, die durch das Auftreten unendlichferner Eckpunkte bedingt werden. Zu diesem Zweck denken wir uns das Polygon stereographisch auf die Kugel projicirt; Z sei der Punkt, der dem Unendlichkeitspunkt entspricht, durch den also sämmtliche Kugelkreise hindurchgehen.

Es sei ZUV ein derartiges Kreisdreieck, und $\lambda'\pi$, $\lambda_1'\pi$, $\lambda_2'\pi$ seien die bei Z, U, V liegenden Winkel resp. Winkelreste, alsdann zeigt die Figur 24 unmittelbar, dass für die Winkel am Punkte Z

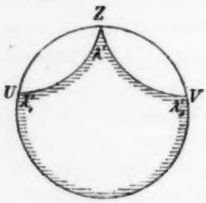


Fig. 24.

$$\lambda' + 1 - \lambda_1' + 1 - \lambda_2' = 1, \quad \text{d. h.}$$
$$\lambda_1' + \lambda_2' - \lambda' = 1$$

ist. Nun denken wir uns ein Polygon auf der Kugel, dessen eine Ecke in Z liegt, während sich die übrigen Kreisseiten continuirlich um Z herumwinden, das also ebenso durch $n - 2$ in Z zusammenstossende Dreiecke entsteht, wie das analoge n-Eck des § 1 in der Ebene. Für dieses n-Eck ergiebt sich durch $(n - 2)$malige Anwendung der obigen Formel

$$\sum_1^{n-1} \lambda_i - \bar{\lambda} = n - 2,$$

wenn wieder $\lambda_i\pi$ die Winkel des Polygons bedeuten, und $\bar{\lambda}\pi$ der Winkel bei Z ist. Die gleiche Formel besteht daher auch für die den Unendlichkeitspunkt umziehenden ebenen Polygone.

Ist jetzt $\mathfrak{P}$ ein Polygon, von dem beliebig viele Eckpunkte im Unendlichen liegen, so verwandeln wir es, wie in § 2 in ein Elementarpolygon, indem wir zunächst jeden Windungspunkt, und dann jeden dem Umfang oder dem Innern angehörigen Unendlichkeitspunkt durch die bezüglichen einfachen Querschnitte ausschneiden; es folgt dann, genau wie dort, dass die Winkelsumme durch die Relation

$$\text{II)} \qquad \sum \lambda - \sum \bar{\lambda} = n - 2 + 2 \sum \nu + 4p$$

gegeben ist. Die Abweichung von der Relation I), die durch un-

endlichferne Ecken bedingt wird, besteht demnach ausschliesslich darin, dass *jeder an einem unendlichfernen Eckpunkt liegende Winkel mit seinem vollen Betrage negativ in Rechnung zu stellen ist.* Nur auf einen Punkt sei noch hingewiesen. Es ist klar, dass von umlaufenden Seiten nur dann die Rede ist, wenn die Seite wirklich durch den Unendlichkeitspunkt hindurchzieht; Seiten, die im Unendlichen endigen, sind deshalb nicht umlaufend, auch dann nicht, wenn beide Eckpunkte im Unendlichen liegen (vgl. den Schlusssatz dieses Paragraphen). Ebenso ist ein Flächendurchgang nur dann vorhanden, wenn der Unendlichkeitspunkt wirklich im Innern der Polygonfläche liegt.

Da die Summe aller n Polygonwinkel unbedingt positiv ist, so ziehen wir aus der obigen Formel den Satz:

In einem n-Eck können höchstens $n-1$ Eckpunkte im Unendlichen liegen.

Wir fragen jetzt nach Reductionsprocessen, in die unendlichferne Eckpunkte eingehen können. Wir schreiben die obige Relation zu diesem Zweck folgendermassen:

$$\text{II}')\quad \sum \lambda' - \sum \bar{\lambda}' + 2\sum w - 2\sum \bar{w} = n - 2 + 2\sum \nu + 4p.$$

Sie zeigt, dass von Reductionen, die unendlich ferne Eckpunkte betreffen und überdiess die Ecken und die Winkelreste ungeändert lassen, nur solche existiren können, die ein w gegen ein $\bar{w}$ tilgen, d. h. einen im Endlichen gelegenen Windungspunkt gegen einen unendlich fernen. Dieser Process besteht in der Ausschaltung einer vollen Ebene; es ist aber zu beachten, dass er die Zahlen ν und p ungeändert lässt; in der That wird ja der unendlich ferne Windungspunkt nicht als einen Flächendurchgang bedingend angesehen. Die Ausschaltung einer Halbebene ist, wie auch morphologisch ersichtlich ist, ausgeschlossen, dagegen ist die Anhängung resp. Abtrennung einer Halbebene längs einer im Unendlichkeitspunkt endigenden Seite gestattet; sie ändert die beiden Winkel im entgegengesetzten Sinn um je π, lässt aber wieder die Zahl ν ungeändert. (Fig. 25). Also folgt:

Fig. 25.

Es giebt nur zwei Reductionsprocesse, in die unendlich ferne Eckpunkte eingehen, nämlich die Ausschaltung einer Vollebene und die Abtrennung einer Halbebene. Beide Processe lassen den Ausdruck

$$n - 2 + 2\sum \nu + 4p$$

ungeändert.

Es fragt sich schliesslich, wie es mit den reducirten Polygonen und ihrer Zerlegung in reducirte Dreiecke steht. Hier bleiben alle

oben gezogenen Schlüsse ohne Weiteres bestehen. Die Theilung bezüglich einer umlaufenden Seite s beruhte auf der Existenz des im Endlichen gelegenen Punktes B. Dies braucht nun allerdings bei Polygonen mit unendlich fernen Eckpunkten nicht Statt zu haben, denn es können beide Punkte einer umlaufenden Seite in's Unendliche fallen. Man hat aber in diesem Fall nur nöthig, das geradlinige Polygon durch ein Kugelpolygon zu ersetzen und man überzeugt sich leicht, dass die oben gezogenen Schlüsse unverändert bestehen bleiben; die Lage von A und B hat hierauf keinen Einfluss. Was endlich die Zerlegung der mit Flächendurchgängen behafteten Polygone betrifft, so wird sie durch die Existenz der unendlich fernen Eckpunkte überhaupt nicht berührt; denn ein Blatt, das den Unendlichkeitspunkt im Innern enthält, kann keine unendlich ferne Ecke besitzen.

Es fragt sich daher nur noch, wie es mit der Zerlegung von Polygonen mit unendlich fernen Ecken steht, die weder umlaufende Seiten, noch Flächendurchgänge besitzen. Für diese versteht sich aber, wenn sie selbst reducirt sind, die Zerlegbarkeit in reducirte Dreiecke von selbst.

Wir können jetzt auch den S. 391 bei Seite gestellten Punkt erledigen, wie man zu verfahren hat, wenn die von B ausgehende Seite v zu s parallel ist. In diesem Fall geht die Verlängerung v' durch den unendlich fernen Punkt Z von s und theilt daher von $\mathfrak{P}$ ein Dreieck ABZ ab, das eine Ecke im Unendlichen enthält*), das aber ebenfalls reducirt ist, und das gleiche ist für das andere Theilpolygon $\mathfrak{P}_2$ der Fall. Wir können daher jetzt folgenden allgemeinen Satz aussprechen:

Ein reducirtes n-Eck kann, auch wenn es unendlich ferne Eckpunkte hat, in $n-2$ reducirte Dreiecke zerlegt werden.

Um einige Beispiele beizubringen, lassen wir die reducirten Dreiecke und Vierecke mit unendlich fernen Eckpunkten hier folgen. Um die Vierecke abzuleiten, kann man entweder von den Vierecken mit endlichen Eckpunkten ausgehen, und die Eckpunkte der Reihe nach in's Unendliche rücken lasssen, oder aber — und dies scheint zweckmässiger zu sein — man knüpft an die Art der Zusammensetzung an, indem man jedes dabei benutzte Dreieck, soweit möglich, durch ein Dreieck mit unendlich fernen Eckpunkten ersetzt. Dabei ist Folgendes zu beachten. Soll ein Punkt in's Unendliche rücken, und liegt in dem Blatt, dem er angehört, eine umlaufende Seite, so darf er nur von aussen, nicht von innen, in diese Seite hineinfallen (§ 1). Hieraus ist bereits zu folgern, dass aus dem reducirten Dreieck mit einer um-

*) Der Winkel im Unendlichen ist Null. Daraus folgt, dass der Grenzwerth Null für unendlich ferne Eckpunkte keine Besonderheit bedingt.

laufenden Seite ein reducirtes Dreieck mit umlaufender Seite und unendlich fernem Eckpunkt nicht abgeleitet werden kann. Ein derartiges Dreieck kann nämlich nach dem Vorstehenden nur noch dadurch entstehen, dass wir einen Endpunkt der umlaufenden Seite in's Unendliche rücken lassen. Geschieht dies in der Richtung der Verlängerung der Seite, so ist das so bestimmte Dreieck nicht reducirt. Andrerseits ist es überflüssig, einen Eckpunkt in der Richtung der umlaufenden Seite selbst in's Unendliche rücken zu lassen, denn jedes so entstehende reducirte Dreieck hat keine umlaufende Seite mehr, und muss daher aus einem Dreieck mit lauter endlichen Seiten hervorgehen. Wir brauchen daher auch bei der Bildung der Vierecke nur die Dreiecke mit drei endlichen Eckpunkten durch Dreiecke mit unendlich fernen Eckpunkten zu ersetzen; die Dreiecke mit umlaufender Seite bleiben, sofern sie überhaupt benutzbar sind, unverändert.

Wir schliessen hieraus sofort:

Es giebt nur eine Gattung von Dreiecken mit einem unendlichfernen Eckpunkt. Ihre Winkelsumme beträgt π; *keine Seite ist umlaufend.* (Fig. 26).

Fig. 26.

Fig. 27.

Es giebt nur eine Gattung von Dreiecken mit zwei unendlich fernen Punkten; ihre Winkelsumme ist π, *keine Seite ist umlaufend.* (Fig. 27).

Sind $\lambda_1\pi$ und $\lambda_2\pi$, resp. $\lambda_1\pi$ allein die Winkel an den im Endlichen bleibenden Ecken, dagegen $\bar{\lambda}_1\pi$ resp. $\bar{\lambda}_1\pi$ und $\bar{\lambda}_2\pi$ absolut genommen die Winkel im Unendlichen, so gelten folgende Bedingungen:

$$\lambda_1 < 2,\quad \lambda_2 < 2,\quad \lambda_1 + \lambda_2 < 2,\quad \bar{\lambda}_1 < 1,$$

resp.

$$1 < \lambda_1 < 3,\quad \bar{\lambda}_1 < 1,\quad \bar{\lambda}_2 < 1.$$

Bei den Dreiecken mit zwei unendlich fernen Ecken kann nämlich der im endlichen bleibende Winkel einen Windungspunkt liefern, ohne dass das Dreieck aufhört, reducirt zu sein. Man sieht dies unmittelbar, wenn man sich vorstellt, dass der Winkel der Fig. 27 wächst, bis er grösser als 2π ist.

Die Vierecke mit einem unendlich fernen Eckpunkt zerfallen in zwei Gattungen; die erste hat keine, die zweite hat eine umlaufende Seite. Die Vierecke dritter Gattung mit endlichen Eckpunkten scheiden

hier aus, da sie mit zwei Dreiecken mit umlaufender Seite gebildet sind. Für die erste Gattung hat die Winkelsumme den Werth 2π, für die zweite beträgt sie 4π. Die Vierecke erster Gattung können bereits Windungspunkte erhalten, ohne dass sie reducirbar werden, nämlich dann, wenn man sie aus zwei Dreiecken mit unendlich fernem Eckpunkt zusammensetzt. (Fig. 28 und 28a*)). Die Vierecke mit

Fig. 28.

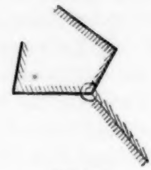


Fig. 28a.

umlaufender Seite können nur so gebildet werden, dass man an ein Dreieck mit umlaufender Seite und endlichen Eckpunkten ein Dreieck mit unendlich fernem Eckpunkt ansetzt; dabei können je nach der Lage dieses Dreiecks noch mannigfache Typen entstehen. Die nebenstehenden Figuren 29, 29a, 29b entsprechen den Figuren 19, 19a, 20 und 20a. Es folgt:

Fig. 29.

Fig. 29a.

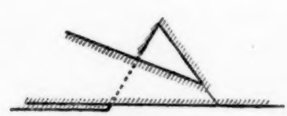


Fig. 29b.

Es giebt zwei Gattungen von Vierecken mit einem unendlich fernem Eckpunkt. Die eine besitzt eine umlaufende Seite, die andere nicht; die bezügliche Winkelsumme beträgt 2π, resp. 4π.

Die bezüglichen Winkelbedingungen sind im ersten Falle

$$0 < \lambda_1 < 2, \quad 0 < \lambda_2 < 4, \quad 0 < \lambda_3 < 2, \quad \bar{\lambda} < 2,$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 < 4,$$

*) Vgl. die Anmerkung zu Figur 21. Es empfiehlt sich, die Figuren mit unendlich fernen Punkten auch als Kreispolygone zu zeichnen.

im zweiten Fall dagegen

$$0 < \lambda_1 < 1, \quad 1 < \lambda_2 < 4, \quad 0 < \lambda_4 < 3, \quad \bar{\lambda} < 1,$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 < 5,$$

resp.

$$0 < \lambda_1 < 1, \quad 1 < \lambda_2 < 2, \quad 0 < \lambda_3 < 2, \quad \bar{\lambda} < 1,$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 < 5.$$

Um Vierecke mit zwei unendlich fernen Eckpunkten zu bilden, können wir Dreiecke mit umlaufender Seite nicht mehr benutzen; denn ein reducirtes Dreieck dieser Art bedingt stets drei im Endlichen gelegene Ecken. Die Vierecke entstehen daher sämmtlich durch Zusammensetzung von Dreiecken mit unendlich fernen Eckpunkten. Hier sind drei Fälle zu unterscheiden. Wir können erstens zwei Dreiecke mit je einem unendlich fernen Punkt benutzen, zweitens ein Dreieck mit einem und ein Dreieck mit zwei unendlich fernen Punkten, und drittens zwei Dreiecke mit je zwei unendlich fernen Punkten. Zwei Dreiecke mit einem unendlich fernen Punkt können nur so aneinander gelegt werden, dass die unendlichen Punkte nicht coincidiren; dadurch

Fig. 30.

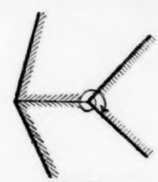


Fig. 30a.

entsteht ein Viereck, in dem die unendlichen Ecken gegenüberliegende Ecken sind. (Fig. 30 und 30a)*). Die Winkel genügen der Bedingung

$$0 < \lambda_1 < 4, \quad 0 < \lambda_2 < 4, \quad 0 < \bar{\lambda}_1 < 1, \quad 0 < \bar{\lambda}_2 < 1,$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 < 4,$$

ihre Summe beträgt 2π.

Wird ein Dreieck mit einem unendlichen Punkt und ein Dreieck mit zwei unendlichen Punkten zusammengesetzt, so entsteht ein Viereck, in dem die unendlichen Eckpunkte benachbarte Punkte sind. (Fig. 31). Die Zusammensetzung kann nämlich nur so erfolgen, dass zwei von einem endlichen nach einem unendlichen Eckpunkt laufende Seiten aufeinanderfallen. Die Winkelbedingung lautet:

Fig. 31.

$$0<\lambda_1<2, \quad 1<\lambda_2<5, \quad 0<\bar{\lambda}_1<1, \quad 0<\lambda_2<2,$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 < 5,$$

die Summe der Winkel beträgt wieder 2π.

*) Vgl. die Anmerkung zu Figur 21.

Zwei Dreiecke mit je zwei unendlich fernen Punkten sind so zusammenzusetzen, dass die Seiten, die diese beiden Punkte verbinden, mit einander coincidiren. Die so entstehenden Vierecke stellen aber den nämlichen Typus dar, wie die zuerst abgeleiteten Vierecke. (Fig. 32). Wir erhalten demnach:

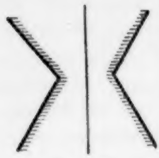


Fig. 32.

Es giebt eine Gattung von Vierecken mit zwei unendlich fernen Punkten; sie enthält zwei verschiedene Typen von Vierecken, die sich danach unterscheiden, ob die unendlich fernen Eckpunkte durch die im Endlichen liegenden Eckpunkte getrennt werden oder nicht.

Vierecke mit drei unendlich fernen Eckpunkten können sich augenscheinlich nur durch Zusammensetzung von zwei Dreiecken mit zwei unendlich fernen Eckpunkten ergeben; die endlichen Ecken fallen zusammen. (Fig. 33)*). Die Winkelbedingung lautet

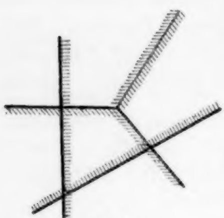


Fig. 33.

$$2 < \lambda_1 < 6, \quad 0 < \bar{\lambda}_1 < 1, \quad 0 < \bar{\lambda}_2 < 2,$$
$$0 < \bar{\lambda}_3 < 4;$$

die Winkelsumme beträgt 2π.

Der im Endlichen verbleibende Eckpunkt ist daher nothwendig ein Windungspunkt. Der Typus des Vierecks ist genau derjenige des im Eingang von § 1 betrachteten Polygons mit einem Windungspunkt. Es folgt:

Es giebt nur eine Gattung von Vierecken mit drei unendlich fernen Eckpunkten.

Es ist klar, dass jedes n-Eck mit $n-1$ unendlich fernen Eckpunkten vom nämlichen Typus ist.

§ 7.

Polygone, die Windungspunkte im Innern enthalten.

Es erübrigt noch, die vorstehend abgeleiteten Sätze auf solche Polygone auszudehnen, die Windungspunkte in ihrem Innern enthalten. Wir betrachten zu diesem Zweck zunächst den einfachen Fall eines Polygons $\mathfrak{P}$ mit durchaus endlichen Seiten, und ohne Flächendurchgänge, das in seinem Innern einen Windungspunkt erster Ordnung V besitzt. Ziehen wir von V eine geradlinige Transversale t nach der Begrenzung des Polygons und denken uns die Polygonfläche längs dieser Transversalen zerschnitten, so bleibt sie einfach zusammen-

*) Vgl. die Anmerkung zu Figur 21.

hängend, verwandelt sich aber in ein Polygon $\mathfrak{P}'$, für das V jetzt ein Eckpunkt geworden ist.

Es ist einleuchtend, dass wir auf ähnliche Weise jedes Polygon $\mathfrak{P}$, das Windungspunkte in seinem Innern enthält, in ein Polygon $\mathfrak{P}'$ überführen können, in dem alle Windungspunkte Eckpunkte geworden sind. Ist wieder V ein solcher Punkt, so ist nur noch zu untersuchen, ob es eine von V ausgehende Transversale giebt, welche die Begrenzung in allen Fällen bereits nach einem endlichen Verlauf treffen muss. Dies braucht nicht immer der Fall zu sein. Wie dem aber auch sei, so muss man immer von V aus einen aus endlichen Strecken bestehenden Linienzug ziehen können, der schliesslich den Polygonumfang erreicht. *Es kann daher jeder innere Windungspunkt von $\mathfrak{P}$ mittelst eines geradlinigen Linienzugs, der nur Strecken von endlicher Länge enthält, in einen Eckpunkt eines Polygons $\mathfrak{P}'$ übergeführt werden.* Dies ist übrigens stets so möglich, dass der Linienzug in einer Ecke von $\mathfrak{P}$ endigt.

Nun sei n die Anzahl der Ecken von $\mathfrak{P}$, ferner seien $V_1, V_2 \ldots V_r$ die im Innern gelegenen Windungspunkte, $w_1', w_2', \ldots w_r'$ die zugehörigen Ordnungszahlen und $l_1, l_2 \ldots l_r$ die Zahl der Strecken jedes Linienzuges. Wir nehmen an, dass diese Linienzüge sämmtlich in Ecken von $\mathfrak{P}$ endigen, so wird das Polygon $\mathfrak{P}'$

$$n' = n + 2\sum_1^r l_i$$

Ecken haben. Für seine Winkelsumme $S'\pi$ ergiebt sich daher

$$S' = n + 2\sum l - 2 + 2\sum \nu + 4p.$$

Andrerseits ist die Winkelsumme von $\mathfrak{P}'$ um

$$\left\{2\sum_1^r (w_i' + 1) + 2\sum_1^r (l_i - 1)\right\}\pi$$

grösser als diejenige von $\mathfrak{P}$; daher folgt

(III) $$\sum \lambda = n - 2 - 2\sum w' + 2\sum \nu + 4p$$

resp.

(IIIa) $$\sum \lambda' + 2\sum w + 2\sum w' = n - 2 + 2\sum \nu + 4p.$$

Die hier benutzte Auffassung, nach der das Polygon $\mathfrak{P}$ mit inneren Windungspunkten als Polygon $\mathfrak{P}'$ betrachtet wird, das Windungspunkte nur in den Ecken besitzt, ist für die functionentheoretischen Zwecke durchaus geeignet. Wenn nämlich die Functionentheorie zu Polygonen führt, die innere Windungspunkte V besitzen, so ist es doch gerade für diejenigen Fragen, die von der Gestaltung des Polygons abhängen, sehr nützlich, das bezügliche Polygon morphologisch als

Polygon $\mathfrak{P}$ aufzufassen, für das jeder Punkt V ein innerer Punkt geworden ist. Für diese Aufgaben ist es daher ausreichend, die Polygone $\mathfrak{P}$ mit inneren Windungspunkten in Polygone $\mathfrak{P}'$ zu verwandeln. Alsdann können wir aber die in den vorstehenden Paragraphen abgeleiteten Sätze auf die Polygone $\mathfrak{P}$ ohne Weiteres übertragen. Im Besondern folgt, dass das Polygon $\mathfrak{P}$, wenn es selbst reducirt ist, aus $n+2r-2$ reducirten Dreiecken zusammengesetzt werden kann; man hat nur diese Dreiecke so zu wählen, dass in den Eckpunkten, die innere Windungspunkte werden sollen, die Winkel bezüglich den Werth $2w_1'\pi, 2w_2'\pi, \ldots$ erhalten.

Die vorstehende Auffassung wird auch dadurch unterstützt, dass in die Winkelrelation die inneren Windungspunkte in gleicher Weise eingehen, wie diejenigen, die in den Ecken liegen. In der That können auch die inneren Windungspunkte zu Reductionsprocessen benutzt werden: ein principieller Unterschied zwischen beiden Arten von Windungspunkten ist daher geometrisch nicht vorhanden.

Göttingen, im October 1892.

Untersuchungen über die reellen Nullstellen der Integrale linearer Differentialgleichungen.

Von

Adolf Kneser in Dorpat.

Sturm und Liouville haben in den ersten drei Bänden des Liouville'schen Journals eine Reihe nach Form und Inhalt hervorragender Abhandlungen über lineare Differentialgleichungen veröffentlicht, auf welche neuerdings mehrfach, besonders von den Herren Routh, Lord Rayleigh, Darboux, F. Klein hingewiesen worden ist. Die Tendenz dieser Arbeiten geht dahin, bei jedem reellen Integral einer linearen Differentialgleichung die in den physikalischen Anwendungen wichtigsten Eigenschaften, das Wachsen, Abnehmen und Verschwinden für reelle Werthe der unabhängigen Variabeln, überhaupt die Gestalt der das Integral darstellenden Curve, ihre Ausbuchtungen, unendlichen Aeste u. s. w. zu studiren, ausgehend von der Differentialgleichung selbst, ohne den analytischen Charakter des Integrals, seinen Ausdruck durch bekannte Functionen, Reihen oder Quadraturen kennen zu müssen. In ähnlicher Richtung bewegen sich die auf den folgenden Blättern veröffentlichten Untersuchungen; sie beziehen sich hauptsächlich auf die bei vielen Problemen der mathematischen Physik auftretende Frage, ob die Integrale einer linearen Differentialgleichung für unbegrenzt wachsende positive Werthe des Arguments unendlich oft verschwinden können oder nicht; ob also der eine oder andere der beiden Fälle eintritt, welche bei Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten den reellen und den imaginären Wurzeln einer gewissen algebraischen Gleichung entsprechen.

Es gelingt, diese Frage für einige sehr allgemeine Categorien von linearen Differentialgleichungen vollständig zu erledigen.

I.

1. Es handelt sich im Folgenden wesentlich um Functionen eines reellen Arguments x. Hat eine solche Function $F(x)$ für alle endlichen Werthe von x, die eine gewisse positive Grenze überschreiten,

irgend welche Eigenschaften, so sagen wir, sie habe dieselben für grosse Werthe von x. Nähert sich die Function bei unbegrenzt wachsenden Werthen von x einer bestimmten endlichen oder unendlichen Grenze, so bezeichnen wir diese einfach durch $\lim F(x)$, während andere Grenzwerthe durch Angabe der Aenderung von x, der sie entsprechen, von dem für $x = +\infty$ zu bildenden unterschieden werden. Tritt die Bezeichnung $\lim F(x)$ in einer Relation neu auf, so sei damit implicite die Existenz eines Grenzwerthes von $F(x)$ für $x = +\infty$ behauptet.

Dies festgesetzt, können wir zwei elementare Sätze der Infinitesimalrechnung, welche das Hauptinstrument der zunächst durchzuführenden Untersuchungen bilden, in folgender Weise formuliren:

(A) Wenn für grosse Werthe von x die Function $F(x)$ sammt ihrer Ableitung $F'(x)$ endlich und stetig und letztere entweder grösser als eine positive oder kleiner als eine negative Constante bleibt, so ist entsprechend beiden Fällen $\lim F(x) = \pm\infty$.

(B) Sind die Functionen $F(x)$ und $G(x)$ für grosse Werthe von x endlich und stetig, existiren ferner die Grenzwerthe $\lim F(x)$, $\lim G(x)$ und wird der Fall ausgeschlossen, dass von ihnen der eine $= 0$, der andere $= \pm\infty$ ist, so besteht die Gleichung

$$\lim F(x) \,.\, \lim G(x) = \lim \big(F(x)\, G(x)\big).$$

2. Es sei nun eine lineare binomische Differentialgleichung zweiter Ordnung gegeben:

$$y'' + y f(x) = 0, \tag{1}$$

in welcher die Function $f(x)$ sowie das Integral y sammt seinen ersten beiden Ableitungen für grosse Werthe von x endlich und stetig sein mögen. Dann können zwei Fälle eintreten; entweder ist die Function y für grosse Werthe des Arguments x von Null verschieden, oder sie verschwindet für eine unendliche Reihe unbegrenzt wachsender positiver Werthe von x; im letzteren Falle nennen wir sie *oscillatorisch*. Reducirt sich speciell $f(x)$ auf eine Constante c, so sind bekanntlich die Integrale der Gleichung (1) oscillatorisch oder nicht, je nachdem c positiv oder negativ ist. Man kann aber auch — und das ist unser nächstes Ziel — ein Criterium für das Auftreten oscillatorischer oder nicht oscillatorischer Integrale bei der allgemeinen Differentialgleichung (1) ableiten.

Zunächst werde angenommen, die Function $f(x)$ convergire für $x = +\infty$ gegen einen endlichen oder unendlichen Grenzwerth

$$\lim f(x) > 0; \tag{2}$$

wäre dann irgend ein Integral y nicht oscillatorisch, also für grosse Werthe von x von constantem, etwa dem positiven Zeichen, so ergäbe die Differentialgleichung (1) für grosse Werthe von x

$$(3) \qquad y'' < 0.$$

Für die erste Ableitung y' sind offenbar nur zwei Fälle möglich: a) es giebt beliebig grosse Werthe von x, für welche $y' < 0$, oder b) für grosse Werthe von x ist stets $y' \geqq 0$.

Im Falle a) würde sich aus der Ungleichung (3) ergeben, dass die Function y' beständig abnehmen, also für grosse Werthe von x überhaupt negativ und kleiner als eine gewisse negative Grösse bleiben muss. Dann wäre aber dem Satze (A) zufolge

$$\lim y = -\infty,$$

was der über das Vorzeichen der Grösse y gemachten Voraussetzung widerspricht.

Im Falle b) würde dagegen die Function y für grosse Werthe von x niemals abnehmen können; also existirte ein Grenzwerth

$$\lim y > 0.$$

Hieraus und aus der Ungleichung (2) würde aber nach dem Satze (B) folgen

$$\lim \bigl(y\,f(x)\bigr) > 0, \quad \lim y'' < 0,$$

also mit zweimaliger Benutzung des Satzes (A)

$$\lim y' = -\infty, \quad \lim y = -\infty,$$

was wiederum der für y eingeführten Voraussetzung widerspricht.

Aus der Annahme, ein Integral der gegebenen Gleichung sei nicht oscillatorisch, ergiebt sich also ein Widerspruch, und man hat das folgende erste Resultat.

Ist die Function $f(x)$ für grosse Werthe von x endlich und stetig und ist $\lim\limits_{x=+\infty} f(x) > 0$, so ist jedes für grosse Werthe von x endliche und sammt seinen ersten beiden Ableitungen stetige Integral der Differentialgleichung

$$y'' + y\,f(x) = 0$$

oscillatorisch, d. h. es verschwindet für eine Reihe unzähliger positiver unbegrenzt wachsender Werthe von x.

3. Als Beispiel zur Anwendung dieses Satzes betrachten wir die Bessel'sche Transcendente $J_n(x)$, welche der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 J_n}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dJ_n}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) J_n = 0$$

genügt; dabei kann n^2 eine beliebige reelle Constante sein. Die Grösse $y = J_n(x)\sqrt{x}$ ist dann Integral der Gleichung

$$y'' + \left(1 + \frac{1-4n^2}{x^2}\right) y = 0,$$

auf welche offenbar das in Nr. 2 erhaltene Resultat angewandt werden kann, da die Ungleichung

$$\lim \left(1 + \frac{1-4n^2}{x^2}\right) > 0$$

besteht. Die Grössen y und $J_n(x)$ verschwinden also für unzählige und beliebig grosse positive Werthe des Arguments x.

Für diese Thatsache findet sich beiläufig bemerkt in der von Hattendorff besorgten Ausgabe der Vorlesungen Riemann's über partielle Differentialgleichungen S. 267 ein offenbar mangelhafter Beweis; die ihm ursprünglich zu Grunde liegende strenge Argumentation Riemann's dürfte der in Nr. 2 durchgeführten sehr ähnlich sein.

4. Um nun die Differentialgleichung (1) für weitere, in Nr. 2 nicht erledigte Fälle auf den oscillatorischen Charakter ihrer Integrale hin zu untersuchen, sei jetzt für $x \geqq \xi$

$$f(x) < 0, \tag{4}$$

und die Functionen $f(x)$, y, y', y'' endlich und stetig; dann haben für den angegebenen Werthbereich der Variabeln x die Grössen y und y'' zufolge der Differentialgleichung (1) gleiche Zeichen; es sei etwa für $x = \xi$

$$y > 0, \quad y'' > 0, \quad y' \gtrless 0. \tag{5}$$

Betreffs der Grösse y' sind hier wiederum zwei Fälle zu unterscheiden.

a) Hat man für $x = \xi$ die Ungleichung $y' = 0$, so muss den Relationen (5) zufolge die Function y' zunächst wachsen, wenn man x vom Werthe ξ ab wachsen lässt; es kann also eine Grösse $\xi_1 > \xi$ so bestimmt werden, dass für alle der Ungleichung

$$\xi \leqq x \leqq \xi_1$$

genügenden Werthe von x die Grösse y' positiv ist, also die Grösse y wächst mit wachsenden Werthen des Arguments. Für $x = \xi_1$ sind daher beide Grössen y, y' jedenfalls positiv, sodass für diesen Argumentwerth dieselben Schlüsse gemacht werden können wie für ξ. Von ξ_1 ausgehend kann man in entsprechender Weise einen Werth $\xi_2 > \xi_1$ bestimmen, für den ebenfalls noch y und y' positive Grössen sind, und so kann man beliebig weit fortfahren. Die Reihe der zunehmenden Grössen

$$\xi < \xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < \cdots \tag{6}$$

kann aber gegen keinen endlichen Grenzwerth η convergiren; denn dann müssten die Functionen y und y' für alle der Ungleichung

$$\xi \leqq x < \eta$$

genügenden Werthe von x positiv sein und, da auch die zweite Ableitung y'' positiv wäre, wachsen mit wachsenden Werthen von x; sie wären also zufolge ihrer Stetigkeit auch positiv für $x = \eta$, sodass für diesen Werth dieselben Schlüsse gültig wären wie für ξ. Die Reihe (6) könnte also zu Werthen, die grösser als η sind, fortgesetzt werden. Damit ist gezeigt, dass die Functionen y und y' für beliebig grosse Werthe von x positiv sind und mit dem Argument x zunehmen.

b) Nimmt man zweitens an, für $x = \xi$ sei $y' < 0$, so können die Grössen y und y' entweder für alle Werthe $x > \xi$ von Null verschieden bleiben oder nicht. In letzterem Falle kann erstens eine der Grössen, wenn man x von ξ an wachsen lässt, zuerst allein verschwinden etwa für $x = \xi_0$; sie muss dann ihr Zeichen wechseln, da dies für y evident ist, für y' aber daraus folgt, dass mit y auch y'' von Null verschieden sein muss. Für Werthe von x, die hinreichend wenig von ξ_0 verschieden und grösser als ξ_0 sind, hätte man eine der beiden Möglichkeiten

$$(7) \qquad \begin{aligned} y < 0, \quad y' < 0, \quad y'' < 0, \\ y > 0, \quad y' > 0, \quad y'' > 0, \end{aligned}$$

von denen die zweite direct, die erste bei Betrachtung des Integrals $-y$ auf den Fall a) zurückführt, indem man ξ_0 an Stelle von ξ setzt. Zweitens aber könnten die Grössen y und y' zugleich verschwinden; wenn dann die Grösse y ihr Zeichen nicht wechselte, so gälte vermöge der Differentialgleichung dasselbe von y'', also müsste die erste Ableitung den Sinn ihrer Aenderung, ihre Zunahme oder Abnahme beibehalten, also ihr Zeichen wechseln. Wenn dagegen bei y ein Zeichenwechsel einträte, so müsste dasselbe für y'' gelten, also müsste die Grösse y' den Sinn ihrer Aenderung wechseln, also ihr Zeichen beibehalten. Jedenfalls sieht man, dass nur eine der Grössen y und y' ihr Zeichen wechselt, dass man also auch hier auf eine der Combinationen (7) und damit auf den Fall a) zurückkommt. Da nun bei diesem beide Functionen y und y' von einem gewissen Werthe des Arguments ab positiv bleiben, erstere also wächst, so ist folgender Satz bewiesen.

Wenn die Function $f(x)$ für grosse Werthe von x endlich, stetig und negativ ist, so hat die Differentialgleichung

$$y'' + y f(x) = 0$$

kein oscillatorisches Integral; jedes Integral, welches für grosse Werthe von x sammt seinen ersten beiden Ableitungen endlich und stetig ist, muss von einem gewissen positiven Werthe von x ab entweder beständig wachsen und positiv, oder beständig abnehmen und negativ sein.

Man übersieht leicht, dass dasselbe gilt für die Integrale der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left(g(x)\frac{dy}{dx}\right) + yf(x) = 0,$$

wenn $g(x)$ eine beliebige für grosse Werthe von x endliche, stetige und positive Function bedeutet.

II.

5. Neue Methoden sind erforderlich, um die Differentialgleichung (1) auch im Falle

$$\lim f(x) = 0$$

auf den oscillatorischen Charakter ihrer Integrale hin untersuchen zu können. Zu diesem Zwecke verbinden wir unsre Resultate mit einem bekannten Theorem von Sturm (Liouville's Journal Bd. I, S. 125), welches für unsre Zwecke am passendsten in folgender Weise formulirt werden kann.

In den Differentialgleichungen

$$y'' + y\varphi(x) = 0, \quad z'' + z\psi(x) = 0 \tag{8}$$

seien die Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ sowie die Integrale y und z sammt ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung für irgend ein Werthintervall der Variabeln x endlich und stetig, und es bestehe für dieses Intervall die Ungleichung

$$\varphi(x) \leqq \psi(x). \tag{9}$$

Dann liegt zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen x_0 und x_1 der Function y, welche dem Intervall angehören, mindestens eine Nullstelle der Function z.

Den einfachsten Beweis dieses Theorems giebt eine schon von Sturm und seitdem vielfach benutzte Formel, welche aus den Gleichungen (8) unmittelbar folgt:

$$\begin{gathered} y''z - z''y = yz\big(\psi(x) - \varphi(x)\big), \\ [y'z - z'y]_{x_0}^{x_1} = \int_{x_0}^{x_1} yz\big(\psi(x) - \varphi(x)\big)\,dx. \end{gathered} \tag{10}$$

Die Function y hat nämlich im Intervall $x_0 \ldots x_1$ ein constantes Zeichen, etwa das positive; wäre die Behauptung nicht richtig, so hätte in diesem Intervall auch die Grösse z ein constantes Zeichen, etwa auch das positive, da für unsere Betrachtungen beide Integrale $\pm z$ offenbar gleichwerthig sind. Die rechte Seite der Gleichung (10) ist dann wegen der Ungleichung (9) sicher positiv. Andrerseits ist die Grösse y' für $x = x_0$ nicht negativ, für $x = x_1$ nicht positiv, da

die Function y für ersteren Argumentwerth wächst, für letzteren abnimmt; die linke Seite der Gleichung (10) ist also sicher nicht positiv. Damit hat die Annahme, unser Satz sei unrichtig, zu einem Widerspruch geführt.

Der Gebrauch, der von dem Sturm'schen Theorem für unsre Fragen zu machen ist, liegt auf der Hand: gilt die Ungleichung (9) überhaupt für grosse Werthe von x und weiss man, dass ein Integral der ersten Differentialgleichung (8) sich oscillatorisch verhält, so gilt dasselbe von jedem Integral der zweiten Gleichung. Hat man $\varphi(x) = \psi(x)$, so folgt der ebenfalls von Sturm aufgestellte Satz, dass die Nullstellen zweier Integrale einer Differentialgleichung von der Form (8) einander trennen, und dass alle Integrale oscillatorisch sind, wenn dies von einem einzigen gilt.

6. Schon bei Sturm finden sich derartige Vergleichungen zu untersuchender Differentialgleichungen mit bekannten, besonders mit der Differentialgleichung, deren Coefficienten constant sind. Nach dieser Methode hätte man auch den in Nr. 2 aufgestellten Satz beweisen können. Die Differentialgleichung mit constanten Coefficienten versagt aber im Falle $\lim f(x) = 0$. Hier ist es zweckmässig, etwa die Differentialgleichung

$$y'' + \frac{a}{x^2}\, y = 0$$

zur Vergleichung heranzuziehen, in welcher a eine reelle Constante ist. Ein Integral derselben ist eine Potenz von x mit reellem oder complexem Exponenten, je nachdem $a \leqq \frac{1}{4}$ oder $a > \frac{1}{4}$. In letzterem Falle ist der reelle Theil der Potenz ein, wie man leicht sieht, oscillatorisches Integral der Differentialgleichung; denselben Charakter hat dann also nach Nr. 5 jedes andere Integral derselben.

Nun sei in der Differentialgleichung

$$y'' + y f(x) = 0 \tag{1}$$

$f(x)$ eine für grosse Werthe von x endliche stetige und positive Function, welche für $x = +\infty$ den Grenzwerth Null besitzt. Nimmt man speciell an, es sei

$$\lim \left(x^2 f(x)\right) > \frac{1}{4}, \tag{11}$$

so wähle man die positive Zahl δ so klein, dass auch die Ungleichung

$$\lim \left(x^2 f(x)\right) > \frac{1}{4} + \delta \tag{12}$$

besteht; alsdann hat die Differentialgleichung

$$y'' + \frac{y}{x^2}\left(\frac{1}{4} + \delta\right) = 0$$

nur oscillatorische Integrale. Da nun zufolge der Relation (12) für grosse Werthe von x die Ungleichung

$$f(x) > \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{4} + \delta\right)$$

besteht, so folgt, dass auch die Differentialgleichung (1) unter der Annahme (11) nur oscillatorische Integrale besitzt.

Nimmt man dagegen an, es sei

$$\lim x^2 f(x) < \frac{1}{4},$$

so ist für grosse Werthe von x

$$f(x) < \frac{1}{4x^2}; \tag{13}$$

die Differentialgleichung (1) kann also nach Nr. 5 kein oscillatorisches Integral besitzen, da sonst dasselbe von der Differentialgleichung

$$y'' + \frac{1}{4x^2}\, y = 0$$

gelten müsste, deren Integral $y = \sqrt{x}$ nicht oscillatorisch ist. Ebensowenig kann die Gleichung (1) ein oscillatorisches Integral besitzen, wenn

$$\lim x^2 f(x) = \frac{1}{4},$$

dabei aber für grosse Werthe von x die Relation (13) besteht.

7. In erweiterter Gestalt kann man die erhaltenen Resultate darstellen, wenn man davon ausgeht, dass die beliebige Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' + Py' + Qy = 0 \tag{14}$$

vermittelst der Substitution

$$z = y e^{\frac{1}{2}\int P dx}$$

übergeführt werden kann in die binomische Gleichung

$$z'' + z\left(Q - \frac{1}{2} P' - \frac{1}{4} P^2\right) = 0,$$

welche unter die bisher behandelte Gleichung (1) subsumirt werden kann, wenn P, Q, P' stetige Functionen von x sind für grosse Werthe dieser Variabeln. Für solche Werthe verschwindet dann der Quotient $y : z$ sicher nicht, sodass oberhalb einer gewissen Grenze die Nullstellen der Functionen y und z dieselben sind. Man erhält demnach aus den in Nr. 6 erhaltenen Resultaten folgenden Satz:

Sind P, Q, P' für grosse Werthe von x stetige und endliche Functionen dieser Variabeln, ist ferner y ein sammt seinen ersten beiden Ableitungen für grosse Werthe von x endliches und stetiges Integral der Differentialgleichung

$$y'' + Py' + Qy = 0,$$

so ist dasselbe oscillatorisch, wenn

$$\lim_{x=+\infty}\left(\left(Q-\frac{1}{2}P'-\frac{1}{4}P^2\right)x^2\right)>\frac{1}{4},$$

d. h. es verschwindet dann für eine Reihe unbegrenzt wachsender positiver Werthe von x; dagegen ist das Integral y nicht oscillatorisch, wenn

$$\lim_{x=+\infty}\left(\left(Q-\frac{1}{2}P'-\frac{1}{4}P^2\right)x^2\right)<\frac{1}{4},$$

ebenso wenn

$$\lim_{x=+\infty}\left(\left(Q-\frac{1}{2}P'-\frac{1}{4}P^2\right)x^2\right)=\frac{1}{4},$$

dabei aber für grosse Werthe von x die Ungleichung

$$Q-\frac{1}{2}P'-\frac{1}{4}P^2<\frac{1}{4x^2}$$

besteht.

Offenbar gewährt dieser Satz nach einer leichten Transformation Auskunft auch über das Verhalten der Integrale der Gleichung (14) in der Umgebung irgend einer reellen singulären Stelle x_0. Denn führt man als neue unabhängige Variable die Grösse

$$\pm t=\frac{1}{x-x_0}$$

ein, so entsprechen grossen positiven Werthen von t die auf der einen oder andern Seite von x_0 liegenden, wenig von dieser Grösse verschiedenen Werthe von x. Wendet man also unsern Satz zunächst auf die Differentialgleichung an, welche aus der Gleichung (14) durch Einführung der unabhängigen Variabeln t hervorgeht und kehrt dann zur Variabeln x zurück, so erkennt man das Verhalten des Integrals y in der Umgebung des Werthes x_0, sobald ein gewisser aus den Coefficienten der Differentialgleichung und ihren Ableitungen gebildeter Ausdruck für alle von x_0 hinreichend wenig verschiedenen Werthe der Variabeln x entweder stets grösser oder stets kleiner ist als die Grösse $\frac{1}{4}(x-x_0)^2$. Im ersten Falle verschwindet jedes Integral für unzählige reelle Werthe des Arguments x, die von x_0 beliebig wenig verschieden sind, im zweiten Falle tritt dies nicht ein.

Sind die Coefficienten der Differentialgleichung (14) analytische Functionen und zeigen ihre Integrale in der Umgebung der singulären Stelle ein „reguläres" Verhalten, sodass sie sich in der aus der Theorie des Herrn **Fuchs** bekannten Weise durch Potenzen von $x-x_0$ und $\lg(x-x_0)$ ausdrücken lassen, so tritt der erste der obigen beiden Fälle ein bei complexen, der zweite bei reellen Wurzeln der „deter-

minirenden Fundamentalgleichung", welche zur singulären Stelle x_0 gehört. Man kann an diesem Specialfalle leicht die erhaltenen allgemeinen Sätze bestätigen.

III.

8. Die im vorigen Abschnitt benutzte Methode von Sturm kann allem Anschein nach auf Differentialgleichungen von höherer als der zweiten Ordnung nicht ausgedehnt werden; wohl aber gilt dies von den in Nr. 2 durchgeführten Entwicklungen.

Es sei zunächst eine binomische Differentialgleichung beliebiger Ordnung gegeben,

$$y^{(n)} + y f(x) = 0, \tag{15}$$

bei welcher ähnliche Voraussetzungen gemacht werden mögen wie im Abschnitt I für den Fall $n = 2$; die Function $f(x)$, das Integral y und seine ersten n Ableitungen seien für grosse Werthe von x endlich und stetig, und es sei

$$\lim f(x) > 0, \tag{16}$$

wobei der Grenzwerth links endlich oder unendlich sein kann. Dann stellen wir, ähnlich wie im Abschnitt I, die Frage, ob die gegebene Differentialgleichung ein nicht oscillatorisches Integral besitzen kann.

Ein solches Integral y sei etwa für grosse Werthe von x positiv, sodass oberhalb einer gewissen positiven Grenze keine Nullstellen desselben mehr vorkommen. Dann besteht zufolge der Differentialgleichung (15) und der Voraussetzung (16) für grosse Werthe von x die Ungleichung

$$y^{(n)} < 0. \tag{17}$$

Gäbe es nun beliebig grosse Werthe von x, für welche die Grösse $y^{(n-1)}$ negativ wäre, so müsste dieselbe, da sie wegen der Relation (17) für grosse Werthe von x beständig abnimmt, gegen einen negativen endlichen oder unendlichen Grenzwerth convergiren:

$$\lim y^{(n-1)} < 0.$$

Dann ergäbe sich aber durch mehrmalige Anwendung des Satzes (A) sofort

$$\lim y^{(n-2)} = \lim y^{(n-3)} = \cdots = \lim y' = \lim y = -\infty,$$

was der für y eingeführten Voraussetzung widerspricht. Damit ist gezeigt, dass für grosse Werthe von x die Ungleichung

$$y^{(n-1)} \geqq 0 \tag{18}$$

besteht. Wegen der Relation (17) folgt hieraus, dass die Grösse $y^{(n-1)}$ sich beständig abnehmend einer nicht negativen Grenze für $x = +\infty$ annähern muss. Wäre dieselbe positiv, so ergäbe sich durch mehrmalige Benutzung des Satzes (A)

$$\lim y^{(n-2)} = \lim y^{(n-3)} = \cdots = \lim y = +\infty,$$

also wegen der Relation (16) und der Gleichung (15) nach dem Satze (B)

$$\lim y^{(n)} = -\infty;$$

daraus würde abermals nach dem Satze (A) folgen

$$\lim y^{(n-1)} = -\infty,$$

was aber der Relation (18) widerspricht. Somit ergiebt sich

$$\lim y^{(n-1)} = 0. \tag{19}$$

9. Angenommen nun, man hätte statt der Relationen (18) und (19) die allgemeineren

$$y^{(k)} \geqq 0, \tag{20}$$

$$\lim y^{(k)} = 0, \quad 0 < k \leqq n-1, \tag{21}$$

deren erste für grosse Werthe von x gilt, so kann man ähnliche Relationen mit dem Index $k-1$ ableiten. Wäre noch für beliebig grosse Werthe von x die Ungleichung

$$y^{(k-1)} > 0$$

möglich, so ergäbe sich aus der Relation (20)

$$\lim y^{(k-1)} > 0,$$

und hieraus nach dem Satze (A)

$$\lim y^{(k-2)} = \lim y^{(k-3)} = \cdots = \lim y = +\infty,$$

also zufolge der Differentialgleichung (15), der Ungleichung (16) und dem Satze (B)

$$\lim y^{(n)} = -\infty,$$

und durch mehrmalige Anwendung des Satzes (A)

$$\lim y^{(n-1)} = \lim y^{(n-2)} = \cdots = \lim y^{(k)} = -\infty,$$

was der Relation (20) widerspricht. Damit ist gezeigt, dass für grosse Werthe von x immer

$$y^{(k-1)} \leqq 0. \tag{22}$$

Jetzt berücksichtige man, dass die Grösse $y^{(k-1)}$ für grosse Werthe von x niemals abnehmen kann wegen der Ungleichung (20); es existirt also ein nicht positiver Grenzwerth $\lim y^{(k-1)}$. Wäre derselbe negativ, so ergäbe der Satz (A)

$$\lim y^{(k-2)} = \lim y^{(k-3)} = \cdots = \lim y = -\infty,$$

was der für das Vorzeichen der Grösse y getroffenen Voraussetzung widerspricht; also folgt

$$\lim y^{(k-1)} = 0. \tag{23}$$

Aus den Formeln (20) und (21) sind also die ähnlichen (22) und (23) abzuleiten. In derselben Weise würde man aus der Annahme

$$y^{(k)} \leqq 0, \quad \lim y^{(k)} = 0$$

schliessen können

$$y^{(k-1)} \geqq 0, \quad \lim y^{(k-1)} = 0,$$

wobei die Ungleichungen nur für grosse Werthe von x zu nehmen sind.

10. Da nun die Formeln (20) und (21) für $k = n - 1$ in Nr. 8 bewiesen sind, so ergiebt die wiederholte Anwendung der in Nr. 9 erhaltenen Resultate folgende Relationen

$$\lim y^{(n-1)} = \lim y^{(n-2)} = \cdots = \lim y' = \lim y = 0, \tag{24}$$

$$y^{(n-1)} \geqq 0, \quad y^{(n-2)} \leqq 0, \quad y^{(n-3)} \geqq 0, \cdots \tag{25}$$

letztere für grosse Werthe von x mit beständiger Abwechslung der Zeichen $\gtrless$. Welches dieser Zeichen in der letzten, y enthaltenden Formel (25) auftritt, hängt offenbar nur davon ab, ob n eine gerade oder ungerade Zahl ist; im ersteren Falle hätte man

$$y'' \leqq 0, \quad y' \geqq 0, \quad y \leqq 0,$$

was unsrer Voraussetzung widerspricht, dass für grosse Werthe von x die Grösse y positiv sein sollte. Ist also n eine gerade Zahl, so kann die Differentialgleichung (15) nur oscillatorische Integrale besitzen, da die Annahme, es existire ein nicht oscillatorisches, auf einen Widerspruch geführt hat.

Die hiermit erhaltenen Ergebnisse formuliren wir in folgendem Theorem.

Wenn die Function $f(x)$ für grosse Werthe von x endlich und stetig ist und die Ungleichung

$$\lim_{x=+\infty} f(x) > 0$$

besteht, so hat die Differentialgleichung

$$y^{(n)} + y f(x) = 0$$

bei geraden Werthen von n nur oscillatorische Integrale d. h. jedes sammt seinen ersten n Ableitungen für grosse Werthe von x endliche und stetige Integral muss noch oberhalb jeder positiven Grenze Nullstellen besitzen.

Ist n eine ungerade Zahl und das Integral y nicht oscillatorisch, so bestehen die Gleichungen

$$\lim_{x=+\infty} y^{(n)} = \lim_{x=+\infty} y^{(n-1)} = \cdots = \lim_{x=+\infty} y' = \lim_{x=+\infty} y = 0$$

und für grosse Werthe von x sind die Grössen $y, y', \ldots y^{(n-1)}, y^{(n)}$ abwechselnd beständig positiv und beständig negativ.

IV.

11. Das erhaltene Resultat kann nach verschiedenen Richtungen hin verallgemeinert werden. Wir betrachten zunächst statt der binomischen die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left[g_{n-1}\frac{d}{dx}\left\{g_{n-2}\frac{d}{dx}\left(g_{n-3}\cdots\frac{d}{dx}\left(g_1\frac{dy}{dx}\right)\cdots\right)\right\}\right]+yf(x)=0,$$

welche genauer in folgender Weise definirt wird. Man setze für jeden Werth von k

$$Y_k = g_k(x)\frac{dY_{k-1}}{dx}, \quad (k = 1, 2, \ldots n-1)$$

ferner

$$Y_0 = y, \quad Y_n = \frac{dY_{n-1}}{dx},$$

dann lautet die gegebene Gleichung

$$Y_n + yf(x) = 0; \tag{26}$$

dabei seien $f(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$, $\ldots$ $g_{n-1}(x)$ für grosse Werthe des Arguments endliche und stetige Functionen von x. Dann lassen sich die Entwicklungen des vorigen Abschnitts auf die Gleichung (26) im Wesentlichen übertragen, wenn man folgende Voraussetzungen einführt:

$$\lim f(x) > 0, \quad \lim \frac{1}{g_k(x)} > 0, \quad (k = 1, 2, \ldots n-1). \tag{27}$$

Wäre nämlich y ein nicht oscillatorisches, etwa für grosse Werthe von x stets positives Integral, von dem wir ferner annehmen, es sei sammt seinen ersten n Ableitungen für grosse Werthe von x endlich und stetig, so wäre der Differentialgleichung (26) zufolge die Grösse Y_n oder, was dasselbe ist, $\frac{dY_{n-1}}{dx}$ für grosse Werthe von x stets negativ, sodass für diese Werthe Y_{n-1} eine stets abnehmende Function ist. Könnte dieselbe nun oberhalb jeder positiven Grenze noch negativ werden, so hätte man $\lim Y_{n-1} < 0$ oder

$$\lim\left\{g_{n-1}(x)\frac{dY_{n-2}}{dx}\right\} < 0,$$

woraus nach einer der Formeln (27) und dem Satze (B) folgen würde

$$\lim\frac{1}{g_{n-1}(x)}\cdot\lim\left\{g_{n-1}(x)\frac{dY_{n-2}}{dx}\right\} < 0, \quad \lim\frac{dY_{n-2}}{dx} < 0.$$

Hieraus ergäbe sich nach dem Satze (A)

$$\lim Y_{n-2} = -\infty = \lim\left\{g_{n-2}(x)\frac{dY_{n-3}}{dx}\right\};$$

dann abermals nach dem Satze (B) und einer Formel (27)

$$\lim\frac{1}{g_{n-2}(x)}\cdot\lim\left\{g_{n-2}(x)\frac{dY_{n-3}}{dx}\right\} = \lim\frac{dY_{n-3}}{dx} = -\infty,$$

und nach dem Satze (A)

$$\lim Y_{n-3} = -\infty.$$

So fortschliessend erhielte man die Gleichungen

$$\lim Y_{n-2} = \lim Y_{n-3} = \cdots = \lim Y_1 = \lim Y_0 = \lim y = -\infty,$$

was aber der für das Zeichen der Grösse y getroffenen Festsetzung widerspricht. Für grosse Werthe von x ist also nothwendig

(28) $$Y_{n-1} \geqq 0.$$

12. Weiss man allgemeiner, dass für grosse Werthe von x die Ungleichung

(29) $$Y_k \geqq 0$$

besteht, so kann man eine entsprechende Formel für Y_{k-1} ableiten. Könnte diese Grösse nämlich oberhalb jeder positiven Grenze noch positive Werthe annehmen, so müsste sie wegen der Gleichung

$$\frac{dY_{k-1}}{dx} = \frac{Y_k}{g_k(x)}$$

und der Formel (29) beständig zunehmen oder doch nicht abnehmen für grosse Werthe von x, woraus sich ergeben würde

$$\lim Y_{k-1} > 0, \quad \lim \left\{ g_{k-1}(x) \frac{dY_{k-2}}{dx} \right\} > 0.$$

Hieraus könnte man genau so wie bei der entsprechenden Entwicklung in Nr. 11 vermittelst der Formeln (27) und der Sätze (A) und (B) schliessen:

$$\lim Y_{k-2} = \lim Y_{k-3} = \cdots = \lim Y_1 = \lim y = +\infty,$$

also wegen der Differentialgleichung (26)

$$\lim Y_n = \lim \frac{dY_{n-1}}{dx} = -\infty,$$

was aber wegen des Satzes (A) mit der Formel (28) nicht zu vereinbaren ist. Für grosse Werthe von x besteht demnach die Ungleichung

(30) $$Y_{k-1} \leqq 0$$

bei Annahme der Formel (29).

Weiss man andrerseits, dass für grosse Werthe von x die Formel

$$Y_k \leqq 0$$

besteht, so würde sich für dieselben Werthe des Arguments ergeben

$$Y_{k-1} \geqq 0$$

in derselben Weise, wie die Formel (30) aus der Formel (29) abgeleitet wurde. Da nun letztere für $k = n - 1$ in Nr. 11 bewiesen ist, so sind die Grössen

$$Y_n, \; Y_{n-1}, \; \ldots \; Y_1, \; Y_0 = y$$

für grosse Werthe von x abwechselnd beständig negativ und beständig positiv; bei geraden Werthen der Zahl n hätten also die Grössen Y_n

und y dasselbe Zeichen, was offenbar der Differentialgleichung (26) widerspricht. Da somit die Annahme, es existire ein nicht oscillatorisches Integral der Differentialgleichung (26), auf einen Widerspruch geführt hat, so kann man das in Nr. 10 aufgestellte Theorem dahin erweitern,

dass auch die Differentialgleichung n^{ter} Ordnung

$$\frac{d}{dx}\left[g_{n-1}(x)\frac{d}{dx}\left\{g_{n-2}(x)\frac{d}{dx}\left(\cdots\frac{d}{dx}\left(g_1(x)\frac{dy}{dx}\right)\cdots\right)\right\}\right]+yf(x)=0$$

bei der Voraussetzung

$$\lim_{x=+\infty} f(x)>0,\qquad \lim_{x=+\infty}\frac{1}{g_k(x)}>0\qquad (k=1,2,\ldots n-1)$$

nur oscillatorische Integrale besitzt, wenn n eine gerade Zahl ist.

Auch der auf ungerade Werthe von n bezügliche Theil des citirten Theorems kann leicht auf den soeben behandelten allgemeineren Fall ausgedehnt werden.

13. Eine noch weitere Verallgemeinerung, auf die nur eben hingewiesen werden möge, ergiebt sich unmittelbar, wenn man beachtet, dass in den Nrn. 11 und 12 die lineare Form der gegebenen Differentialgleichung nur dazu dient, zu zeigen, dass für grosse Werthe von x ein positiver oder negativer Werth von y einen negativen bezw. positiven Werth von Y_n ergiebt, und dass einem für $x=+\infty$ unbegrenzt wachsenden Werthe der Grösse y ein ebensolcher der Grösse Y_n entspricht. Auf Differentialgleichungen, bei welchen diese Beziehungen zwischen y und Y_n erhalten bleiben, kann man demnach die obigen Entwicklungen übertragen, z. B. auf die Gleichung

$$Y_n+yf_1(x)+y^3f_2(x)+y^5f_3(x)+\cdots=0,$$

in welcher die Functionen $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... denselben Bedingungen unterworfen sind wie oben $f(x)$, und Y_n wie bisher definirt ist.

14. Eine andere Erweiterung des Satzes in Nr. 12 ergiebt die einfache Substitution

$$x=t^\lambda,\qquad \lambda>0.$$

Führt man die Variable t in die Grössen y, Y ein, so erhält man folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
Y_1&=\frac{1}{\lambda}\,g_1(t^\lambda)\,t^{1-\lambda}\,\frac{dy}{dt},\\
Y_k&=\frac{1}{\lambda}\,g_k(t^\lambda)\,t^{1-\lambda}\,\frac{dY_{k-1}}{dt},\\
Y_n&=\frac{1}{\lambda}\,t^{1-\lambda}\,\frac{dY_{n-1}}{dt},\\
Y_n&+yf(t^\lambda)=0.
\end{aligned}$$

Setzt man also allgemein

$$\gamma_k(t) = \frac{1}{\lambda} g_k(t^\lambda) t^{1-\lambda}, \quad \lambda t^{\lambda-1} f(t^\lambda) = \varphi(t)$$

so hat man das Gleichungssystem

$$Y_1 = \gamma_1(t)\frac{dy}{dt}, \quad Y_k = \gamma_k(t)\frac{dY_{k-1}}{dt}, \qquad (k=1, 2, \ldots n-1)$$

und die Differentialgleichung

$$(31) \qquad \frac{dY_{n-1}}{dt} + y\,\varphi(t) = 0,$$

in einer Form, die aus der Gleichung (26) hervorgeht, indem man nur die Zeichen x, g, f durch t, γ, φ ersetzt. Für die Differentialgleichung (30) gilt also das Theorem in Nr. 12, wenn die Functionen γ, φ für grosse Werthe von t stetig sind, und folgende Ungleichungen bestehen:

$$(32) \qquad \lim_{t=+\infty} \varphi(t) > 0, \quad \lim_{t=+\infty} \frac{1}{\gamma_k(t)} > 0, \quad k = 1, 2, \ldots n-1.$$

15. Diesen Bedingungen wird genügt, sobald die Functionen f, g dieselben Stetigkeitseigenschaften haben wie bisher, den Beschränkungen (27) aber nicht in vollem Umfange unterworfen sind. Statt dieser führen wir folgende allgemeinere Relationen ein:

$$\lim \left(x^\alpha f(x)\right) > 0, \quad \lim \frac{x^{\beta_k}}{g_k(x)} > 0, \quad \alpha \geqq 0, \ \beta_k \geqq 0.$$

Dann besteht offenbar die Gleichung

$$\lim_{t=+\infty} \frac{1}{\gamma_k(t)} = \lim_{t=+\infty} \frac{\lambda t^{\lambda-1}}{g_k(t^\lambda)} = \lim_{t=+\infty} \frac{\lambda x^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}}{g_k(x)}$$

wobei für die Potenz mit gebrochenem Exponenten natürlich ihr reeller Werth zu nehmen ist; die Bedingungsgleichung

$$\lim_{t=+\infty} \frac{1}{\gamma_k(t)} > 0$$

ist also dann und nur dann erfüllt, wenn

$$(33) \qquad \frac{\lambda-1}{\lambda} \geqq \beta_k.$$

Ebenso hat man

$$\lim_{t=+\infty} \varphi(t) = \lim_{t=+\infty} \lambda t^{\lambda-1} f(t^\lambda) > 0,$$

sobald die Ungleichung

$$(34) \qquad \frac{\lambda-1}{\lambda} \geqq \alpha$$

besteht.

Aus den Formeln (33) und (34) folgt zunächst, dass α und β_k

positive echte Brüche sein müssen; sind sie als solche beliebig gegeben, so kann eine positive Grösse λ so bestimmt werden, dass die genannten beiden Ungleichungen bestehen; dazu genügt es, dass der reciproke Werth $1:\lambda$ kleiner sei als die kleinste der Differenzen $1-\alpha$, $1-\beta_k$. Ist die Grösse λ in dieser Weise bestimmt, so bestehen die Ungleichungen (32), und die Differentialgleichung (31) hat nach Nr. 12 nur oscillatorische Integrale. Dasselbe gilt dann von der Gleichung (26), durch deren Transformation die Gleichung (31) erhalten wurde. Damit ist das folgende gegenüber Nr. 12 allgemeinere Theorem bewiesen:

Sind in der linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung

$$\frac{d}{dx}\left[g_{n-1}(x)\frac{d}{dx}\left\{g_{n-2}(x)\frac{d}{dx}\left(\cdots\frac{d}{dx}\left(g_1(x)\frac{dy}{dx}\right)\cdots\right)\right\}\right]+yf(x)=0$$

die Functionen f, g für grosse Werthe von x endlich stetig und positiv, ist n eine gerade Zahl, und bestehen die Ungleichungen

$$0\leqq\alpha<1,\quad 0\leqq\beta_k<1,\quad (k=1,2,\ldots n-1)$$

$$\lim_{x=+\infty}\left(x^{\alpha}f(x)\right)>0,\qquad \lim_{x=+\infty}\frac{x^{\beta_k}}{g_k(x)}>0,$$

so ist jedes sammt seinen ersten n Ableitungen für grosse Werthe von x endliche und stetige Integral y oscillatorisch, d. h. es besitzt reelle Nullstellen oberhalb jeder positiven Grenze.

V.

16. Um für Differentialgleichungen von höherer als der zweiten Ordnung den Fall $\lim f(x)=0$ in weiterem Umfang untersuchen zu können, als im Abschnitt IV geschehen ist, müssen eine Reihe einfacher Hülfssätze aus der Differentialrechnung vorausgeschickt werden.

Die Function $\varphi(x)$ sei für grosse Werthe von x sammt ihrer Ableitung $\varphi'(x)$ endlich und stetig, und nähere letztere sich für $x=+\infty$ einer bestimmten, endlichen oder unendlichen Grenze. Dann besteht, sobald x und x_0 hinlänglich grosse Werthe bedeuten, von denen der zweite der kleinere sei, die Gleichung

$$\varphi(x)-\varphi(x_0)=(x-x_0)\,\varphi'(\xi)$$

wobei man hat

$$x_0\leqq\xi\leqq x.$$

Wenn nun zunächst $\lim\varphi'(x)=g$ eine endliche Grösse und ε ein beliebig klein gegebener positiver Werth ist, so fixire man x_0 so gross, dass für alle Werthe der Variabeln x, welche nicht kleiner als x_0 sind, der Werth $\varphi'(x)$ zwischen die Grenzen $g\pm\varepsilon$ fällt. Dann gehört diesem Intervall auch der Werth $\varphi'(\xi)$ an, wie gross auch immer das Argument x gewählt werden möge. Man kann nun eine

positive Grösse $\gamma > x_0$ so wählen, dass für alle Werthe der Variabeln x, die nicht kleiner als γ sind, der Bruch $(x - x_0) : x$ von der Einheit so wenig wie man will verschieden und die Grösse $\varphi(x_0) : x$ beliebig klein ist; dann liegt die rechte Seite der Gleichung

$$\frac{\varphi(x)}{x} = \frac{\varphi(x_0)}{x} + \frac{x - x_0}{x}\,\varphi'(\xi)$$

in einem Intervall, welches von dem durch $g \pm \varepsilon$ begrenzten so wenig wie man will verschieden ist. Für $x \geqq \gamma$ unterscheidet sich also, da ε beliebig klein gegeben war, die linke Seite so wenig wie man will von g, d. h. es ist

$$\lim \frac{\varphi(x)}{x} = g = \lim \varphi'(x),$$

womit gleichzeitig die Existenz und die Grösse des links stehenden Grenzwerthes nachgewiesen ist.

Hat man abweichend von der bisherigen Voraussetzung

$$\lim \varphi'(x) = +\infty,$$

so braucht in obiger Argumentation nur an Stelle des durch $g \pm \varepsilon$ begrenzten ein Intervall zu treten, das von einem beliebig gross gegebenen Werth η bis $+\infty$ reicht; analoges gilt für $\lim \varphi'(x) = -\infty$. Damit ist das folgende von den Herren Rouquet und Stolz (Math. Annalen Bd. XV, S. 556) auf andere Art erhaltene Resultat bewiesen.

Erstes Lemma. Ist die Function $\varphi(x)$ sammt ihrer ersten Ableitung $\varphi'(x)$ für grosse Werthe des Arguments endlich und stetig und hat letztere bei unbegrenzt wachsenden Werthen von x einen bestimmten Grenzwerth, so gilt dasselbe vom Quotienten $\varphi(x) : x$ und es besteht die Gleichung

$$\lim \varphi'(x) = \lim \frac{\varphi(x)}{x}.$$

17. Hieraus ergiebt sich nach der von Herrn Stolz a. a. O. angegebenen Beweismethode folgendes

Zweites Lemma. Sind die Functionen $\psi(x)$, $\vartheta(x)$ sammt ihren ersten Ableitungen für grosse Werthe von x endlich und stetig, convergirt ferner der Quotient $\psi'(x) : \vartheta'(x)$ bei unbegrenzt wachsenden Werthen von x gegen einen bestimmten Grenzwerth, die Function $\vartheta(x)$ aber beständig wachsend gegen den Grenzwerth $+\infty$, indem ihre Ableitung für grosse Werthe von x positiv bleibt, so existirt auch für $x = +\infty$ ein bestimmter Grenzwerth des Quotienten $\psi(x) : \vartheta(x)$ und es ist

$$\lim \frac{\psi(x)}{\vartheta(x)} = \lim \frac{\psi'(x)}{\vartheta'(x)}.$$

Denn zufolge der über das Wachsthum der Function $\vartheta(x)$ getroffenen Festsetzung kann, wenn man $y = \vartheta(x)$ setzt, für grosse Werthe von y

auch umgekehrt die Variable x als eindeutige Function von y betrachtet werden, die nebst ihrer Ableitung stetig ist; setzt man etwa $x = \chi(y)$, so ist

$$\frac{\psi(x)}{\vartheta(x)} = \frac{\psi(\chi(y))}{y} = \frac{\varphi(y)}{y}, \tag{35}$$

wobei die Function $\varphi(y)$ sowie ihre Ableitung

$$\varphi'(y) = \psi'(\chi(y))\,\chi'(y)$$

für grosse Werthe von y endlich und stetig ist. Da nun wegen der Gleichung

$$\varphi'(y) = \frac{\psi'(\chi(y))}{\vartheta'(x)} = \frac{\psi'(x)}{\vartheta'(x)} \tag{36}$$

ein Grenzwerth $\lim\limits_{y=+\infty} \varphi'(y)$ existirt, so ist nach dem ersten Lemma

$$\lim_{y=+\infty} \frac{\varphi(y)}{y} = \lim_{y=+\infty} \varphi'(y),$$

also mit Berücksichtigung der Gleichungen (35) und (36)

$$\lim \frac{\psi(x)}{\vartheta(x)} = \lim \frac{\psi'(x)}{\vartheta'(x)}.$$

18. Drittes Lemma. Ist die Function $\varphi(x)$ nebst ihrer ersten Ableitung für kleine nicht negative Werthe von x endlich und stetig und ist

$$\lim_{x=+0} \varphi(x) = 0,$$

so besteht die Gleichung

$$\lim_{x=+0} \frac{\varphi(x)}{x} = \lim_{x=+0} \varphi'(x) = \varphi'(0).$$

Von diesem evidenten Satze ausgehend beweisen wir nach der in Nr. 17 angewandten Methode folgendes

Viertes Lemma. Es seien $\psi(x)$, $\vartheta(x)$ zwei Functionen, welche sammt ihren ersten Ableitungen für grosse Werthe von x endlich und stetig sind und den Gleichungen

$$\lim \psi(x) = \lim \vartheta(x) = 0$$

genügen; die Function $\vartheta'(x)$ sei für grosse Werthe von x beständig negativ. Es existire ferner ein bestimmter Grenzwerth $\lim\,[\psi'(x) : \vartheta'(x)]$; dann giebt es auch für $x = +\infty$ einen bestimmten Grenzwerth des Quotienten $\psi(x) : \vartheta(x)$ und es ist

$$\lim \frac{\psi(x)}{\vartheta(x)} = \lim \frac{\psi'(x)}{\vartheta'(x)}.$$

Denn setzt man

$$\vartheta(x) = y, \quad x = \chi(y),$$

so ist für alle hinreichend kleinen positiven Werthe von y die Function $\chi(y)$ endlich, eindeutig und stetig; dasselbe gilt von ihrer ersten Ableitung

$$\chi'(y) = \frac{1}{\vartheta'(x)}.$$

Setzt man ferner

(37) $$\psi(x) = \psi\big(\chi(y)\big) = \varphi(y), \quad \frac{\psi(x)}{\vartheta(x)} = \frac{\varphi(y)}{y},$$

so ist offenbar φ eine Function derselben Beschaffenheit wie χ und es besteht die Gleichung

$$\lim \psi(x) = \lim_{y=+0} \varphi(y) = 0.$$

Ebenso ist auch die Grösse

(38) $$\varphi'(y) = \psi'\big(\chi(y)\big)\,\chi'(y) = \frac{\psi'(x)}{\vartheta'(x)}$$

für hinreichend kleine positive Werthe der Variabeln y endlich, stetig und eindeutig und hat, da die Grenzübergänge $x = +\infty$ und $y = +0$ einander bedingen, für $y = +0$ einen bestimmten Grenzwerth. Man kann demnach auf die Function $\varphi(y)$ das dritte Lemma anwenden; es existirt der Grenzwerth

$$\lim_{y=+0} \frac{\varphi(y)}{y} = \lim_{y=+0} \varphi'(y).$$

Daraus folgt auf Grund der Gleichungen (37) und (38)

$$\lim \frac{\psi'(x)}{\vartheta'(x)} = \lim \frac{\psi(x)}{\vartheta(x)},$$

womit zugleich die Existenz des Grenzwerthes rechts nachgewiesen ist.

VI.

19. Die bewiesenen Hülfssätze gestatten nun, über die Integrale der Gleichung

(39) $$y^{(n)} + y f(x) = 0$$

Sätze von derselben Form wie in den Abschnitten III und IV für gewisse dort noch ausgeschlossene Fälle abzuleiten. Es sei wiederum $f(x)$ eine für grosse Werthe von x endliche, stetige und positive Function, und es sei

$$\lim f(x) = 0.$$

In den früheren Abschnitten ist der Fall behandelt, dass die Function $f(x)$ in geringerer als der ersten Ordnung unendlich klein wird für $x = +\infty$; jetzt möge allgemeiner angenommen werden, dass sie

verschwindet wie irgend eine Potenz von x mit negativem Exponenten; es sei etwa a eine positive Constante und

$$f(x) = \frac{a}{x^\sigma}\big(1 + \varepsilon(x)\big), \quad \lim \varepsilon(x) = 0, \quad \sigma > 0.$$

Wir untersuchen dann wie früher die Consequenzen, die man aus der Annahme eines nicht oscillatorischen Integrals der Gleichung (39) ziehen kann.

Ein solches Integral sei y; d. h. dasselbe sei für grosse Werthe von x etwa beständig positiv, endlich und stetig; letztere beide Eigenschaften seien auch für die ersten n Ableitungen von y vorausgesetzt. Dann muss auch jede der Ableitungen $y', y'', \ldots y^{(n-1)}$ für grosse Werthe von x ein constantes Zeichen bewahren; denn kämen bei einer dieser Grössen noch oberhalb jeder positiven Grenze Nullstellen vor, so läge zwischen je zwei aufeinanderfolgenden derselben nach dem Theorem von Rolle eine Nullstelle ihrer Ableitung; diese wäre also ebenfalls oscillatorischen Charakters, das gleiche gälte von ihrer Ableitung u. s. f., schliesslich auch von $y^{(n)}$, während doch aus der Differentialgleichung (39) evident ist, dass diese Grösse für grosse Werthe von x negativ ist. Jede der Grössen $y, y', y'', \ldots y^{(n-1)}$ hat also eine Ableitung, deren Vorzeichen für grosse Werthe von x constant ist; daraus folgt unmittelbar die Existenz der Grenzwerthe

$$\lim y, \ \lim y', \ \lim y'', \ldots \lim y^{(n-1)}.$$

20. Jetzt sei r eine der Zahlen $0, 1, 2, n-1$; aus der Existenz des $\lim y^{(r)}$ folgt dann für $r > 0$ nach dem zweiten Lemma, indem man

$$\psi(x) = y^{(r-1)}, \qquad \vartheta(x) = x$$

setzt,

$$\lim y^{(r)} = \lim \frac{y^{(r-1)}}{x}.$$

Setzt man weiter im zweiten Lemma

$$\psi(x) = y^{(r-2)}, \quad \vartheta(x) = \frac{1}{2}x^2,$$

so ergiebt sich

$$\lim y^{(r)} = \lim \frac{y^{(r-1)}}{x} = \lim \frac{y^{(r-2)}}{\frac{1}{2}x^2};$$

ebenso fortschreitend erhält man für jede ganze Zahl k, die nicht grösser als r ist,

$$\lim y^{(r)} = \lim \frac{x^{(r-k)}k!}{x^k} = \lim \frac{y\,r!}{x^r},$$

wobei stets auch die Existenz der neu auftretenden Grenzwerthe durch das zweite Lemma gewährleistet wird. Mit Berücksichtigung der Gleichung (39) erhält man endlich

$$(40)\qquad \lim y^{(r)} = -\lim \frac{ar!\,y^{(n)}}{x^{r-\sigma}},$$

eine Formel, die offenbar für $r = 0$ gültig bleibt.

Wenn speciell σ eine der Zahlen $1, 2, \ldots n-1$ ist, so kann man in dieser Gleichung $r = \sigma$ setzen; sie wird dann

$$\lim y^{(r)} = -\lim (ar!\,y^{(n)}),$$

woraus die Existenz von $\lim y^{(n)}$ folgt.

Dasselbe Resultat ergiebt sich aber für beliebige Werthe von σ, die der Ungleichung

$$(41)\qquad 1 \leqq \sigma < n$$

genügen. Man kann dann setzen

$$\sigma = s + \varrho, \qquad 0 \leqq \varrho < 1,$$

wenn s eine der Zahlen $1, 2, \ldots n-1$ ist, und die Gleichung (40) ergiebt

$$\lim y^{(s)} = -as!\,\lim \frac{y^{(n)}}{x^{-\varrho}}\cdot$$

Da nun $1-\varrho$ eine positive Zahl, also $x^{1-\varrho}$ eine beständig mit x zunehmende Function ist, deren Ableitung nicht verschwindet, so kann man im zweiten Lemma setzen

$$\psi(x) = y^{(n-1)}, \quad \vartheta(x) = \frac{x^{1-\varrho}}{1-\varrho},$$

und erhält dann

$$\lim \frac{y^{(n)}}{x^{-\varrho}} = (1-\varrho)\lim \frac{y^{(n-1)}}{x^{1-\varrho}}\cdot$$

Ebenso indem man

$$\psi(x) = y^{(n-2)}, \quad \vartheta(x) = \frac{x^{2-\varrho}}{2-\varrho}$$

setzt, ergiebt sich

$$\lim \frac{y^{(n-1)}}{x^{1-\varrho}} = (2-\varrho)\lim \frac{y^{(n-2)}}{x^{2-\varrho}};$$

so kann man fortschliessen, indem immer auch die Existenz der neu auftretenden Grenzwerthe durch das zweite Lemma gesichert ist; schliesslich ergiebt sich

$$\lim \frac{y^{(n)}}{x^{-\varrho}} = (1-\varrho)\lim \frac{y^{(n-1)}}{x^{1-\varrho}} = (1-\varrho)(2-\varrho)\lim \frac{y^{(n-2)}}{x^{2-\varrho}} = \cdots$$
$$= (1-\varrho)(2-\varrho)\cdots(n-\varrho)\lim \frac{y}{x^{n-\varrho}},$$

also mit Benutzung der Differentialgleichung (34)

$$\lim \frac{y^{(n)}}{x^{-\varrho}} = -a(1-\varrho)(2-\varrho)\cdots(n-\varrho)\lim \frac{y^{(n)}}{x^{n-\sigma-\varrho}}\cdot$$

Da nun rechts alle eingeklammerten Factoren positiv sind ebenso wie a,

so sind die Grenzwerthe rechts und links entgegengesetzten Zeichens; die Grössen, die gegen sie convergiren sind aber positiv; beides ist nur dadurch zu vereinigen, dass die Grenzwerthe $= 0$ sind. Man hat demnach

$$\lim \frac{y^{(n)}}{x^{-\varrho}} = 0,$$

und, da ϱ eine positive Grösse ist, a fortiori

$$(42) \qquad \lim y^{(n)} = 0$$

21. Ersetzt man jetzt die Voraussetzung (41) durch die engere

$$(43) \qquad 1 \leqq \sigma \leqq n - 1,$$

so kann man in der Formel (40) annehmen $r \geqq \sigma$; dann convergirt der Bruch $y^{(n)} : x^{r-\sigma}$ gegen Null für $x = +\infty$, und die Formel (40) ergiebt

$$(44) \qquad \lim y^{(r)} = 0, \qquad r \geqq \sigma.$$

Nimmt man weiter an

$$r < \sigma, \quad 0 < \sigma - r \leqq 1,$$

so reducirt sich das Integral

$$\int x^{r-\sigma} dx$$

entweder auf $\lg x$, oder auf eine Potenz von x mit positivem gebrochenem Exponenten, convergirt also jedenfalls mit wachsenden Werthen von x gegen den Grenzwerth $+\infty$, während ihre Ableitung positiv bleibt; man kann also im zweiten Lemma setzen

$$\psi(x) = y^{(n-1)}, \quad \vartheta(x) = \int x^{r-\sigma} dx$$

und erhält demgemäss

$$\lim \frac{y^{(n)}}{x^{r-\sigma}} = \lim \frac{y^{(n-1)}}{\int x^{r-\sigma} dx}.$$

Nun ergiebt sich aus der Formel (44) bei der Annahme (43) stets

$$\lim y^{(n-1)} = 0$$

also folgt

$$\lim \frac{y^{(n)}}{x^{r-\sigma}} = 0$$

und wegen der Formel (40)

$$\lim y^{(r)} = 0, \qquad 0 < \sigma - r \leqq 1.$$

Bei der Annahme (43) *hat man also*

$$\lim y^{(r)} = 0$$

sobald die Ungleichung

$$\sigma - r \leqq 1$$

besteht.

22. Ganz anders gestaltet sich die Untersuchung des Falles $\sigma - r > 1$. Dann ist $x^{r-\sigma+1}$ eine bei wachsenden Werthen von x beständig abnehmende und gegen Null convergirende Function; ferner hat man nach Nr. 21

$$\lim y^{(n-1)} = 0,$$

und der $\lim \frac{y^{(n)}}{x^{r-\sigma}}$ ist nach Gleichung (40) bestimmt; man kann also im vierten Lemma setzen

$$\psi(x) = y^{(n-1)}, \qquad \vartheta(x) = x^{r-\sigma+1}$$

und erhält dann die Gleichungen

$$\lim \frac{y^{(n)}}{(r-\sigma+1)\,x^{r-\sigma}} = \lim \frac{y^{(n-1)}}{x^{r-\sigma+1}},$$

$$\lim \frac{y^{(n)}}{x^{r-\sigma}} = (r-\sigma+1) \lim \frac{y^{(n-1)}}{x^{r-\sigma+1}}.$$

Wenn nun auch $r - \sigma + 2$ noch eine negative Zahl ist und

$$n - 2 \geqq \sigma - 1,$$

so hat man nach Nr. 21

$$\lim y^{(n-2)} = 0, \quad \lim x^{r-\sigma+2} = 0$$

und die letztere Function hat eine für grosse Werthe von x negative Ableitung; man kann also im vierten Lemma setzen

$$\psi(x) = y^{(n-2)}, \quad \vartheta(x) = x^{r-\sigma+2}$$

und erhält dann, da $\lim (y^{(n-1)} : x^{r-\sigma+1})$ eine bestimmte Grösse ist,

$$\lim \frac{y^{(n-1)}}{x^{r-\sigma+2}} = (r-\sigma+2) \lim \frac{y^{(n-2)}}{x^{r-\sigma+2}},$$

$$\lim \frac{y^{(n)}}{x^{r-\sigma}} = (r-\sigma+1)(r-\sigma+2) \lim \frac{y^{(n-2)}}{x^{r-\sigma+2}}.$$

In dieser Weise fortschliessend erhält man die allgemeine Formel

$$\lim \frac{y^{(n)}}{x^{r-\sigma}} = (r-\sigma+1)(r-\sigma+2)\cdots(r-\sigma+k) \lim \frac{y^{(n-k)}}{x^{r-\sigma+k}} \tag{45}$$

unter den Bedingungen

$$n - k \geqq \sigma - 1, \quad r - \sigma + k < 0, \tag{46}$$

die für die Anwendbarkeit des vierten Lemmas wesentlich sind.

Wir untersuchen nun, bei welchem Werthe k die Bedingungen (46) zum letzten Mal beide erfüllt sind. Setzt man, unter s eine positive ganze Zahl verstehend,

$$\sigma = s + \varrho, \quad 0 \leqq \varrho < 1,$$

so ist unter der Voraussetzung $\varrho > 0$ die zweite Bedingung (46)

$$r - s + k - \varrho < 0$$

zum letzten Male erfüllt, wenn

$$r - s + k = 0, \quad k = s - r = k_1$$

wenn aber $\varrho = 0$, so ist sie zum letzten Male erfüllt für den Werth

$$k = k_1 = s - r - 1, \quad r - s + k_1 = -1.$$

Es fragt sich, ob für diese Werthe von k die erste Bedingung (46) erfüllt ist. Dies fordert im Falle $\varrho > 0$ die Ungleichung

$$n - s + r \geqq s + \varrho - 1$$

also, da links eine ganze Zahl steht,

$$n - s + r > s - 1; \tag{47}$$

im Falle $\varrho = 0$ erhält man

$$n - s + r + 1 \geqq s - 1. \tag{48}$$

Diese beiden Ungleichungen bestehen aber wirklich für alle Werthe $r = 0, 1, 2, \ldots$, wenn man voraussetzt, was von jetzt an geschehen soll

$$n \geqq 2\sigma; \tag{49}$$

denn hieraus folgt für $\varrho > 0$ die Ungleichung

$$n \geqq 2s + 2\varrho, \quad n > 2s,$$

womit die Formel (47) bewiesen ist; im Falle $\varrho = 0$ aber hat man

$$s = \sigma, \quad n > 2s - 2,$$

womit die Formel (48) gesichert ist. Dabei ist für $\varrho > 0$

$$\begin{aligned} n - k_1 &= n - s + r \\ &\geqq 2\sigma - s + r \\ &\geqq \sigma + \varrho + r, \quad n - k_1 - 1 \geqq \sigma - 1 \end{aligned}$$

und für $\varrho = 0$

$$\begin{aligned} n - k_1 &= n - s + r + 1 \\ &\geqq \sigma + r + 1, \quad n - k_1 - 1 \geqq \sigma; \end{aligned}$$

nach Nr. 21 hat man also in beiden Fällen

$$\lim y^{(n-k_1-1)} = 0. \tag{50}$$

23. Die Formel (45) für $k = k_1$ ergiebt nun die Bestimmtheit des Grenzwerthes

$$\lim \frac{y^{(n-k_1)}}{x^{r-\sigma+k_1}};$$

der Exponent des Nenners ist hier zufolge den obigen Werthen von k_1 entweder $= -1$ oder $= -\varrho$, je nachdem man hat $\varrho = 0$ oder $\varrho > 0$. Im ersten Falle ergiebt sich jetzt aus dem zweiten Lemma

$$\lim \frac{y^{(n-k_1)}}{x^{r-\sigma+k_1}} = \lim \frac{y^{(n-k_1)}}{x^{-1}} = \lim \frac{y^{(n-k_1-1)}}{\lg x},$$

da die Function $\lg x$ offenbar die Eigenschaften der in dem genannten

Lemma auftretenden Function $\vartheta(x)$ besitzt. Im Falle $\varrho > 0$ hat man dagegen

$$\lim \frac{y^{(n-k_1)}}{x^{r-\sigma+k_1}} = \lim \frac{y^{(n-k_1)}}{x^{-\varrho}} = \lim \frac{(1-\varrho)\, y^{(n-k_1-1)}}{x^{1-\varrho}}$$

ebenfalls auf Grund des zweiten Lemmas, da $x^{1-\varrho}$ eine mit x unbegrenzt zunehmende Function ist. Mit Berücksichtigung der Gleichung (50) folgt in beiden Fällen

$$\lim \frac{y^{(n-k_1)}}{x^{r-\sigma+k_1}} = 0$$

also auf Grund der für $k = k_1$ genommenen Formel (45)

$$\lim \frac{y^{(n)}}{x^{r-\sigma}} = 0,$$

oder mit Benutzung der für jeden Werth von r gültigen Formel (40)

$$\lim y^{(r)} = 0.$$

Verbindet man hiermit das in Nr. 21 formulirte Resultat, so sieht man, *dass bei der Annahme* (49) *die folgenden Gleichungen bestehen*

$$\lim y^{(n)} = \lim y^{(n-1)} = \cdots = \lim y' = \lim y = 0.$$

Bedenkt man nun, dass nach Nr. 19 jede der Grössen $y, y', \ldots y^{(n}$ für grosse Werthe von x ein constantes Vorzeichen besitzt, dass also die ersten n unter ihnen entweder beständig abnehmen oder beständig zunehmen müssen bei wachsenden Werthen des Arguments, so sieht man leicht, dass für grosse Werthe von x die Grössen der Reihe $y, y', \ldots y^{(n)}$ abwechselnd positiv und negativ sein müssen. Denn nach Voraussetzung ist die Function y für grosse Werthe von x positiv, muss also beständig abnehmen, da sie gegen den Grenzwerth Null convergirt; somit ist y' negativ, muss also beständig zunehmend gegen Null convergiren u. s. f. Bei geraden Werthen der Zahl n muss die höchste Ableitung $y^{(n)}$ sich demnach als positiv erweisen, während sie doch der Differentialgleichung (39) zufolge negativ ist. Unter unsern Voraussetzungen hat also die Annahme, es existire ein nicht oscillatorisches Integral der Differentialgleichung, auf einen Widerspruch geführt. Dieses Resultat kann in folgender Weise formulirt werden, indem der auf den Fall $\sigma < 1$ bezügliche Theil des Theorems in Nr. 15 reproducirt wird.

Ist in der Differentialgleichung

$$y^{(n)} + y\, f(x) = 0,$$

die Function $f(x)$ für grosse Werthe von x endlich und stetig und hat das Product $x^\sigma f(x)$ einen endlichen positiven Grenzwerth für $x = +\infty$, wobei die Ungleichung

$$n \geqq 2\sigma > 0$$

bestehe, so ist bei geraden Werthen der Zahl n jedes Integral der Differentialgleichung, welches sammt seinen ersten n Ableitungen für grosse Werthe von x endlich und stetig ist, oscillatorischen Charakters, d. h. es verschwindet noch für positive Werthe des Arguments, die jede Grenze übersteigen.

Bei ungeraden Werthen von n bestehen für jedes nicht oscillatorische Integral y die Gleichungen

$$\lim_{x=+\infty} y = \lim_{x=+\infty} y' = \cdots = \lim_{x=+\infty} y^{(n)} = 0.$$

Dorpat, September 1892.

Zur Theorie der Abel'schen Gleichungen.

Von

E. Netto in Giessen.

§ 1.

Ist eine irreductible Gleichung $f(x)=0$ mit den Wurzeln $x_1, x_2, \dots x_n$ vorgelegt, und stehen zwei ihrer Wurzeln x_1 und x_2 durch die Gleichung

$$x_2 = \varphi(x_1)$$

mit einander in Verbindung, wobei φ eine rationale Function bedeutet, dann wird im Allgemeinen auch diejenige Gleichung $g(y)=0$, deren Wurzeln

$$y_1 = P(x_1),\ y_2 = P(x_2), \dots y_n = P(x_n)$$

sind, denselben Charakter besitzen, falls P eine rationale Function ist. Gehören nämlich x_1 und $P(x_1)$ zu derselben Substitutionengruppe, dann kann auch x_1 rational durch $P(x_1)$ dargestellt werden, etwa in der Form

$$x_1 = P_1\big(P(x_1)\big) = P_1(y_1),$$

und es wird folglich

$$y_2 = P(x_2) = P\big(\varphi(x_1)\big) = P\big(\varphi[P_1(y_1)]\big) = Q(y_1).$$

Gehört hingegen $P(x_1)$ nur zu einer Untergruppe der Gruppe für x_1, dann braucht die betrachtete Eigenschaft nicht mehr zu gelten.

Diese Eigenschaft bleibt aber stets gewahrt, sobald $f(x)=0$ eine Abel'sche Gleichung ist, wie P auch gewählt sein möge. In diesem Falle sind nämlich die Substitutionen der Gruppe von $f(x)=0$ sämmtlich unter einander vertauschbar. Daraus folgt, dass jede Untergruppe einer Abel'schen Gruppe eine ausgezeichnete Untergruppe derselben ist. Denn man hat $s_i^{-1} s_t s_i = s_t s_i^{-1} s_i = s_t$, und deswegen findet die Transformation $s_i^{-1} \Gamma s_i = \Gamma$ auch für jede Untergruppe Γ der Abel'schen Gruppe statt. Demnach gehören die conjugirten Werthe $P(x_1), P(x_2), \dots$ zu derselben Gruppe, d. h. $P(x_2)$ ist rational durch $P(x_1)$ darstellbar.

Man kann aber noch weiter nachweisen, dass auch $g(y)=0$ eine Abel'sche Gleichung wird. Das zeigt sich bei der Herstellung der

Gruppe H von $g(y) = 0$. Diese findet man, indem man auf die Reihe $P(x_1), P(x_2), \ldots$ die Substitutionen von G, der Gruppe von $f(x) = 0$, anwendet und die entstehenden Umstellungen als Substitutionen unter den y deutet; wir können sie also durch

$$t_i = \left| P(x_\mu)\ P(x_{i_\mu}) \right| = \left| y_\mu\ y_{i_\mu} \right| \quad (\mu = 1, 2, \ldots n)$$

darstellen. Dann entsprechen den Substitutionen s von G eindeutig die Substitutionen t von H, und da jene unter einander vertauschbar sind, so werden es auch diese sein, d. h. $g(y) = 0$ ist eine Abel'sche Gleichung.

§ 2.

Es bedeute wieder $\varphi(x)$ eine rationale Function von x, und es werde

$$\varphi\big(\varphi(x)\big) = \varphi_2(x), \quad \varphi\big(\varphi_2(x)\big) = \varphi_3(x), \ldots$$

gesetzt. Wenn nun $f(x) = 0$ eine irreductible Gleichung darstellt, deren Wurzeln sich in das Schema

$$\begin{array}{l} x_1,\ \varphi(x_1),\ \varphi_2(x_1),\ \varphi_3(x_1), \ldots \varphi_{\varkappa-1}(x_1); \ \big(\varphi_\varkappa(x_1) = x_1\big), \\ x_2,\ \varphi(x_2),\ \varphi_2(x_2),\ \varphi_3(x_2), \ldots \varphi_{\varkappa-1}(x_2); \ \big(\varphi_\varkappa(x_2) = x_2\big), \\ \cdot \end{array}$$

einordnen lassen, dann kann man zunächst in bekannter Weise $\varphi(x)$ zu einer ganzen Function von x machen, deren Grad geringer ist, als der Grad n der Gleichung $f(x) = 0$. Man kann also setzen

$$\varphi(x) = d_0 x^\alpha + d_1 x^{\alpha-1} + d_1 x^{\alpha-2} + \cdots \quad (\alpha \leq n-1).$$

Nach § 1 hat die Gleichung $g(y) = 0$, deren Wurzeln mit den x_i durch

$$y_i = \mu x_i + \nu, \quad x_i = \frac{y_i - \nu}{\mu} \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

verbunden sind, neben y_1 noch ein $y_1' = \psi(y_1)$ zur Wurzel. Nun ist

$$y_1' = \mu x_1' + \nu = \mu\,\varphi(x_1) + \nu = \mu\left[d_0\Big(\frac{y_1 - \nu}{\mu}\Big)^\alpha + d_1\Big(\frac{y_1 - \nu}{\mu}\Big)^{\alpha-1} + \cdots\right] + \nu$$

$$= \frac{d_0}{\mu^{\alpha-1}}\, y_1^\alpha + \frac{\mu d_1 - \alpha\nu d_0}{\mu^{\alpha-1}}\, y_1^{\alpha-1} + \cdots,$$

und man kann folglich über μ und ν stets so verfügen, dass

$$y_1' = y_1^\alpha + e_2 y_1^{\alpha-2} + e_3 y_1^{\alpha-3} + \cdots = \psi(y_1)$$

wird. Gleichzeitig folgt aus

$$\varphi_\varkappa(x_1) = x_1,$$

dass auch

$$\psi_\varkappa(y_1) = y_1$$

wird, und man kann somit die Wurzeln y_i von $g(y) = 0$ in das Schema

$$y_1,\ \psi(y_1),\ \psi_2(y_1),\ \ldots\ \psi_{\varkappa-1}(y_1);\quad \big(\psi_\varkappa(y_1)=y_1\big),$$
$$y_2,\ \psi(y_2),\ \psi_2(y_2),\ \ldots\ \psi_{\varkappa-1}(y_2);\quad \big(\psi_\varkappa(y_2)=y_2\big),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

einordnen.

Wir dürfen also auch bei der Gleichung $f(y)=0$ die Function φ gleich in der für ψ gefundenen, einfachen Gestalt voraussetzen.

§ 3.

$f(x)=0$ sollte eine irreductible Gleichung sein, für welche
$$x_2=\varphi(x_1)$$
wird. Es ist somit auch
$$f\big(\varphi(x)\big)=0,$$
sobald
$$f(x)=0$$
ist, und daraus folgt wegen der Irreductibilität von $f(x)$ dass $f\big(\varphi(x)\big)$ durch $f(x)$ theilbar ist. Ist umgekehrt
$$f\big(\varphi(x)\big)=f(x)\,.\,Q(x),$$
so folgt, dass für jede Wurzel x_1 von $f(x)=0$, auch $f\big(\varphi(x_1)\big)=0$ wird und also auch $\varphi(x_1)$ eine Wurzel von $f(x)=0$; freilich braucht diese nicht von x_1 verschieden zu sein; dann wäre aber $\varphi(x_1)=x_1$.

Nach den Ausführungen des vorigen Paragraphen kann man φ als höchstens vom Grade $(n-1)$ annehmen; daraus sieht man, dass die Möglichkeit $\varphi(x_1)=x_1$ nicht eintreten kann. Wir werden deshalb alle Gleichungen erhalten, bei denen zwei Wurzeln durch
$$x_2=\varphi(x_1)$$
verbunden sind, wenn wir ausdrücken, dass $f\big(\varphi(x)\big)$ durch $f(x)$ theilbar ist. Setzt man
$$f(x)=x^n+c_1x^{n-1}+c_2x^{n-2}+\cdots+c_n,$$
so müsste auch
$$\begin{aligned}f\big(\varphi(x)\big)-f(x)&=\big(\varphi(x)^n-x^n\big)+c_1\big(\varphi(x)^{n-1}-x^{n-1}\big)+\cdots\\&=\big(\varphi(x)-x\big)\Big[\big(\varphi(x)^{n-1}+\cdots\big)+c_1\big(\varphi(x)^{n-2}+\cdots\big)+\cdots\Big]\end{aligned}$$
und also auch der zweite Factor des letzten Products durch $f(x)$ theilbar sein. Führt man bei unbestimmten $c_1,\ c_2,\ \ldots\ c_n$ die Division durch und setzt die n Coefficienten des Restes einzeln gleich Null, so sind dies die Gleichungen für die c, aus deren Lösung die allgemeinste Form von $f(x)$ erlangt wird.

Das Modulsystem, welches durch die linken Seiten dieser Gleichungen

gegeben ist, erscheint als recht complicirt, und selbst in den einfachsten Fällen dürfte die angegebene Methode kaum durchführbar sein. Es sollen deswegen bequemere Wege für die Lösung unserer Aufgabe angegeben werden.

§ 4.

Bilden wir in unserer irreductiblen Gleichung durch Iterirung

$$\varphi(x_1),\ \varphi_2(x_1),\ \varphi_3(x_1), \ldots,$$

so tritt hierin eine erste Function $\varphi_\varkappa(x_1)$ auf, welche wieder gleich x_1 ist. Die Beziehung

$$\varphi_\varkappa(x_1) - x_1 = 0$$

gilt dann für jede Wurzel unserer irreductiblen Gleichung $f = 0$. Folglich ist die linke Seite durch $f(x)$ theilbar, d. h.

$$\frac{\varphi_\varkappa(x) - x}{f(x)} = Q(x)$$

wird eine ganze Function

Umgekehrt setzen wir irgend einen Theiler $Q_1(x)$ von $\varphi_k(x) - x$ gleich Null und benennen mit x' eine seiner Wurzeln. Dann können zwei Fälle eintreten; entweder hat $Q_1 = 0$ ausser x' noch eine andere, von x' verschiedene Wurzel der Reihe

$$x',\ \varphi(x'),\ \varphi_2(x'), \ldots;$$

oder es giebt neben $Q_1(x)$ noch andere Factoren $Q_2(x)$, $Q_3(x), \ldots$ unter welche sich die Wurzeln der Reihe so vertheilen, dass jedem $Q_\alpha(x) = 0$ nur eine derselben zufällt. Für den ersten Fall werden wir in der Folge Beispiele aufstellen; für den zweiten geben wir das nachstehende an. Es sei

$$\varphi(x) = x^2 + \frac{k^2 - k + 1}{k - 1}\, x,$$

dann wird

$$\frac{\varphi_2(x) - x}{\varphi(x) - x} = x^2 + \frac{k^2}{k-1}\, x + \frac{k^2}{k-1} = (x+k)\left(x + \frac{k}{k-1}\right) = 0.$$

Hier hat der erste Factor des letzten Ausdruckes die Wurzel $x' = -k$; dagegen ergiebt

$$\varphi(-k) = -\frac{k}{k-1}$$

die zum zweiten Factor gehörige Wurzel, und umgekehrt

$$\varphi\left(-\frac{k}{k-1}\right) = -k$$

die zum zweiten Factor gehörige.

In beiden Fällen hat der Factor $Q_1(x)$ mit $f(x)$ die Eigenschaft gemeinsam, dass die Iteration $\varphi_\varkappa$ auf eine beliebige Wurzel von $Q = 0$ oder $f = 0$ angewendet, dieselbe Wurzel wieder erzeugt.

Es finden sich deshalb unter den Factoren von $\varphi_\varkappa(x) - x$ alle, die gleich Null gesetzt, Gleichungen n^{ten} Grades ergeben, deren Wurzeln sich in der Weise

$$x', \ \varphi(x'), \ \varphi_2(x'), \dots$$

anordnen lassen. Dabei muss $\varkappa$ alle Theiler von n durchlaufen.

§ 5.

Es ist

$$\frac{\varphi_m(y) - \varphi_m(z)}{y - z}$$

eine ganze Function von y und z; setzt man hierin $y = \varphi_{\varkappa m}(x)$, $z = \varphi_{(\varkappa-1)m}(x)$, so entsteht

$$\frac{\varphi_{(\varkappa+1)m}(x) - \varphi_{\varkappa m}(x)}{\varphi_{\varkappa m}(x) - \varphi_{(\varkappa-1)m}(x)} = Q_{\varkappa m}(x),$$

wobei das $Q_{\varkappa m}$ eine ganze Function von x bezeichnet. Dies ergiebt

$$\frac{\varphi_{(\varkappa+1)m}(x) - \varphi_{\varkappa m}(x)}{\varphi_m(x) - x} = \prod_{\lambda=1}^{\varkappa} \frac{\varphi_{(\lambda+1)m}(x) - \varphi_{\lambda m}(x)}{\varphi_{\lambda m}(x) - \varphi_{(\lambda-1)m}(x)} = Q_m \cdot Q_{2m} \cdots Q_{\varkappa m}$$

und

$$\frac{\varphi_{(\varkappa+1)m}(x) - x}{\varphi_m(x) - x} = \sum_{\lambda=0}^{\varkappa} \frac{\varphi_{(\lambda+1)m}(x) - \varphi_{\lambda m}(x)}{\varphi_m(x) - x}$$

$$= 1 + Q_m + Q_m \cdot Q_{2m} + \cdots + (Q_m \cdot Q_{2m} \cdots Q_{\varkappa m}).$$

Für $m = 1$ entsteht

$$(1) \quad \frac{\varphi_{(\varkappa+1)}(x) - x}{\varphi(x) - x} = 1 + Q_1 + Q_1 Q_2 + \cdots + (Q_1 Q_2 Q_3 \cdots Q_\varkappa).$$

Natürlich lässt sich dieser Satz auch durch Wurzelbetrachtungen beweisen, aber gerade der hier eingeschlagene Weg, auf dem sie vermieden werden, erscheint vorzuziehen.

Im allgemeinen Falle ist die linke Seite von (1) nicht weiter durch $\varphi(x) - x$ theilbar. Denn wäre dies der Fall, dann müsste es auch für

$$\varphi(x) = x^\mu, \ \varphi_2(x) = x^{\mu^2}, \dots \varphi_{\varkappa+1}(x) = x^{\mu^{\varkappa+1}}$$

eintreten, d. h. es müsste

$$\frac{x^{\mu^{\varkappa+1}} - x}{x^\mu - x}$$

für jede Wurzel der Gleichung $x^\mu - x$ verschwinden, während dies für $x = 0$ doch sicher nicht geschieht.

Ob es aber für besondere Wahl der Coefficienten von φ in einzelnen Fällen nicht doch eintreten kann, ist schwerer zu entscheiden. Es müsste dann

$$1 + Q_1(x') + Q_1(x')\,Q_2(x') + \cdots + \big(Q_1(x')Q_2(x') \cdots Q_{\varkappa-1}(x')\big) = 0$$

werden für alle Wurzeln x' von $\varphi(x) - x = 0$. Weil nun aber

$$Q_\lambda(x) = Q_{\lambda-1}\big(\varphi(x)\big)$$

ist, so ergäbe sich für x'

$$Q_\lambda(x') = Q_{\lambda-1}\big(\varphi(x')\big) = Q_{\lambda-1}(x') = \cdots = Q_1(x'),$$

und die obige Gleichung ginge über in

$$1 + Q_1(x') + Q_1^2(x') + Q_1^3(x') + \cdots + Q_1^{\varkappa}(x') = 0.$$

Es würde also dann $Q_1(x')$ eine von der Einheit verschiedene $(\varkappa+1)^{\text{te}}$ Einheitswurzel sein.

Andrerseits wäre

$$Q_1(x') = \left|\frac{\varphi_2(x) - \varphi(x)}{\varphi(x) - x}\right|_{x'} = \left|\frac{\varphi'\big(\varphi(x)\big)\cdot\varphi'(x) - \varphi'(x)}{\varphi'(x) - 1}\right|_{x'} = \varphi'(x').$$

Unter der Annahme, dass die linke Seite von (1) noch durch $\varphi(x) - x$ theilbar ist, müsste also für jede Wurzel von $\varphi(x) - x = 0$ die Ableitung $\varphi'(x)$ eine von 1 verschiedene $(\varkappa+1)^{\text{te}}$ Einheitswurzel sein.

Es darf also insbesondere $\varphi(x) - x = 0$ keine mehrfache Wurzel haben, da für eine solche $\varphi'(x) - 1 = 0$ wäre.

Man sieht ferner leicht ein, dass

$$\frac{\varphi_2(x) - x}{\varphi(x) - x} = 1 + Q_1(x)$$

niemals den Factor $\varphi(x) - x$ enthalten kann. Denn dann müsste für die Wurzeln von $\varphi(x) - x = 0$, weil $\varkappa = 1$ ist, $\varphi'(x) = -1$ sein; das geht nicht, da der Grad von φ' geringer ist als der von φ, und die erste Gleichung keine gleichen Wurzeln besitzt. Eine Ausnahme wäre nur für $\varphi'(x) \equiv -1$ denkbar; das ergäbe auch in der That ein richtiges, aber banales Resultat, nämlich

$$\varphi(x) = -x + c, \quad \varphi_2(x) = x; \quad \varphi_2(x) - x = 0.$$

§ 6.

Wir gehen nun zum Beweise des allgemeinen Satzes über:

Die ganze Function

$$\frac{\varphi_\varkappa(x) - x}{\varphi(x) - x}$$

ist für keine Wahl von $\varphi(x)$ noch durch $\varphi(x) - x$ theilbar.

Wir nehmen an, es gäbe eine Function, für welche Theilbarkeit vorhanden wäre. Nach den Resultaten des vorigen Paragraphen ist dann für jede Wurzel von $\varphi(x) - x = 0$ die Ableitung $\varphi'(x)$ gleich einer von der Einheit verschiedenen $\varkappa^{\text{ten}}$ Einheitswurzel. Die bei allen verschiedenen Wurzeln von $\varphi = x$ auftretenden Einheitswurzeln

mögen $\omega', \omega'', \omega''', \ldots$ sein. Dann zerfällt $\varphi(x) - x$ in ebensoviele Factoren $g_1(x), g_2(x), g_3(x), \ldots$ derart, dass die Wuzeln von

$$g_\alpha(x) = 0$$

sämmtlich den gleichen Werth

$$\varphi'(x) = \omega^{(\alpha)}$$

hervorrufen. Demnach ist

$$\begin{array}{lll} \varphi'(x) - \omega' & \text{theilbar durch} & g_1(x), \\ \varphi'(x) - \omega'' & \quad\text{,,} \qquad \text{,,} & g_2(x), \\ \varphi'(x) - \omega''' & \quad\text{,,} \qquad \text{,,} & g_3(x), \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \end{array}$$

Nun sei die $\varkappa^{\text{te}}$ Einheitswurzel ω' etwa eine *primitive* τ^{te} Einheitswurzel, was wir durch $\omega' = \omega_\tau$ andeuten. Dann folgt, dass $g_1(x)$, welches wir wegen des Auftretens von ω_τ auch durch $g_1(x, \omega_\tau)$ bezeichnen können, der grösste gemeinsame Theiler von $\varphi'(x) - \omega_\tau$ und $\varphi(x) - x$ ist, so dass man setzen kann

$$A(x, \omega_\tau) \cdot \big(\varphi(x) - x\big) + B(x, \omega_\tau) \cdot \big(\varphi'(x) - \omega_\tau\big) = g_1(x, \omega_\tau).$$

Diese Gleichung muss für alle primitiven τ^{ten} Einheitswurzeln gelten, und so hat man für alle diese in dem obigen Schema die entsprechenden g nur durch die ω_τ von einander verschieden zu setzen: Es ist

$$(1) \quad \begin{array}{lll} \varphi'(x) - \omega_\tau & \text{theilbar durch} & g_1(x, \omega_\tau), \\ \varphi'(x) - \omega'_\tau & \quad\text{,,} \qquad \text{,,} & g_1(x, \omega'_\tau), \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \end{array} \qquad \begin{array}{l} (\omega_\tau, \omega'_\tau \ldots \text{ alle primitiven} \\ \tau^{\text{ten}} \text{ Einheitswurzeln}), \end{array}$$

und ebenso

$$(2) \quad \begin{array}{lll} \varphi'(x) - \omega_\sigma & \text{theilbar durch} & g_2(x, \omega_\sigma), \\ \varphi'(x) - \omega'_\sigma & \quad\text{,,} \qquad \text{,,} & g_2(x, \omega'_\sigma), \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \end{array} \qquad \begin{array}{l} (\omega_\sigma, \omega'_\sigma \ldots \text{ alle primitiven} \\ \sigma^{\text{ten}} \text{ Einheitswurzeln}), \end{array}$$

wobei *sämmtliche* primitiven τ^{ten}, σ^{ten} Einheitswurzeln auftreten, u. s. f. Des einfachen Schreibens wegen nehmen wir nur diese beiden Arten von Wurzeln an; der Beweis bleibt im allgemeinen Falle ungeändert. Wir setzen ferner

$$g_1(x, \omega_\tau) \,.\, g_1(x, \omega'_\tau) \cdots = G_1,$$
$$g_2(x, \omega_\sigma) \cdot g_2(x, \omega'_\sigma) \cdots = G_2.$$

Differenziren wir jetzt die Gleichung

$$\varphi(x) - x = G_1 \,.\, G_2,$$

deren Richtigkeit ersichtlich ist, so folgt

$$\varphi'(x) - 1 = G_1 G_2 \cdot \left[\frac{g_1'(x, \omega_\tau)}{g_1(x, \omega_\tau)} + \frac{g_1'(x, \omega'_\tau)}{g_1(x, \omega'_\tau)} + \cdots \right.$$
$$\left. + \frac{g_2'(x, \omega_\sigma)}{g_2(x, \omega_\sigma)} + \frac{g_2'(x, \omega'_\sigma)}{g_2(x, \omega'_\sigma)} + \cdots \right],$$

$$(3)\quad \varphi'(x)-\omega_\alpha = 1-\omega_\alpha + G_1 G_2\left[\frac{g_1'(x,\omega_\tau)}{g_1(x,\omega_\tau)}+\cdots+\frac{g_2'(x,\omega_\sigma)}{g_2(x,\omega_\sigma)}+\cdots\right].$$

Setzen wir ω_τ statt ω_α, dann ist nach (1) die rechte Seite durch $g_1(x, \omega_\tau)$ theilbar. Dabei sind alle Glieder des letzten Summanden mit Ausnahme des ersten einzeln für sich durch $g_1(x, \omega_\tau)$ theilbar. Setzen wir dann $\omega_\tau', \ldots \omega_\sigma, \ldots$ für ω_α, so ergeben sich der Reihe nach folgende Resultate: Es ist

$$(1')\quad \begin{array}{lll} 1-\omega_\tau + G_1 G_2\dfrac{g_1'(x,\omega_\tau)}{g_1(x,\omega_\tau)} & \text{theilbar durch} & g_1(x,\omega_\tau), \\ 1-\omega_\tau' + G_1 G_2\dfrac{g_1'(x,\omega_\tau')}{g_1(x,\omega_\tau')} & \text{,,}\qquad\text{,,} & g_1(x,\omega_\tau'), \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

$$(2')\quad \begin{array}{lll} 1-\omega_\sigma + G_1 G_2\dfrac{g_1'(x,\omega_\sigma)}{g_2(x,\omega_\sigma)} & \text{,,}\qquad\text{,,} & g_2(x,\omega_\sigma), \\ 1-\omega_\sigma' + G_1 G_2\dfrac{g_1'(x,\omega_\sigma')}{g_2(x,\omega_\sigma')} & \text{,,}\qquad\text{,,} & g_2(x,\omega_\sigma'), \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

Alles dies multipliciren wir, setzen zur Abkürzung

$$(1-\omega_\tau)(1-\omega_\tau')\cdots(1-\omega_\sigma)(1-\omega_\sigma')\cdots = \Omega$$

und behalten nach der Multiplication nur die Glieder des Products bei, deren Theilbarkeit durch $G_1 G_2$ nicht von selbst klar ist; so entsteht der durch $G_1 G_2$ theilbare Ausdruck:

$$(4)\quad \Omega + G_1 G_2 \Omega\left(\frac{1}{1-\omega_\tau}\frac{g_1'(x,\omega_\tau)}{g_1(x,\omega_\tau)}+\frac{1}{1-\omega_\tau'}\frac{g_1'(x,\omega_\tau')}{g_1(x,\omega_\tau')}+\cdots\right.$$
$$\left.+\frac{1}{1-\omega_\sigma}\frac{g_2'(x,\omega_\sigma)}{g_2(x,\omega_\sigma)}+\frac{1}{1-\omega_\sigma'}\frac{g_2'(x,\omega_\sigma')}{g_2(x,\omega_\sigma')}+\cdots\right).$$

Der Grad von (4) ist um eine Einheit geringer, als der von $G_1 G_2$; folglich muss (4) identisch verschwinden. Insbesondere muss der Coefficient des höchsten Gliedes in (4) gleich Null sein. Diesen wollen wir berechnen.

Es sei

$$\begin{array}{ll} \varphi(x)-x = dx^\nu+\cdots, & \\ g_1(x,\omega_\tau) = a(\omega_\tau)\cdot x^\mu+\cdots, & \\ g_1(x,\omega_\tau') = a(\omega_\tau')\cdot x^\mu+\cdots, & a(\omega_\tau)\,a(\omega_\tau')\cdots b(\omega_\sigma)\,b(\omega_\sigma')\cdots = d, \\ \cdots\cdots & \mu\varphi_0(\tau)+\varrho\varphi_0(\sigma)=\nu, \\ g_2(x,\omega_\sigma) = b(\omega_\sigma)\cdot x^\varrho+\cdots, & \\ g_2(x,\omega_\sigma') = b(\omega_\sigma')\cdot x^\varrho+\cdots, & \\ \cdots\cdots & \end{array}$$

wobei φ_0 die zahlentheoretische Function φ bedeuten soll. Dann erkennt man, dass der gesuchte Coefficient, abgesehen von dem Factor $d\Omega$ gleich

$$\mu\left[\frac{1}{1-\omega_\tau}+\frac{1}{1-\omega'_\tau}+\cdots\right]+\varrho\left[\frac{1}{1-\omega_\sigma}+\frac{1}{1-\omega'_\sigma}+\cdots\right]$$

werden wird. Fasst man in jeder der Klammern die zu einander reciproken Wurzeln zusammen, so erkennt man, dass dieser Werth gleich

$$\frac{1}{2}\mu\,\varphi_0(\tau)+\frac{1}{2}\varrho\,\varphi_0(\sigma)$$

wird. Sollte etwa $\sigma=2$ sein, so würde $\varphi_0(2)=1$ gleichfalls das richtige Resultat ergeben. Dieser letzte Ausdruck kann aber unmöglich Null werden; er ist wesentlich positiv, wenn nicht $\mu=0$, $\varrho=0$, also der in § 5 am Schlusse angegebene Fall auftritt.

Die zu Anfang des Paragraphen gesetzte Möglichkeit kann sich also nie verwirklichen, und der ausgesprochene Satz ist allgemein bewiesen.

§ 7.

Wir beweisen zunächst einige Eigenschaften der Gleichung

$$\varphi_\varkappa(x)-x=0,$$

welche ihre Analogie mit der Gleichung $x^m-1=0$ aufzeigen.

I. *Besteht in der Reihe*

$$(1)\qquad x',\ \varphi(x'),\ \varphi_2(x'),\ \varphi_3(x'),\ \ldots$$

in welcher x' eine beliebige Constante bedeutet, irgend ein Glied, welches gleich x' wird, so giebt es ein erstes $\varphi_\alpha(x')$ dieser Eigenschaft und alle folgenden derartigen gehören der Reihe $\varphi_{2\alpha}(x')$, $\varphi_{3\alpha}(x')$, ... an.

In der That, wenn $\varphi_\beta(x')=x'$ ist, und $\beta=m\alpha+\gamma$ gesetzt wird $(\gamma<\alpha)$, so folgt $\varphi_\beta(x')=\varphi_\gamma\big(\varphi_{m\alpha}(x')\big)=\varphi_\gamma(x')=x'$, und dies ist nur für $\gamma=0$ möglich.

II. *Die Glieder der Reihe*

$$x',\ \varphi(x'),\ \varphi_2(x'),\ \ldots\ \varphi_{\alpha-1}(x)\qquad \big(\varphi_\alpha(x')=x'\big)$$

sind sämmtlich von einander verschieden; bei der Fortsetzung der Iteration wiederholen sich die Werthe in gleicher Reihenfolge.

Wäre

$$\varphi_\mu(x')=\varphi_\nu(x'),\qquad (\mu<\nu<\alpha),$$

so müsste

$$\varphi_{\alpha-\nu+\mu}(x')=\varphi_\alpha(x')=x'$$

sein, was der in I gemachten Annahme widerspricht. Der zweite Theil des Satzes ist klar.

III. *Bedeutet x' eine Wurzel von $\varphi_\varkappa(x)-x=0$, so ist jedes $\varphi_\lambda(x')$ auch eine Wurzel derselben Gleichung.*

Denn es ist

$$\varphi_\varkappa[\varphi_\lambda(x')] = \varphi_\lambda[\varphi_\varkappa(x')] = \varphi_\lambda(x').$$

IV. *Die gemeinsamen Wurzeln von*

$$\varphi_\mu(x) = x, \quad \varphi_\lambda(x) = x$$

sind auch Wurzeln von

$$\varphi_\mu(x) = x,$$

wenn μ *den grössten gemeinsamen Theiler von* $\varkappa$, λ *bedeutet.*

Den gemachten Voraussetzungen nach giebt es in (1) die Glieder $\varphi_\varkappa(x')$, $\varphi_\lambda(x')$, welche gleich x' werden. Also sind $\varkappa$, λ Vielfache desjenigen ersten Index, für den die Iteration x' liefert; das zeigt, dass auch μ ein Vielfaches dieses ersten Index wird.

V. *Ist* x' *eine Wurzel von* $\varphi_\varkappa(x) - x = 0$, *so ist es auch eine Wurzel von* $\varphi_{m\varkappa}(x) - x = 0$, *wo* m *die Reihe der positiven, ganzen Zahlen durchlaufen kann.*

Denn es ist

$$\varphi_{2\varkappa}(x') = \varphi_\varkappa[\varphi_\varkappa(x')] = \varphi_\varkappa(x') = x',$$

$$\varphi_{3\varkappa}(x') = \varphi_{2\varkappa}[\varphi_\varkappa(x')] = \varphi_{2\varkappa}(x') = x',$$

. . . .

VI. Definition. *Eine primitive Wurzel von*

$$\varphi_\varkappa(x) - x = 0$$

soll x' *dann heissen, wenn in der Reihe* (1) $\varphi_\varkappa(x')$ *das erste Glied ist, welches dem Anfangsgliede gleich wird.*

VII. *Bedeutet* p, *wie immer im Folgenden, eine Primzahl, ist ferner* $\varphi(x)$ *vom Grade* m, *so hat*

$$\varphi_p(x) - x = 0$$

$m(m^{p-1} - 1)$ *primitive Wurzeln, welche sich in* $m\,\dfrac{m^{p-1}-1}{p}$ *Reihen*

$$x', \quad \varphi(x'), \quad \varphi_2(x'), \ldots \varphi_{p-1}(x'),$$

$$x'', \quad \varphi(x''), \quad \varphi_2(x''), \ldots \varphi_{p-1}(x''),$$

. . . .

vertheilen.

Nach den Resultaten des vorigen Paragraphen wird

$$\frac{\varphi_p(x) - x}{\varphi(x) - x}$$

eine ganze Function, welche nicht mehr durch $\varphi(x) - x$ theilbar ist. Setzt man den Zähler allein gleich Null, so zerfallen die Wurzeln in zwei Arten; in solche, bei denen $\varphi(x) = x$ wird und in solche bei denen erst $\varphi_p(x) = x$ wird. Nach I. dieses Paragraphen gehören alle Wurzeln einer von diesen beiden Arten an. Setzt man also den Quotienten gleich Null und tilgt dadurch die Wurzeln der ersten Art, so bleiben nur solche der zweiten Art übrig.

$\varphi(x)$ ist vom Grade m, $\varphi_p(x)$ vom Grade m^p; daraus folgen die oben gemachten Zahlenangaben.

VIII. *Die primitiven Wurzeln von*

(2) $$\varphi_\mu(x) - x = 0; \quad \mu = p^\delta$$

werden durch die Gleichung

(3) $$\frac{\varphi_\mu(x) - x}{\varphi_{\mu:p}(x) - x} = 0$$

gegeben; ihre Anzahl ist $= m^{p^{\delta-1}}\left(m^{p^\delta - p^{\delta-1}} - 1\right)$.

Alle nicht-primitiven Wurzeln von $\varphi_\mu(x) - x = 0$ werden schon die Gleichung $\varphi_{\mu:p}(x) - x = 0$ befriedigen; der obige Quotient besitzt also, gleich Null gesetzt, nur die primitiven Wurzeln von (2). Nach dem vorigen Paragraphen enthält $\varphi_\mu(x) = x$ die „zum Index $p^{\delta-1}$ gehörigen Wurzeln" nur einmal; $\varphi_{\mu:p} = x$ die zum Index $p^{\delta-2}$ gehörigen nur einmal, u. s. w. Daraus folgt, dass (3) die primitiven Wurzeln, jede nur einfach, liefert.

IX. *Die primitiven Wurzeln von*

(4) $$\varphi_\mu(x) - x = 0; \quad \mu = p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} p_3^{\delta_3} \dots$$

werden durch die Gleichung

$$\frac{[\mu:1] \,.\, [\mu:p_1p_2]\,[\mu:p_1p_3]\,[\mu:p_2p_3]\cdots}{[\mu:p_1]\,[\mu:p_2]\,[\mu:p_3] \,.\, [\mu:p_1p_2p_3]\cdots} = 0$$

gegeben, worin

$$\varphi_{\mu:\tau}(x) - x = [\mu:\tau]$$

gesetzt worden ist.

Der Beweis dieses Satzes läuft dem vorigen einerseits, dem für die primitiven Einheitswurzeln andererseits bekannten parallel, so dass wir von einer Darlegung desselben absehen können.

X. *Hat das Gleichungssystem*

(5) $$\varphi_\varkappa(x) = y, \quad \varphi_\lambda(y) = x$$

die Lösungen $x = x'$, $y = y'$, *dann sind* x', y' *Wurzeln der Gleichung*

(6) $$\varphi_{\varkappa+\lambda}(x) - x = 0;$$

und wenn umgekehrt x' *eine Lösung von* (6) *ist, dann bilden*

$$x' \textit{ und } y' = \varphi_\varkappa(x')$$

eine Lösung von (5).

Der Beweis ist unmittelbar ersichtlich.

§ 8.

Wir nehmen jetzt wieder an, dass $\varphi(x)$ vom Grade m ist, und betrachten

(1) $$\frac{\varphi_p(x) - x}{\varphi(x) - x} = 0,$$

also die Gleichung, welche alle primitiven zu φ gehörigen Wurzeln des Index p liefert. Ist x' eine derselben, so sind

$$(2)\qquad x',\ \varphi(x'),\ \varphi_2(x'),\ldots\varphi_{p-1}(x')\quad \left(\varphi_p(x')=x'\right)$$

Wurzeln von (1), und zwar sind alle von einander verschieden. Der Grad von (1) ist $m(m^{p-1}-1)$; jede symmetrische Function der Wurzeln (2) ist innerhalb des Bereiches der Gleichung (1) im Allgemeinen

$$M_p = m\,\frac{m^{p-1}-1}{p}\text{-werthig.}$$

Wir setzen, wenn $x'',\ldots$ die anderen primitiven Wurzeln von (1) sind,

$$(3)\qquad \begin{aligned} x' + \varphi(x') + \varphi_2(x') + \cdots + \varphi_{p-1}(x') &= \vartheta_1',\\ x'' + \varphi(x'') + \varphi_2(x'') + \cdots + \varphi_{p-1}(x'') &= \vartheta_1'',\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

dann kann man alle symmetrischen Functionen der Grössen (2) rational durch ϑ_1' darstellen und kann also die Grössen (2) als Wurzeln einer Gleichung

$$(4)\qquad z^p + \vartheta_1'\cdot z^{p-1} + \vartheta_2'\cdot z^{p-2} + \cdots + \vartheta_p' = 0$$

auffassen, deren Coefficienten $\vartheta_2',\ldots\vartheta_p'$ rationale Functionen von ϑ_1' sind. ϑ_1' selbst genügt einer Gleichung des Grades M_p mit rational bekannten Coefficienten

$$(5)\qquad u^{M_p} + A_1 u^{M_p-1} + \cdots + A_{M_p} = 0.$$

Man kann nun versuchen, die Coefficienten von $\varphi(x)$ innerhalb eines beliebigen Rationalitätsbereiches so anzunehmen, dass (5) eine rationale Wurzel ϑ_1' hat; dann sind alle Coefficienten von (4) gleichfalls rationale Grössen, und (4) *ist eine einfache Abel'sche Gleichung, deren Wurzeln durch die Grössen* (2) *gegeben sind.*

Setzt man $\varphi(x)$ allgemein vom $(p-1)^{\text{ten}}$ Grade an, so erhält man auf diesem Wege die allgemeinen Abel'schen Gleichungen vom Grade p. Die Art der Rechnung möge an einigen Beispielen erläutert werden.

§ 9.

Ist eine Abel'sche Gleichung dritten Grades gegeben, für welche

$$x_2 = \varphi(x_1) = m x_1^2 + n x_1 + p$$

ist, so kann man gemäss § 1 und § 2 durch eine lineare Transformation die Gleichung so umgestalten, dass für sie

$$x_2 = x_1^2 + a$$

wird. Diese neue Gleichung betrachten wir und setzen

$$(1)\qquad \varphi(x) = x^2 + a.$$

Dann wird

$$(2)\quad \frac{\varphi_3(x)-x}{\varphi(x)-x} = x^6+x^5+(3a+1)x^4+(2a+1)x^3+(3a^2+3a+1)x^2$$
$$+(a^2+2a+1)x+(a^3+2a^2+a+1)=0.$$

Jetzt setzen wir, wenn x' eine Wurzel dieser Gleichung bezeichnet,

$$x'+\varphi(x')+\varphi_2(x')=\vartheta_1(x'),$$
$$x'\varphi(x')+\varphi(x')\,\varphi_2(x')+\varphi_2(x')\,x'=\vartheta_2(x'),$$
$$x'\varphi(x')\,\varphi_2(x')=\vartheta_3(x').$$

Hier wird

$$\vartheta_1(x')=x'^4+(2a+1)\,x'^2+x'+(a^2+2a);$$
$$\vartheta_2(x')=x'^6+x'^5+3a\,x'^4+(2a+1)\,x'^3+(3a^2+a)\,x'^2$$
$$+(a^2+2a)\,x'+(a^3+a^2)$$
$$=\frac{\varphi_3(x')-x'}{\varphi(x')-x'}-\vartheta_1(x')+(a-1)$$
$$=-\vartheta_1(x')+(a-1);$$
$$\vartheta_3(x')=x'^7+3a\,x'^5+(3a^2+a)\,x'^3+(a^3+a^2)\,x'$$
$$=(x'-1)\,\frac{\varphi_3(x')-x'}{\varphi(x')-x'}+a\vartheta_1(x')+(a+1),$$

so dass die Gleichung

$$(3)\quad z^3-\vartheta_1(x')\cdot z^2-\big(\vartheta_1(x')-a+1\big)z-\big(a\vartheta_1(x')+a+1\big)=0$$

die Wurzeln x', $\varphi(x')$, $\varphi_2(x')$ besitzt. Bezeichnet man die übrigen drei Wurzeln von (2) mit x'', $\varphi(x'')$, $\varphi_2(x'')$ und auch unterschiedslos die 6 Wurzeln von (2) mit $x_1, x_2, \ldots x_6$, so erhält man

$$\vartheta_1(x')+\vartheta_1(x'')=\sum x_\lambda=-1,$$
$$\vartheta_1(x')\cdot\vartheta_1(x'')=\sum x_\lambda x_\mu-\vartheta_2(x')-\vartheta_2(x'')$$
$$=(3a+1)+\vartheta_1(x')+\vartheta_1(x'')-2(a-1)$$
$$=a+2,$$

so dass die Gleichung

$$(4)\qquad u^2+u+(a+2)=0$$

die Wurzeln $\vartheta_1(x')$, $\vartheta_1(x'')$ besitzt. Aus (4) folgt

$$u=\tfrac{1}{2}\left(-1\pm\sqrt{-4a-7}\right);$$

also entsteht für

$$-(4a+7)=(2\lambda+1)^2,\qquad a=-(\lambda^2+\lambda+2)$$

die rationale Wurzel

$$u=\tfrac{1}{2}(-1\pm 2\lambda\pm 1)$$

d. h. wir können setzen

$$\vartheta_1(x')=\lambda,\qquad \vartheta_1(x'')=-(\lambda+1).$$

Dann entstehen aus (3) die beiden Gleichungen

(5) $z^3 - \lambda z^2 - (\lambda^2 + 2\lambda + 3)z + (\lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 1) = 0,$

(5a) $z^3 + (\lambda + 1)z^2 - (\lambda^2 + 2)z - (\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda + 1) = 0,$

deren Product (2) ergeben muss. Uebrigens sind (5) und (5a) nicht wesentlich von einander verschieden. Denn

$$a = -(\lambda^2 + \lambda + 2)$$

geht durch $\lambda = -(\lambda_1 + 1)$ in $-(\lambda_1^2 + \lambda_1 + 2)$ und gleichzeitig (5) in die entsprechende Form (5a) über. Es giebt daher (5) die Abel'schen Gleichungen dritten Grades, wobei

$$\varphi(x) = x^2 - (\lambda^2 + \lambda + 2)$$

zu setzen ist. Nehmen wir noch

$$\lambda = 3\mu,$$

$$z = \zeta + \mu,$$

dann entsteht

$$\zeta^3 - 3(4\mu^2 + 2\mu + 1)\zeta + (4\mu^2 + 2\mu + 1)(4\mu + 1) = 0$$

als allgemeine Form der Abel'schen Gleichungen; hierbei ist

$$\zeta'' = \varphi(\zeta') = \zeta'^2 + 2\mu\zeta' - 2(4\mu^2 + 2\mu + 1)$$

die Beziehung, welche zwischen den Wurzeln herrscht.

Bemerkenswerth ist, was aus (5) und (5a) hervorgeht, dass jeder Abel'schen Gleichung dritten Grades eine andere zugeordnet ist, welche dieselben Wurzelrelationen aufweist, wie jene.

§ 10.

Wir fragen weiter nach denjenigen Gleichungen vierten Grades, deren Wurzeln durch

$$x',\ \varphi(x'),\ \varphi_2(x'),\ \varphi_3(x')$$

dargestellt werden können, wobei φ nur bis zum *zweiten* Grade aufsteigt, so dass also

(1) $$\varphi(x) = x^2 + a$$

gesetzt werden kann. Man hat hier, den allgemeinen Entwickelungen gemäss

$$\frac{\varphi_4(x) - x}{\varphi_2(x) - x} = 0$$

zu bilden. Dies wird

(2) $$x^{12} + 6ax^{10} + x^9 + (15a^2 + 3a)x^8 + 4ax^7 + (20a^3 + 12a^2 + 1)x^6 + (6a^2 + 2a)x^5 + (15a^4 + 18a^3 + 3a^2 + 4a)x^4 + (4a^3 + 4a^2 + 1)x^3 + (6a^5 + 12a^4 + 6a^3 + 5a^2 + a)x^2 + (a^4 + 2a^3 + a^2 + 2a)x + (a^6 + 3a^5 + 3a^4 + 3a^3 + 2a^2 + 1) = 0,$$

so dass diese Gleichung die zwölf Wurzeln

$$x^{(i)},\quad \varphi(x^{(i)}),\quad \varphi_2(x^{(i)}),\quad \varphi_3(x^{(i)}),\quad (i=1,2,3)$$

besitzt. Nun setzen wir wieder

$$\begin{aligned}
&x'+\varphi(x')+\varphi_2(x')+\varphi_3(x') &&= \vartheta_1(x'),\\
&x'\varphi(x')+x'\varphi_2(x')+\cdots+\varphi_2(x')\,\varphi_3(x') &&= \vartheta_2(x'),\\
&x'\varphi(x')\,\varphi_2(x')+\cdots+\varphi(x')\,\varphi_2(x')\,\varphi_3(x') &&= \vartheta_3(x'),\\
&x'\varphi(x')\,\varphi_2(x')\,\varphi_3(x') &&= \vartheta_4(x');
\end{aligned}$$

dann genügen zunächst die 3 Functionen

$$\vartheta_1(x'),\quad \vartheta_1(x''),\quad \vartheta_1(x''')$$

einer Gleichung dritten Grades mit rationalen Coefficienten; für diese findet man auf demselben Wege wie im vorigen Paragraphen

$$u^3+(4a+3)\,u+4=0. \tag{3}$$

In Folge von (3) kann man die dritte und alle höheren Potenzen von $\vartheta_1(x')$ durch niedere ausdrücken, indem man von

$$\vartheta_1(x')^3=-(4a+3)\,\vartheta_1(x')-4$$

Gebrauch macht; insbesondere werden $\vartheta_2(x'),\ \vartheta_3(x'),\ \vartheta_4(x')$ die Form

$$a_0\vartheta_1(x')^2+b_0\vartheta_1(x')+c_0$$

annehmen. Führt man die Rechnung durch, so ergiebt sich

$$\begin{aligned}
\vartheta_2(x') &= \ \ \tfrac{1}{2}\,[\vartheta_1(x')^2-\vartheta_1(x')+4a],\\
\vartheta_3(x') &= -\tfrac{1}{2}\,[\vartheta_1(x')^2-(2a-1)\,\vartheta_1(x')+2],\\
\vartheta_4(x') &= \ \ \tfrac{1}{2}\,[a\vartheta_1(x')^2+a\vartheta_1(x')+2a^2+2a+2].
\end{aligned}$$

Demnach genügen die Grössen $x^{(i)},\ \varphi(x^{(i)}),\ \varphi_2(x^{(i)}),\ \varphi_3(x^{(i)})$ der Gleichung

$$\begin{aligned}
z^4-\vartheta^{(i)}z^3&+\tfrac{1}{2}\,(\vartheta^{(i)2}-\vartheta^{(i)}+4a)\,z^2\\
&+\tfrac{1}{2}\Big(\vartheta^{(i)2}-(2a-1)\,\vartheta^{(i)}+2\Big)\,z\\
&+\tfrac{1}{2}\Big(a\vartheta^{(i)2}+a\vartheta^{(i)}+2a^2+2a+2\Big)=0,
\end{aligned} \tag{4}$$

wobei

$$\vartheta^{(i)}=\vartheta_1(x^{(i)})$$

gesetzt ist. Hat nun (3) eine rationale Wurzel, dann liefert die entsprechende Gleichung (4) eine Abel'sche Gleichung der verlangten Art. Wir setzen das Polynom von (3)

$$u^3+(4a+3)\,u+4=(u-\varkappa)\,(u^2+\varkappa u+\lambda)$$

und erhalten für die Zerlegungsmöglichkeit

$$\varkappa\lambda = -4, \quad \lambda - \varkappa^2 = 4a + 3,$$

$$a = -\frac{\varkappa^3 + 3\varkappa + 4}{4\varkappa}.$$

Folglich ist

$$(5) \qquad z^4 - \varkappa z^3 - \frac{\varkappa^2 + 3\varkappa + 4}{2\varkappa} z^2 + \frac{\varkappa^3 + 2\varkappa^2 + 5\varkappa + 8}{4} z$$
$$+ \frac{\varkappa^5 - 2\varkappa^4 + 4\varkappa^3 - 2\varkappa^2 + 11\varkappa + 4}{16\varkappa} = 0$$

die allgemeinste Abel'sche Gleichung vierten Grades mit den Wurzeln

$$z', \quad \varphi(z') = z'^2 + a, \quad \varphi_2(z'), \quad \varphi_3(z');$$

dabei muss

$$(6) \qquad a = -\frac{\varkappa^3 + 3\varkappa + 4}{4\varkappa}$$

sein.

Führt man diesen Werth in (2) ein, so zerfällt der Ausdruck auf der linken Seite, und die linke Seite von (5) wird, falls man darin z durch x ersetzt, ein Factor von (2).

Man erkennt gleichzeitig, dass jeder Abel'schen Gleichung vierten Grades von der angegebenen Eigenschaft eine Gleichung des achten Grades entspricht, deren Wurzeln

$$z'', \quad \varphi(z''), \quad \varphi_2(z''), \quad \varphi_3(z'');$$
$$z''', \quad \varphi(z'''), \quad \varphi_2(z'''), \quad \varphi_3(z''')$$

sind.

§ 11.

Endlich stellen wir noch diejenigen Gleichungen vierten Grades auf, deren Wurzeln

$$x', \ \varphi(x'); \quad x'', \ \varphi(x'')$$

werden, wobei man allgemein

$$(1) \qquad \varphi(x) = x^3 + ax + b$$

setzen darf. Hier wird

$$(2) \qquad \frac{\varphi_2(x) - x}{\varphi(x) - x} = x^6 + (2a + 1)x^4 + 2bx^3 + (a^2 + a + 1)x^2$$
$$+ (2ab + b)x + (a + 1 + b^2) = 0,$$

und die Gleichung, deren Wurzeln

$$x^{(i)} + \varphi(x^{(i)}) = \vartheta_1(x^{(i)}), \quad (i = 1, 2, 3)$$

sind, erscheint in der Form

$$(3) \qquad u^3 + (a + 2)u - b = 0.$$

Soll (3) zerfallen, so muss die linke Seite

$$(u - \varkappa)(u^2 + \varkappa u + \lambda)$$

werden, und dies erfordert die Annahme

$$a = \lambda - \varkappa^2 - 2; \quad b = \varkappa\lambda.$$

In der That ergiebt sich für diese Annahme die linke Seite von (2) gleich

$$(x^2 - \varkappa x + \lambda - 1)\left(x^4 + \varkappa x^3 + [\lambda - \varkappa^2 - 2]\, x^2 + [2\varkappa\lambda - \varkappa - \varkappa^3]\, x \right.$$
$$\left. + [\varkappa^2\lambda + \varkappa^2 + 1]\right) = 0.$$

Es wird demnach

$$x^4 + \varkappa x^3 + (\lambda - \varkappa^2 - 2)\, x^2 + (2\varkappa\lambda - \varkappa - \varkappa^3)\, x + (\varkappa^2\lambda + \varkappa^2 + 1) = 0$$

die allgemeine Gleichung vierten Grades mit der verlangten Eigenthümlichkeit. Dabei muss sein

$$\varphi(x) = x^3 + (\lambda - \varkappa^2 - 2)\, x + \varkappa\lambda.$$

Giessen, den 28. Juli 1892.

Zur Cauchy'schen Interpolationsaufgabe.

Von

E. Netto in Giessen.

Dass die Lösung der Cauchy'schen Interpolationsaufgabe nicht unter allen Umständen möglich sei, hat L. Kronecker zuerst gezeigt (Monatsberichte der königl. Acad. d. Wissensch. zu Berlin; Juni 1881), indem er die Lösung der Aufgabe mit einer Kettenbruchentwickelung zusammenstellte. Man kann aber auch auf ganz elementarem Wege zu diesem Resultate gelangen, und dies hat dabei noch den Vorzug, die Bedingungen, unter denen eine Lösung nicht möglich ist, übersichtlich zu gestalten und zu deuten.

Es sollen der Aufgabe gemäss, zwei Functionen vom m^{ten}, bezw. n^{ten} Grade $f_m(x)$, $g_n(x)$ dadurch bestimmt werden, dass die Werthe

$$u_\lambda = \frac{f_m(x_\lambda)}{g_n(x_\lambda)}, \quad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots m + n)$$

des Quotienten $f_m(x) : g_n(x)$ für $x = x_0, x_1, \ldots x_{m+n}$ vorgeschrieben sind. Bezeichnet man mit $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots x_{i_m}$ beliebige m, der Reihe der x_λ entnommene Elemente, und mit $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots x_{j_{n+1}}$ die übrigen der x_λ; ebenso mit $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots x_{k_n}$ beliebige n aus der Reihe der $(m+n+1)$ gegebenen x_λ mit $x_{l_1}, x_{l_2}, \ldots x_{l_{m+1}}$ die übrigen und setzt dann

$$p_i(x) = (x - x_{i_1})(x - x_{i_2}) \ldots (x - x_{i_m}),$$
$$q_k(x) = (x_{k_1} - x)(x_{k_2} - x) \ldots (x_{k_n} - x),$$

so wird die gesuchte Function

$$(1) \qquad \frac{f_m(x)}{g_n(x)} = \frac{\sum\limits_{(i)} u_{j_1} \ldots u_{j_{n+1}} \dfrac{p_i(x)}{p_i(x_{j_1}) \ldots p_i(x_{j_{n+1}})}}{\sum\limits_{(k)} u_{k_1} \ldots u_{k_n} \dfrac{q_k(x)}{q_k(x_{l_1}) \ldots q_k(x_{l_{m+1}})}}.$$

Dabei ist die Summe im Zähler über alle Combinationen (i) von m Grössen x_i aus den $(m + n + 1)$ gegebenen x_λ zu erstrecken und im

Nenner über alle Combinationen (k) von n Grössen x_k aus denselben $(m+n+1)$ Werthen.

In der That ist es leicht, zu sehen, dass (1) für x_α den Werth u_α annimmt. Denn hierfür verschwindet jedes $p_i(x)$, für welches x_α unter den x_i stand. Es muss also u_α bei den nicht verschwindenden Summanden unter den u_j auftreten, und dieses u_α kann man heraussetzen. Wir wollen der bequemeren Bezeichnung wegen $\alpha=0$ nehmen; da Zähler und Nenner des Bruches symmetrisch in allen x sind, so macht dies nichts aus. Dann wird also der Zähler

$$(2)\quad \begin{aligned} &u_0 \sum_{(i)} u_{j_1}\ldots u_{j_n} \frac{p_i(x_0)}{p_i(x_{j_1})\cdots p_i(x_{j_n})\, p_i(x_0)} \\ &= u_0 \sum_{(i)} \frac{u_{j_1}\ldots u_{j_n}}{p_i(x_{j_1})\cdots p_i(x_{j_n})}, \end{aligned}$$

wobei die $x_{i_1}, \ldots x_{i_m}$ beliebig aus $x_1, x_2, \ldots x_{m+n}$ herausgegriffen werden, und die $x_{j_1}, \ldots x_{j_n}$ die übrigen dieser Grössen sind. Der Nenner geht ebenso in

$$\sum_{(k)} \frac{u_{k_1}\ldots u_{k_n}}{q_k(x_{l_1})\cdots q_k(x_{l_m})}$$

über, wobei $x_{k_1}, \ldots x_{k_n}$ beliebig aus $x_1, x_2, \ldots x_{m+n}$ herausgegriffen werden, und die $x_{l_1}, \ldots x_{l_m}$ die übrigen m Grössen der gesammten Reihe bedeuten. Hier kann man direct für die (k) die (j) und für die (i) die (l) eintragen, so dass der Nenner lautet

$$(3)\quad \sum_{(i)} \frac{u_{j_1}\ldots u_{j_n}}{q_j(x_{i_1})\cdots q_j(x_{i_m})};$$

die Summation kann natürlich ebensowohl über die (i) wie über die (j) erstreckt werden. Dieser Nenner stimmt dann aber offenbar mit der Summe im Zähler überein, so dass der Quotient u_0 ist.

Die Kronecker'sche Bemerkung folgt nun von unserem Standpunkte aus unmittelbar durch die Ueberlegung, dass die Summe in (2) und die ihr gleiche (3) verschwinden können. Geschieht dies, dann tritt der Werth u_0 in der Form $u_0 \cdot \frac{0}{0}$ auf. Hebt man den gemeinsamen Factor $(x-x_0)$ nicht, dann bleibt die unbestimmte Form bestehen; hebt man ihn weg, dann braucht die Forderung, dass der Bruch für x_0 den Werth u_0 annimmt, nicht mehr erfüllt zu sein.

Damit die unbestimmte Form eintrete, ist es hinreichend und nothwendig, dass die Summe

$$(4)\quad \sum_{(i)} \frac{u_{j_1}\ldots u_{j_n}}{p_i(x_{j_1})\cdots p_i(x_{j_n})} = 0, \quad (x_{i_1}, \ldots x_{i_n} \text{ sind aus } x_1, \ldots x_{m+n} \text{ zu wählen})$$

wird. Dieselbe Bedingung erhält man, wenn man fragt, wann der gesammte Zähler aus (1) durch $x - x_0$ theilbar wird. —

Hebt man diesen Factor $x - x_0$ fort, so entsteht ein Bruch

$$\frac{f_{m-1}(x)}{g_{n-1}(x)}, \tag{5}$$

dessen Zähler und Nenner nur bis zu den Graden $(m - 1)$ bezw. $(n - 1)$ aufsteigen. Dieser Bruch befriedigt aber die $(m + n)$ Bedingungen, für $x = x_1, x_2, \dots x_{m+n}$ die $(m+n)$ Werthe $u_1, u_2, \dots u_{m+n}$ anzunehmen. Weil er jedoch schon durch $(m + n - 1)$ Werthepaare bestimmt ist, so folgt, dass das $(m + n)^{\text{te}}$ Werthepaar x_{m+n}, u_{m+n} von den übrigen abhängig sei.

Das lässt sich leicht sehen, wenn man den Bruch (5) herstellt:

$$\frac{f_{m-1}(x)}{g_{n-1}(x)} = \frac{\sum\limits_{(i)} u_{j_1} \dots u_{j_n} \frac{p_i'(x)}{p_i'(x_{j_1}) \dots p_i'(x_{j_n})}}{\sum\limits_{(k)} u_{k_1} \dots u_{k_{n-1}} \frac{q_k'(x)}{q_k'(x_{l_1}) \dots q_k'(x_{l_m})}}; \tag{6}$$

hierin bedeutet

$$p_i'(x) = (x - x_{i_1}) \dots (x - x_{i_{m-1}}),$$
$$q_k'(x) = (x_{k_1} - x) \dots (x_{k_{n-1}} - x);$$

die $x_{i_1} \dots x_{i_{m-1}}$ sowie die $x_{k_1} \dots x_{k_{n-1}}$ sind auf alle möglichen Arten aus den $x_1, x_2, \dots x_{m+n-1}$ genommen; und die x_j umfassen die Ergänzungen zu den x_i und die x_l die Ergänzungen zu den x_k. Gesetzt nun, es ist

$$\frac{f_{m-1}(x_{m+n})}{g_{n-1}(x_{m+n})} = u_{m+n}, \tag{7}$$

dann folgt, wenn man in (6) einsetzt $x = x_{m+n}$ und Zähler und Nenner durch $(x_{m+n} - x_1)(x_{m+n} - x_2) \dots (x_{m+n} - x_{m+n-1})$ dividirt,

$$u_{m+n} = \frac{\sum\limits_{(i)} \frac{u_{j_1} \dots u_{j_n}}{p_i(x_{j_1}) \dots p_i(x_{j_n})} (-1)^n}{\sum\limits_{(k)} \frac{u_{k_1} \dots u_{k_{n-1}}}{q_k(x_{l_1}) \dots q_k(x_{l_n})} (-1)^{n-1}},$$

wobei wieder

$$p_i(x) = (x - x_{i_1}) \dots (x - x_{i_{m-1}}) \cdot (x - x_{m+n}),$$
$$q_k(x) = (x_{k_1} - x) \dots (x_{k_{n-1}} - x) \cdot (x_{m+n} - x)$$

zu nehmen ist. Der letzte Nenner wird nun, wie man sieht, gleich

$$\sum_{(k)} \frac{u_{k_1} \dots u_{k_{n-1}}}{p_l(x_{k_1}) \dots p_l(x_{k_{n-1}}) \, p_l(x_{m+n})} (-1)^{n-1};$$

schafft man diesen nach der linken Seite, so geht die Gleichung (7), wie voraus zu sehen war, wieder in (4) über.

Gilt (4), dann genügt der Bruch

$$\frac{f_m(x)}{g_n(x)} = \frac{f_{m-1}(x)\,(x-x_0)}{g_{n-1}(x)\,(x-x_0)} \tag{8}$$

den gestellten Bedingungen auch für das Werthepaar $x = x_0$, $u = u_0$ insofern er den Werth in der Gestalt $\frac{0}{0}$ annimmt; und man weiss, dass nicht zwei Brüche das Gleiche thun können, ohne dass sie, bis auf einen constanten Factor im Zähler und im Nenner übereinstimmen.

Die angestellten Ueberlegungen gelten in derselben Weise bei der Herstellung von $f_{m-1}(x) : g_{n-1}(x)$. So erkennt man: *Genügen* $(m+n-\alpha+1)$ *Werthepaare unter* $x_0, u_0; \ldots x_{m+n}, u_{m+n}$, *etwa die letzten, der Gleichung* $u = \frac{f_{m-\alpha}(x)}{g_{n-\alpha}(x)}$, *dann kann der Cauchy'schen Aufgabe nur in der uneigentlichen Form genügt werden*

$$\frac{f_m(x)}{g_n(x)} = \frac{f_{m-\alpha}(x)\,(x-x_0)\ldots(x-x_{\alpha-1})}{g_{n-\alpha}(x)\,(x-x_0)\ldots(x-x_{\alpha-1})};$$

wenn ferner zufällig auch

$$\frac{f_{m-\alpha}(x_0)}{g_{n-}(x_0)} = u_0, \quad \ldots \quad \frac{f_{m-\alpha}(x_{\alpha-1})}{g_{n-\alpha}(x_{\alpha-1})} = u_{\alpha-1}$$

ist, (*was Bedingungen von der Form* (3) *fordert*), *durch die Form*

$$\frac{f_m(x)}{g_n(x)} = \frac{f_{m-\alpha}(x)\,\varphi_{\alpha-1}(x)}{g_{n-\alpha}(x)\,\varphi_{\alpha-1}(x)},$$

wobei $\varphi_{\alpha-1}(x)$ *eine beliebige ganze Function vom Grade* $(\alpha-1)$ *bedeutet. In jedem anderen Falle ist eine einzige, eigentliche Darstellung möglich.*

Endlich möge noch Folgendes erwähnt werden. Ist die Bedingung (4) erfüllt, so tritt in den nach der Cauchy'schen Regel aufgestellten Bruch in den Zähler und in den Nenner wirklich noch u_0 ein; die Darstellung (8) zeigt, dass dann im Zähler wie im Nenner ein constanter Factor auftritt, welcher allein den Werth u_0 enthält, während die übrigen Theile von u_0 frei sind.

Giessen, den 27. November 1892.

Beweis eines Satzes von Bertini über lineare Systeme ganzer Functionen.

Von

J. Lüroth in Freiburg i. Br.

In den Rendiconti del R. Istituto Lombardo Serie II, Vol. XV, fasc. I (Sitzung vom 12. Jan. 1882) hat Bertini den Satz bewiesen, dass ein lineares System von ganzen Functionen, wenn jede Function des Systems zerfällt, entweder einen allen Functionen des Systems gemeinsamen Factor hat oder in Functionen zerfällt, die alle einem Büschel angehören. Der folgende Beweis dieses Satzes ist von dem Bertini'schen dadurch unterschieden, dass er den algebraischen Charakter mehr hervorhebt.

§ 1.

Ich werde öfter drei bekannte Sätze benutzen über ganze Functionen von zwei Reihen von Variabelen $x_1 x_2 \ldots x_p$, $y_1 y_2 \ldots y_q$ — die ich hier anführen will, um mich leichter auf sie beziehen zu können.

1) $A(x_1 x_2 \ldots x_p\, y_1 y_2 \ldots y_q)$ oder kürzer geschrieben $A(x;\, y)$ sei eine ganze Function der sämmtlichen Veränderlichen und $a(x;\, y)$ eine andere ganze Function der x und der y, welche jene in Bezug auf die x theilt. Hat dann $a(x;\, y)$ keinen von den x unabhängigen Factor, so ist der Quotient $\frac{A}{a}$ ganz in Bezug auf die x und die y.

2) Wenn die r ganzen Functionen $A_1(x;\, y)$, $A_2(x;\, y) \ldots A_r(x;\, y)$ für bestimmte Werthe $y_1{}^0 y_2{}^0 \ldots y_q{}^0$ der y, den grössten gemeinsamen Theiler $A(x)$ haben, so dass die Quotienten $\frac{A_i(x;\, y^0)}{A(x)}$ sämmtlich ganze Functionen der x werden, so muss jede ganze Function der x, welche jene r Functionen $A_i(x;\, y^0)$ theilt, auch die Function $A(x)$ theilen.

3) Bei *unbestimmten* y ist der grösste gemeinsame Theiler eine rationale Function der y. Man bringe sie auf den kleinsten Nenner; wenn man dann aus dem Zähler, falls es angeht, einen Factor heraus-

hebt, der nur die y enthält, so ist der im Zähler übrig bleibende Factor eine ganze Function $A(x; y)$ der x und der y, die ein grösster gemeinsamer Theiler der Functionen $A_1, A_2, \ldots A_r$ in Bezug auf die x ist. Diese Function ist dann auch Theiler der eben genannten Functionen in Bezug auf die x und die y, und zwar grösster gemeinsamer Theiler, in dem Sinne dass jede ganze Function der x und der y, welche alle Functionen $A_1, A_2, \ldots A_r$ theilt, auch Theiler von $A(x; y)$ ist und somit keine ganze Function existirt, die, in den x und den y zusammengenommen, von höherer Dimension ist als $A(x; y)$ und alle Functionen A_i theilt.

§ 2.

Die ganze Function $f(x_1 x_2 \ldots x_p\; y_1 y_2 \ldots y_q z)$ oder kürzer geschrieben $f(x; y; z)$ der Veränderlichen $x_1 \ldots x_p$ und der „*Parameter*" $y_1 y_2 \ldots y_q\, z$ (von welchen der letzte aus einem Grund, der noch hervortreten wird, besonders bezeichnet ist) möge in Bezug auf die x zerfallen, aber so dass sie keinen Factor hat, der von den Parametern nicht abhängt. Wir denken uns unter den möglichen Factoren diejenigen herausgesucht, welche in Bezug auf die x von möglichst niedriger Dimension m sind. Jeden solchen Factor, der eine ganze Function x und eine algebraische Function der Parameter sein wird, kann man als rationale Function der Grössen $y_1 y_2 \ldots y_q\, z$ und einer Wurzel w einer irreducibelen algebraischen Gleichung darstellen, deren Coefficienten rationale Functionen der y und z sind. Wir denken uns weiter unter den genannten Factoren m^{ter} Dimension einen ausgewählt, für den der Grad der Gleichung für w so klein als möglich ausfällt. Dieser Factor sei

$$g(x_1 x_2 \ldots x_p\; y_1 y_2 \ldots y_q\, z\, w')$$

und die entsprechende Gleichung für w'

$$F(y_1 y_2 \ldots y_q\, z\, w) = 0, \tag{1}$$

wobei w' *eine* Wurzel dieser Gleichung bezeichnet. In der Function g, die wir kürzer auch $g(x; y; z; w')$ schreiben wollen, sei der erste Coefficient gleich Eins angenommen. Ist die Gleichung (1) vom n^{ten} Grade in w und sind ihre Wurzeln $w', w'', \ldots w^{(n)}$, so sind auch die Functionen $g(x; y; z; w''), \ldots g(x; y; z; w^{(n)})$ Theiler von $f(x; y; z)$. Da aber keine der Functionen g in Factoren zerfallen kann, die in Bezug auf die x ganz sind, weil ja sonst f einen Theiler besässe, dessen Dimension in den x kleiner als m wäre, so sind sie gegenseitig theilerfremd, wenn sie nicht identisch oder nur um Factoren verschieden sind, die von den x nicht abhängen. Der letzte Fall ist nicht möglich, weil in jeder der n Functionen der Coefficient des ersten Gliedes Eins ist.

Wäre aber z. B. $g(x;\ y;\ z;\ w') = g(x;\ y;\ z;\ w'')$, so wären die Coefficienten in g Functionen der Wurzeln von (1), welche weniger als n Werthe hätten und folglich nicht einer irreducibelen Gleichung vom n^{ten} Grade zu ihrer Bestimmung bedürften. Wir haben aber angenommen, dass die Factoren m^{ter} Dimension durch keine Gleichung niedrigeren Grades bestimmt werden könnten. Da also jene n Functionen g theilerfremd und von einander verschieden sind, so muss auch ihr Product die Function $f(x;\ y;\ z)$ theilen. Dies ist aber ganz in den x und rational in den Parametern. Mit Hervorhebung des Nenners sei es

$$\frac{H_1(x;\ y;\ z)}{h(y;\ z)}$$

geschrieben, wo Zähler und Nenner ganze Functionen der $x;\ y;\ z$ bezw. nur der y und z ohne gemeinsamen Theiler sind. Da in den Functionen g der erste Coefficient Eins sein sollte, kann die Function H_1 keinen von den x unabhängigen Factor haben und weil sie die Function $f(x;\ y;\ z)$ in Bezug auf die x theilt, ist sie nach (1) § 1 auch ein Theiler in Bezug auf die $x;\ y$ und z so dass man

$$f(x;\ y;\ z) = H_1(x;\ y;\ z)\,.\,H_2(x;\ y;\ z)$$

setzen kann, wo H_2 eine ganze Function ihrer Argumente bezeichnet.

Wenn die Gleichung (1) von höherem als dem ersten Grade ist, so sind sicher mehrere Factoren g vorhanden, die alle in den x von der gleichen Dimension sind. Zerfällt also $f(x;\ y;\ z)$ in Factoren, die in den x von verschiedenen Dimensionen sind, so müssen sie in den Parametern rational sein und f muss dann in Bezug auf alle Veränderlichen zerfallen.

§ 3.

Ist $f(x;\ y;\ z)$ in den Parametern linear, so darf die Function H_2 diese nicht enthalten. Enthielte sie noch x, so hätte f einen von den y und z unabhängigen Factor, welchen Fall wir ausgeschlossen haben. Daher muss H_2 constant, $= C$, sein und dann folgt

$$(2)\qquad f(x;\ y;\ z) = Ch(y;\ z)\,g(x;\ y;\ z;\ w')\dots g(x;\ y;\ z;\ w^{(n)}).$$

Es sei nun

$$(3)\qquad f(x;\ y;\ z) = f_0(x) + y_1 f_1(x) + \dots + y_q f_q(x) - z f(x),$$

wo $f_0(x),\ f_1(x),\ \dots f_q(x),\ f(x)$ ganze Functionen der Variabelen $x_1 x_2 \dots x_p$ bezeichnen, zwischen denen keine homogene Gleichung mit constanten Coefficienten bestehen soll. Wenn nämlich eine solche Gleichung bestände, könnte man neue Parameter einführen, zwischen deren Coefficienten keine Abhängigkeit existirte.

Um die Natur der Function g zu erkennen, wollen wir ein ganz willkürliches, unbestimmtes, Werthsystem $\xi_1,\ \xi_2,\dots \xi_p$ der x annehmen

und g so zu bestimmen suchen, dass es für das System der ξ verschwindet. Dazu sind die y, z und w so zu finden, dass für eine Wurzel w' der Gleichung

$$F(y_1 y_2 \dots y_q z w') = 0$$

die Function

$$g(\xi;\ y;\ z;\ w') = 0$$

ist. Durch Einsetzen der ξ für die x in die identische Gleichung (2) folgt aber

$$z = \frac{1}{f(\xi)} \left\{ f_0(\xi) + y_1 f_1(\xi) + \cdots + y_q f_q(\xi) \right\}$$
$$= \varphi(\xi_1 \xi_2 \dots \xi_p\ y_1 y_2 \dots y_q),$$

wofür kürzer $\varphi(\xi;\ y)$ geschrieben sei.

Daher sind die beiden Gleichungen

$$F\big(y_1 y_2 \dots y_q;\ \varphi(\xi;\ y);\ w\big) = 0, \tag{4}$$

$$g\big(\xi;\ y;\ \varphi(\xi;\ y),\ w)\big) = 0 \tag{5}$$

durch einen Werth von w zu erfüllen. Die erste Gleichung habe die Wurzeln $v', v'', \dots v^{(n)}$. Die Gleichung (3) liefert beim Eintragen von $\varphi(\xi;\ y)$ an Stelle von z

$$f(x;\ y;\ \varphi) = Ch(y;\ \varphi)\, g(x;\ y;\ \varphi;\ v') \dots g(x;\ y;\ \varphi;\ v^{(n)}). \tag{6}$$

Die Functionen $g(x;\ y;\ \varphi;\ v^{(i)})$ (für $i = 1, 2, 3 \dots n$) sind in Bezug auf die x irreducibel. Denn wäre eine zerlegbar, so hätte $f(x;\ y;\ \varphi)$ einen Factor $g_1(x)$ ganz in den x und von niedrigerer Dimension als g. Bestimmt man aber die ξ so, dass sie der Gleichung $\varphi(\xi;\ y) = z$ genügen, so wird $g_1(x)$, wenn es überhaupt noch von den ξ abhängt, eine algebraische Function der ξ, der y und des z, deren Dimension in x kleiner als m ist und die $f(x;\ y;\ z)$ theilt, gegen unsere Annahme in § 2.

Gesetzt nun es verschwinde für die ξ mehr als einer der Factoren rechts in der Gleichung (6). Differentiirt man nach x_i und setzt dann die ξ für die x, so folgt, wenn zwei der Grössen $v', v'', \dots v^{(n)}$ die Gleichung (5) erfüllen

$$\frac{\partial f(x;\ y;\ \varphi)}{\partial x_i} = 0, \quad \text{für } i = 1, 2, \dots p$$

wenn die x durch die ξ ersetzt werden. Da aber die Parameter ganz willkürlich sind, so zerfällt jede dieser Gleichungen in eine Anzahl anderer, die man in

$$\frac{\partial f_k(x)}{\partial x_i} = \frac{f_k(\xi)}{f(\xi)} \cdot \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \qquad \begin{aligned} i &= 1, 2 \dots p \\ k &= 0, 1, 2 \dots q \end{aligned}$$

zusammenfassen kann, wenn in ihnen, nach geschehener Differentiation,

die x durch die ξ ersetzt werden. Weil die ξ noch ganz willkürlich sind, so kann man umgekehrt die ξ durch die x ersetzen, so dass jene Gleichungen mit den

$$\frac{\partial f_k(x)}{\partial x_i} = \frac{f_k(x)}{f(x)} \cdot \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$$

gleichbedeutend sind, aus welchen

$$(7) \qquad f_k(x) = c_k f(x)$$

folgt, wo c_k eine Constante bezeichnet. Die Functionen f_k wären also nicht linear unabhängig, wie wir dies doch angenommen hatten.

Somit genügt der Gleichung (5) nur *eine* Wurzel der Gleichung (4) und diese lässt sich also rational durch die ξ und die y ausdrücken. Ihr Werth sei $W(\xi; y)$. Dann ist

$$g\big(x; y; \varphi(\xi; y); W(\xi; y)\big)$$

die Function g, welche für das Werthsystem ξ zu Null wird. Indem man diese rationale Function der ξ und der Parameter auf den kleinsten gemeinsamen Nenner bringt, sei sie geschrieben

$$\frac{\Gamma(x; \xi; y)}{\gamma(\xi; y)}$$

wo nun im Zähler und Nenner theilerfremde Functionen der Argumente stehen. Weil in der Function g der erste Coefficient Eins ist, kann Γ keinen Factor haben, der von den x frei ist. Da ferner Γ als Function der x ein Theiler von $f(x; y; \varphi)$, also auch von $f(\xi) f(x; y; \varphi)$ ist, welche Function ganz in den x, den ξ und den y ist, so folgt

$$(8) \qquad f(\xi) f(x; y; \varphi) = \Gamma(x; \xi; y) \cdot \Delta(x; \xi; y)$$

wo Δ ebenfalls eine ganze Function der Argumente ist. Dabei ist $\Gamma(\xi; \xi; y) = 0$, und, wie oben bewiesen wurde, $\Delta(\xi; \xi; y) \neq 0$.

§ 4.

Da die linke Seite von (8) eine lineare Function der y ist, können diese nur in einem der beiden Factoren rechts auftreten. Um zu beweisen dass sie nur in Δ vorkommen, brauchen wir eine Eigenschaft des grössten gemeinsamen Theilers der Functionen

$$(9) \qquad \begin{array}{c} f_0(x) f(\xi) - f_0(\xi) f(x), \\ f_1(x) f(\xi) - f_1(\xi) f(x), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_q(x) f(\xi) - f_q(\xi) f(x), \end{array}$$

welche auf der linken Seite von Gleichung (8) auftreten. Nach unserer Annahme haben diese Functionen keinen gemeinsamen Theiler, der nur von den x oder nur von den ξ abhängt. Denn hätten sie den irreducibelen Factor $a(x)$, so wäre *entweder* für ein Werthsystem $x_1^0 x_2^0 \dots x_p^0$, für welches $a(x) = 0$ ist,

$$f_i(\xi) = f(\xi)\,\frac{f_i(x^0)}{f(x^0)}$$

und es ergäben sich, weil die ξ ganz willkürlich sind, die Gleichungen (7) mit ihren unzulässigen Folgerungen, *oder* es wäre für jenes Werthsystem $f(x^0) = 0$ und damit auch

$$f_0(x^0) = f_1(x^0) = \dots = f_q(x^0) = 0,$$

so dass alle Functionen $f_0, f_1 \dots f_q, f$ durch $a(x)$ theilbar wären. Dies widerspricht aber unserer Voraussetzung, dass die Function $f(x; y; z)$ keinen nur von den x abhängigen Theiler habe. Ebenso findet man, dass die Functionen (9) auch keinen von den ξ allein abhängigen Theiler haben können.

Es können auch nicht zwei der Functionen (9) sich nur um einen von den x unabhängigen Factor unterscheiden. Denn die Vertauschung der x mit den ξ würde zeigen, dass ein solcher Factor auch von den ξ nicht abhängen kann, also absolut constant sein muss und aus der Gleichung

$$f_i(x)\,f(\xi) - f_i(\xi)\,f(x) = c\,\big(f_k(x)\,f(\xi) - f_k(\xi)\,f(x)\big)$$

wo nun c constant, würde dann

$$\frac{f_i(x) - c\,f_k(x)}{f(x)} = \frac{f_i(\xi) - c\,f_k(\xi)}{f(\xi)}$$

folgen, daher diese Brüche constant $= C$ sein müssten. Dann bestände aber, gegen unsere Annahme, die Gleichung

$$f_i(x) - c\,f_k(x) = Cf(x),$$

und die Functionen f wären nicht linear unabhängig.

Sei nun $A(x; \xi)$ der grösste gemeinsame Theiler der Functionen (9) — wenn sie einen haben — in Bezug auf die x, und zwar als ganze Function der x und der ξ geschrieben, die keinen von den x unabhängigen Factor hat, so ist diese Function nach 3) § 1 auch grösster gemeinsamer Theiler der Functionen (9) in Bezug auf die x und die ξ, so dass man

$$(10) \qquad f_i(x)\,f(\xi) - f_i(\xi)\,f(x) = A(x; \xi)\,B_i(x; \xi)$$

setzen kann, wo die B_i ganze Functionen der x und der ξ sind. Die

Vertauschung der x mit den ξ zeigt, dass $A(\xi; x)$ ebenfalls die sämmtlichen Functionen (9) in Bezug auf die x und die ξ theilt, und, nach 3) § 1, somit auch $A(x; \xi)$ theilen muss. Die Gleichung, welche dies ausspricht

$$A(x; \xi) = A(\xi; x)\, \varphi(x; \xi),$$

in der $\varphi(x; \xi)$ eine ganze Function ist, liefert dann

$$\varphi(x; \xi) \,.\, \varphi(\xi; x) = 1,$$

so dass $\varphi(x; \xi)$ constant und $+1$ oder -1 ist. Die Dimension μ von $A(x; \xi)$ in den x ist folglich ebenso gross wie die Dimension in den ξ.

§ 5.

Es sei nun $\eta_1 \eta_2 \ldots \eta_p$ ein unbestimmtes Werthsystem, und die Werthsysteme $x_1^0 x_2^0 \ldots x_p^0$ der x, und $\xi_1^0 \xi_2^0 \ldots \xi_p^0$ der ξ so gewählt, dass sie $A(x^0; \xi^0) = 0$ machen, während sie noch gewisse Nebenbedingungen erfüllen.

Zunächst sollen $f(x^0) \neq 0$, $f(\xi^0) \neq 0$ sein. Ferner sollen die Functionen $A(\eta; x^0)$ und $A(\eta; \xi^0)$ nicht von niedrigerer Dimension als der μ^{ten} in Bezug auf die η sein. Diese Bedingung wird durch Ungleichungen dargestellt, indem gewisse Functionen der x und der ξ, die wir mit $\psi(x)$, $\chi(\xi) \ldots$ bezeichnen wollen, für die x^0 bezw. die ξ^0 nicht verschwinden dürfen. Sind diese Ungleichungen erfüllt, so haben die Functionssysteme

$$\begin{array}{lll} (11) & f_i(\eta)\, f(x^0) - f(\eta)\, f_i(x^0) & \\ & & i = 0, 1, \ldots q \\ (11^*) & f_i(\eta)\, f(\xi^0) - f(\eta)\, f_i(\xi^0) & \end{array}$$

sicher $A(\eta; x^0)$ und $A(\eta; \xi^0)$ zu Theilern. Soll das System (11) einen grössten gemeinsamen Theiler haben, dessen Dimension in Bezug auf die η grösser als μ ist, so müssen, wenn es überhaupt möglich ist, die x^0 mindestens *eine* Gleichung $\Phi(x) = 0$ erfüllen. Wenn wir also die Bedingung stellen dass $\Phi(x^0) \neq 0$ sei, so wird $A(\eta; x^0)$ der grösste gemeinsame Theiler der Functionen (11) sein. Ebenso wird $A(\eta; \xi^0)$ der grösste gemeinsame Theiler der Functionen (11*) sein, wenn $\Phi(\xi^0) \neq 0$ ist. Aus den Gleichungen

$$f_i(\eta)\, f(x^0) - f_i(x^0)\, f(\eta) = A(\eta; x^0)\, B_i(\eta; x^0),$$
$$f_i(\eta)\, f(\xi^0) - f_i(\xi^0)\, f(\eta) = A(\eta; \xi^0)\, B_i(\eta; \xi^0)$$

die aus (10) folgen, sowie aus

$$f_i(x^0)\, f(\xi^0) - f_i(\xi^0)\, f(x^0) = 0$$

ergiebt sich nun:

$$f(\xi^0)\, A(\eta; x^0)\, B_i(\eta; x^0) = f(x^0)\, A(\eta; \xi^0)\, B_i(\eta; \xi^0)$$

für $i = 0, 1, 2 \ldots q$. Da $B_i(\eta; \xi^0)$ eine ganze Function der η ist, so ist $A(\eta; x^0)\ B_i(\eta; x^0)$ durch $A(\eta; \xi^0)$ theilbar; also muss nach (2) § 1 auch $A(\eta; x^0)$ durch $A(\eta; \xi^0)$ theilbar sein. Weil diese beiden Functionen von gleicher Dimension sind, ist ihr Quotient constant $= c$, also

$$A(\eta; x^0) = cA(\eta; \xi^0).$$

Setzt man die η den x^0 gleich, so kommt

$$A(x^0; x^0) = cA(x^0; \xi^0) = 0.$$

Also ist für *die* Werthsysteme der x und ξ, für die $A(x; \xi) = 0$ ist, stets auch $A(x; x) = 0$, wenn nur die x und die ξ die oben erwähnten Ungleichungen erfüllen. Da aber die Functionen $f(x)$, $f(\xi)$, $\psi(x)$, $\psi(\xi), \ldots, \Phi(x)$, $\Phi(\xi)$ immer nur je *eine* Reihe der Variabeln, entweder die x oder die ξ, enthalten, sind sie zu $A(x; \xi)$ theilerfremd, weil diese Function keinen Theiler hat, der nur die x oder nur die ξ enthielte. Man braucht daher auf diese Ungleichungen keine Rücksicht zu nehmen und $A(x; x)$ muss durch $A(x; \xi)$ theilbar sein, wenn es nicht identisch Null ist. Da aber $A(x; x)$ nur die x enthält, jeder Factor von $A(x; \xi)$ aber die x und die ξ, ist nur der zweite Fall möglich, und $A(x; x)$ *muss identisch Null sein.*

§ 6.

Jede ganze Function der x, die in Bezug auf diese Veränderlichen die sämmtlichen Functionen (9) theilt, muss auch die Function $f(x; y; \varphi)$ theilen, die in (6) in Factoren zerlegt ist, und kann also, weil diese Factoren irreducibel sind, nur aus einer Anzahl dieser Factoren bestehen. Würde aber der grösste gemeinsame Theiler *alle* Factoren enthalten, so wäre die Function $A(x; \xi)$ von derselben Dimension in den x wie die Functionen (9), daher diese sich von ihr und dann auch unter sich nur um constante Factoren unterscheiden könnten; was in § 4 als unzulässig erkannt wurde. Der grösste gemeinsame Theiler kann daher höchstens $n - 1$ jener Factoren umfassen. Wäre nun die Function $\Delta(x; \xi; y)$ in Gleichung (8) von den Parametern unabhängig, so wäre sie, weil sie mit dem Product von $n - 1$ Factoren proportional ist, der *grösste* gemeinsame Theiler. Dies ist aber nicht möglich; denn $\Delta(\xi; \xi, y)$ ist von Null verschieden, während der grösste gemeinsame Theiler, wie gerade bewiesen wurde, verschwindet, wenn die x den ξ gleich gesetzt werden. Weil Δ von den y nicht unabhängig sein kann, muss Γ es sein, so dass diese Function durch die Bedingung zu verschwinden, wenn man die x den ξ gleichsetzt, vollständig bestimmt ist. Die Function $g(x; y; z; w)$ kann folglich, als Function der x betrachtet, nur eine einzige Constante enthalten und muss von der Form sein

$$A(x) - \lambda B(x),$$

wo $A(x)$ und $B(x)$ ganze Functionen der x allein sind und λ eine rationale Function der y, z und w ist. Sind $\lambda', \lambda'' \dots \lambda^{(n)}$ die n Werthe, welche die Function λ für die n Wurzeln der Gleichung (1) annimmt, so hat man

$$f(x;y;z) = Ch(y;z)\big(A(x) - \lambda' B(x)\big) \dots \big(A(x) - \lambda^{(n)} B(x)\big).$$

Die n Werthe $\lambda', \lambda'', \dots \lambda^{(n)}$ müssen verschieden sein, weil sonst, gegen das in § 2 bewiesene, zwei der Functionen g einander gleich wären. Daher genügen sie einer Gleichung n^{ten} Grades

$$c_0 \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \cdots + c_{n-1}\lambda + c_n = 0,$$

deren Coefficienten ganze Functionen der y und z ohne gemeinsame Theiler sind. Es ergiebt sich dann

$$f(x;y;z) = \frac{k(y;z)}{l(y;z)}\{c_0 A(x)^n + c_1 A(x)^{n-1} B(x) + \cdots + c_n B(x)^n\}$$

wo die beiden ganzen Functionen k und l der Parameter theilerfremd seien. Es müssen die $(n+1)$ Producte

$$c_i \frac{k}{l} \qquad i = 0, 1, 2 \dots n$$

ganze Functionen erster Dimension der Parameter sein; da die c_i keinen gemeinsamen Theiler haben sollen, ist dies nur so möglich, dass die Function l constant ist und dann *entweder* die c_i constant sind und k eine ganze Function erster Dimension der y und z ist, *oder* dass k constant ist, während die c_i lineare Functionen der Parameter sind. Im ersten Falle hätte, gegen unsere Annahme, $f(x;y;z)$ einen von den Parametern unabhängigen Factor; daher ist nur der zweite möglich.

Also ergiebt sich der Bertini'sche Satz: Wenn die Function $f(x;y;z)$ in Bezug auf die x, bei unbestimmten Parametern, zerfällt, so lässt sich *entweder* ein Factor abspalten, der nur die x enthält, *oder* die Function kann mit Hilfe einer Gleichung, deren Coefficienten lineare Functionen der Parameter sind, in ein Product von ganzen Functionen zerlegt werden, die einem und demselben Büschel angehören.

Aus der gefundenen Form der Function g folgt, dass

$$\Gamma(x;\xi;y) = A(x)B(\xi) - A(\xi)B(x)$$

ist. Da es die y nicht enthält, ist es jedenfalls ein Theiler des grössten gemeinsamen Theilers der Functionen (9), falls es nicht der ganze ist. Hat $A(x;\xi)$ noch weitere Factoren, so kann deren Product nur ein von y unabhängiger Theiler von $\Delta(x;\xi;y)$ sein, etwa in der Weise dass

$$\Delta(x;\xi;y) = \Delta'(x;\xi)\cdot\Delta''(x;\xi;y)$$

wo Δ' und Δ'' ganze Functionen der Argumente sind und

$$A(x;\xi) = \big(A(x)\,B(\xi) - A(\xi)\,B(x)\big)\,\Delta'(x;\xi)$$

ist. Ist nun $A(\xi;x) = c\,A(x;\xi)$, wo $c = +1$ oder -1 ist, so folgt $\Delta'(\xi;x) = -c\,\Delta'(x;\xi)$. Wäre $c = +1$ so würde $\Delta'(x;x) = 0$ sein und $\Delta(x;x;y)$ verschwinden, gegen das Resultat in § 4. Demnach ist $c = -1$, und

$$\Delta'(\xi;x) = \Delta'(x;\xi),$$
$$A(\xi;x) = -A(x;\xi).$$

Freiburg i. Br., im November 1892.

Nachtrag zu vorstehender Abhandlung.

§ 7.

Nachdem der vorstehende Aufsatz schon gesetzt war, bin ich darauf aufmerksam geworden, dass eine im § 6 vorkommende Folgerung doch nicht ganz so selbstverständlich ist, wie sie dort erscheint, und einer weiteren Ausführung bedarf. Es ist dort nämlich bewiesen, dass die Function $g(x;y;z;w)$, wenn sie für die unbestimmten Werthe ξ der x verschwinden soll, von den Parametern ganz unabhängig und eindeutig bestimmt ist, und daraus schliesse ich, dass g die Form

$$A(x) - \lambda B(x)$$

hat. Dieser Schluss soll hier genauer durchgeführt werden.

In § 3 ist gezeigt, dass die Gleichungen (4) und (5) nur *eine* Wurzel w gemein haben, die eine rationale Function der ξ und der y ist und mit $W(\xi;y)$ bezeichnet wurde.

Daher wird die Gleichung

$$F(y_1 y_2 \ldots y_q;\, z;\, w) = 0 \tag{1}$$

erfüllt, wenn man

$$z = \varphi(\xi;y), \quad w = W(\xi;y)$$

setzt. Die Gleichung ist also in Bezug auf z und w vom Geschlechte Null. Man kann daher nach einer von Gordan gegebenen Methode (diese Ann. Bd. 29, S. 318) eine Grösse ζ so finden, dass z und w Functionen von ζ und der y werden, die $\alpha(y;\zeta)$ und $\beta(y;\zeta)$ sein mögen und die in ζ rational sind; so zwar, dass diese Functionen die Gleichung (1) identisch erfüllen und jedem Werthsystem $z\,w$, welches der Gleichung genügt, nur *ein* Werth von ζ entspricht, der durch eine Function $Z(y;z;w)$ gegeben ist die in z und w rational ist. Die Gordan'sche Vorschrift zur Aufsuchung der Functionen α und β reducirt den Fall mehrerer Variabelen ξ mit Hülfe von rationalen Operationen auf den einfachen einer Variabeln, den ich in der Note: Beweis eines

Satzes über rationale Curven (diese Ann. Bd. 9, S. 163) behandelt habe. Dieser einfachste Fall aber erfordert auch nur die Operation des grössten gemeinsamen Theilers, so dass also die Functionen α und β sich aus φ und W durch rationale Operationen herleiten und daher nicht nur in ζ, sondern auch in den y rational werden, sowie auch Z eine rationale Function der y wird. Wenn die Gleichung (1) erfüllt ist, bestehen noch die Gleichungen

$$(12) \qquad \alpha(y; Z) = z, \quad \beta(y; Z) = w.$$

Da die Function $g(x; y; z; w)$ ein Theiler von $f(x; y; z)$ ist, falls die z und w durch die Gleichung (1) verbunden sind, so wird

$$(13) \qquad g\big(x; y; \alpha(y; \zeta); \beta(y; \zeta)\big) = G(x; y, \zeta),$$

das ganz und von der m^{ten} Dimension in den x, rational in den y und in ζ ist, ein Theiler von $f\big(x; y; \alpha(y; \zeta)\big)$ werden, bei ganz unbestimmtem ζ.

§ 8.

Diese Function $G(x; y; \zeta)$ ist in Bezug auf die x irreducibel. Denn eine in den x ganze, in den y und ζ rationale Function $G_1(x; y; \zeta)$, welche G theilt und deren Dimension in Bezug auf die x kleiner als m ist, ist auch ein Theiler von $f\big(x; y; \alpha(y; \zeta)\big)$. Setzt man hier die Function Z an Stelle von ζ, so folgt nach (12), dass $G_1(x; y; Z)$ ein Theiler von $f(x; y; z)$ ist, gegen unsere Annahme, dass kein Factor in den x eine kleinere Dimension als m habe.

Es muss aber G die Variable ζ auch sicher enthalten. Denn wenn ζ nicht vorkäme, so wäre G in den x ganz, in den y rational, und müsste, weil sie $f\big(x; y; \alpha(y; \zeta)\big)$ theilt, auch $f(x; y; z)$ in Bezug auf die x theilen, weil die Substitution von Z für ζ sie nicht änderte. Brächte man sie auf den kleinsten Nenner, so würde ihr Zähler $G_2(x; y)$, nach 1) § 1, $f(x; y; z)$ in Bezug auf die Variabelen und die Parameter theilen. Dies wäre aber nur möglich, wenn entweder die G_2 die y nicht enthielte oder $f(x) = 0$ wäre, was beides gegen frühere Annahmen streitet.

Es sei, mit kleinstem Nenner geschrieben,

$$G(x; y; \zeta) = \frac{H(x; y; \zeta)}{k(y; \zeta)}$$

wo H und k ganze, theilerfremde Functionen der Argumente sind. Da in g, also auch in G, ein Coefficient gleich Eins ist, so hat H keinen Factor, der von den x frei ist. Um nun die Function g so zu bestimmen, dass sie verschwindet, wenn die x den unbestimmten Werthen ξ gleich werden, hat man ζ aus der Gleichung

(14) $$H(\xi; y; \zeta) = 0$$
zu bestimmen und in G einzusetzen.

Hätte die Gleichung (14) eine mehrfache Wurzel, so müsste $H(\xi; \eta; \zeta)$ mit $\frac{\partial H(\xi; \eta; \zeta)}{\partial \zeta}$ in Bezug auf ζ einen gemeinsamen Theiler haben, oder, weil die ξ ganz beliebig sind, $H(x; y; \zeta)$ mit $\frac{\partial H(x; y; \zeta)}{\partial \zeta}$. Man bringe diesen Theiler auf kleinsten Nenner und werfe im Zähler, wenn möglich, einen Factor fort, der ζ nicht enthält; so entsteht eine ganze Function $K(x; y; \zeta)$, die H und $\frac{\partial H}{\partial \zeta}$ in Bezug auf ζ und, nach 1) § 1, folglich auch in Bezug auf die x und die y theilt. Die Function K muss die x enthalten, weil H keinen Factor hat, der von den x frei ist. Da aber H in Bezug auf die x, wie bewiesen, irreducibel ist, könnte K nur H selbst sein, und dies kann $\frac{\partial H}{\partial \zeta}$ nicht theilen.

§ 9.

Man kann nun setzen.

$$H(x; y; z) = A(x)\, k(y; \zeta) + B(x)\, k'(y; \zeta) + \cdots$$

unter $A(x)$, $B(x)$, $C(x)\ldots$ ganze linear unabhängige Functionen der x, unter $k(y; \zeta)$, $k'(y; \zeta)\ldots$ ganze Functionen der y und der ζ verstanden. Sind diese in Bezug auf ζ vom Grade $\varkappa$ höchstens, so wird auch H von diesem Grade sein, weil sonst Beziehungen zwischen den Functionen A, B, $C\ldots$ beständen. Da die Function g nur in soweit bestimmt ist, dass ein Coefficient — es braucht nicht der erste zu sein — gleich Eins ist, so kann man mit einem Coefficienten dividiren, der in ζ wirklich vom Grade $\varkappa$ ist. Sei dieser $k(y; \zeta)$ so ist

$$G(x; y; \zeta) = A(x) + B(x)\frac{k'(y; \zeta)}{k(y; \zeta)} + C(x)\frac{k''(y; \zeta)}{k(y; \zeta)} + D(x)\frac{k'''(y; \zeta)}{k(y; \zeta)} + \cdots.$$

Die Gleichung (14) habe nun die $\varkappa$ verschiedenen Wurzeln $\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \ldots$, dann ist $G(x; y; \zeta)$, für $i = 1, 2, 3 \ldots \varkappa$, eine Function, welche für die ξ verschwindet, und demnach ist (§ 3)

$$\Gamma(x; \xi; y) = \gamma(\xi; y)\, G(x; y; \zeta_i).$$

Die rechte Seite muss also für $i = 1, 2, \ldots \varkappa$ denselben Werth haben. Stellt man die Gleichungen auf, die das aussagen, so folgt aus ihnen, wegen der linearen Unabhängigkeit der Functionen A, B, $C\ldots$, dass jede der Functionen $\frac{k'}{k}$, $\frac{k''}{k}\cdots$ für alle Wurzeln der Gleichung (14) denselben Werth hat, der rational in den ξ und den y ist. Diese Werthe seien bezw. $P'(\xi; y)$, $P''(\xi; y)$, ... Dann ist $k' - P'k$ Null für die ζ_i und also durch $H(\xi; y; \zeta)$ theilbar.

Setzt man

$$H(\xi;\,y;\,\zeta) = \zeta^{\varkappa}\,.\,H_0(\xi;\,y) + \cdots,$$
$$k(y;\,\zeta) = \zeta^{\varkappa}\,.\,k_0(y) + \cdots,$$
$$k'(y;\,\zeta) = \zeta^{\varkappa}\,.\,k_0'(y) + \cdots,$$

so wird, mit Weglassung der Argumente,

$$k' - P'k = (k_0' - P'k_0)\,\frac{H}{H_0}.$$

In ähnlicher Weise folgt,

$$k''(y;\,\zeta) = \zeta^{\varkappa}k_0''(y) + \cdots$$

gesetzt,

$$k'' - P''k = (k_0'' - P''k_0)\,\frac{H}{H_0}$$

und weiter, dass

$$\frac{k'}{k}(k_0'' - P''k_0) - \frac{k''}{k}(k_0' - P'k_0) = P'k_0'' - P''k_0'$$

von ζ frei ist. Daher ist

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\,\frac{k''}{k} : \frac{\partial}{\partial\zeta}\,\frac{k'}{k} = k_0'' - P''k_0 : k_0' - P'k_0.$$

Rechts kommt ζ, links ξ nicht vor, so dass der gemeinsame Werth nur von den y abhängig $= \omega_1(y)$ ist und

$$\frac{k''}{k} = \omega_1(y)\,\frac{k'}{k} + \omega(y)$$

sich ergiebt. Die analoge Ueberlegung liefert

$$\frac{k'''}{k} = \varrho_1(y)\,\frac{k'}{k} + \varrho(y)$$

u. s. w.

womit endlich

$$G(x;\,y;\,\zeta) = A(x) + \omega(y)\,C(x) + \varrho(y)\,D(x) + \cdots$$
$$+ \frac{k'(y;\,\zeta)}{k(y;\,\zeta)}\,[B(x) + \omega_1(y)\,C(x) + \varrho_1(y)\,D(x) + \cdots]$$

sich findet, das kürzer

$$\mathsf{A}(x;\,y) + \frac{k'(y;\,\zeta)}{k(y;\,\zeta)}\cdot\mathsf{B}(x;\,y)$$

geschrieben sei, wo die A und B ganze Functionen der x und rationale der y sind, da die Functionen ω, ω_1, ϱ, $\varrho_1 \ldots$ rational in den y werden.

Kommt *nur* der Parameter z in $f(x;\,y;\,z)$ vor, so sind die vorigen Betrachtungen mit geringen Modificationen im Ausdruck anwendbar, A und B werden ganze Functionen der x allein, $\frac{k'}{k}$ eine Function

von ζ, die, wenn man ζ durch Z ersetzt, in eine rationale Function $\lambda(z, w)$ von z und w übergeht, so dass dann

$$g(x; z; w) = \mathsf{A}(x) + \lambda(z; w)\,\mathsf{B}(x)$$

sich ergiebt, wobei zwischen z und w die Gleichung $F(z, w) = 0$ besteht.

Im allgemeinen Fall wird für die Wurzeln ζ_i

$$\frac{k'(y; \zeta_i)}{k(y; \zeta_i)} = -\frac{\mathsf{A}(\xi; y)}{\mathsf{B}(\xi; y)}$$

und

$$\Gamma(x; \xi; y) = [\mathsf{A}(x; y)\,\mathsf{B}(\xi; y) - \mathsf{A}(\xi; y)\,\mathsf{B}(x; y)]\,\Omega(y)$$

wo der Factor $\Omega(y)$ zugefügt ist, damit die rechte Seite, wie es sein muss, eine ganze Function der x, der ξ und der y ist. Nach § 6 muss $\Gamma(x; \xi; y)$ von den y unabhängig sein. Γ ist aber nach der obigen Formel das Product von $\Omega(y)$ in die Matrix

$$M = \begin{vmatrix} A(x) & B(x) & C(x) \dots \\ A(\xi) & B(\xi) & C(\xi) \dots \end{vmatrix}$$

und die

$$N = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \omega(y) & \varrho(y) \dots \\ 0 & 1 & \omega_1(y) & \varrho_1(y) \dots \end{vmatrix}.$$

Wären die Producte aus $\Omega(y)$ in die Determinanten der Matrix N nicht alle von y unabhängig, so würde die Gleichung

$$\Gamma(x; \xi; y) = \Gamma(x; \xi; \eta),$$

welche die Unabhängigkeit der Γ von den y ausspricht, eine Gleichung zwischen den Determinanten von M liefern, die eine Abhängigkeit der Grössen $A(x)$, $B(x)$, $C(x) \dots$ von einander darstellen würde.

Aus der Constanz der Determinanten von $\Omega(y)\,.\,N$ folgt aber die der Functionen Ω, ω, ω_1, ϱ, $\varrho_1 \dots$. Die Functionen A und B enthalten daher y nicht mehr und können mit $\mathsf{A}(x)$ und $\mathsf{B}(x)$ bezeichnet werden, so dass

$$G(x; y; \zeta) = \mathsf{A}(x) + \frac{k'(y; \zeta)}{k(x; \zeta)}\,\mathsf{B}(x)$$

ist. Setzt man hier Z an die Stelle von ζ, so geht $\frac{k'(y; Z)}{k(y; Z)}$ in eine rationale Function $\lambda(y; z; w)$ über und man findet

$$g(x; y; z; w) = \mathsf{A}(x) + \lambda(y; z; w)\,\mathsf{B}(x)$$

wo zwischen den y, z und w die Gleichung (1) besteht. Hiermit ist die Eingangs erwähnte Lücke ausgefüllt.

Zur Volumbestimmung in der Lobatschewsky'schen Geometrie.

Von

M. Simon in Strassburg.

Lobatschewsky giebt in der Abhandlung „Géométrie imaginaire" (Crelle Bd. 17) die Ausdrücke für das Körperelement in senkrechten und Polarcoordinaten. (Formeln 34 und 38). Die Formel 34 ist von Frischauf im § 94 umgeformt, und ich möchte hierzu eine Bemerkung machen. Lobatschewsky sagt l. c. S. 302 „Les valeurs des éléments différentiels des lignes courbes, des surfaces, et du volume des corps sont les mêmes dans la géométrie imaginaire et dans la géométrie usitée." Dies ist richtig, wenn man unter „éléments différentiels" bei Flächen die unendlich kleinen Elemente zweiter Ordnung, bei Körpern die der dritten Ordnung versteht. Es ist keineswegs gestattet auf ein Stück endlicher Länge eines Streifens von unendlich kleiner Breite die Formeln der gewöhnlichen Geometrie anzuwenden. Die Differentialänderung der Fläche des rechtwinkligen Dreiecks ABC (Fig. 1) ist nur dann ydx, wenn Winkel β unendlich klein. Mit Hilfe einer Umformung des Volumelementes, welche auch für das Flächenelement practisch ist, gelingt es nicht nur die Resultate Lobatschewsky's verhältnissmässig leicht abzuleiten, sondern auch den Inhalt des Cylinders in einer eleganten Formel zu bestimmen, desgleichen den Inhalt des grösstmöglichen geraden dreiseitigen Prisma's, sowie einer Reihe anderer Körper. Es gelingt mit Hilfe dieser Form das *Raummass in der imaginären Geometrie in Gestalt eines elementaren Körpers* zu construiren; die Vortheile der „Pangeometrie" für Auswerthung bestimmter Integrale treten scharf hervor.

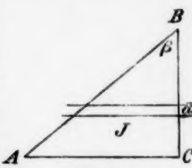


Fig. 1.

Um die Form, welche man dem Körperelemente geben kann, leichter darstellen zu können, werde die Dreiecksfläche analytisch abgeleitet. Sei ABC das bei C rechtwinklige Dreieck. Denkt man sich um B

Kreise geschlagen mit Radien l die um dl wachsen, und die Radien in den Winkelabständen $d\varphi$ gezogen, so ist das ebene Flächenelement

(1) $$d^2 S = dl \sin l d\varphi;$$

wird darin statt $\sin l$: $\sin q$ gesetzt, so gilt (1) auch für gewisse Classen krummer Flächen. Hier geht l von 0 bis l bestimmt durch

$$\cot l = \cot a \cos \varphi.$$

Also

$$ds = (\cos l - 1)\, d\varphi$$

und

$$S = \int_0^\beta \cos l\, d\varphi - \beta = J - \beta;\; J = \int_0^\beta \frac{d\varphi \cos\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi - \operatorname{tg}^2 a}},$$

$$J = \text{arc sin} = \sin\beta\cos\alpha = \text{arc sin} = \cos\alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha;$$

also

$$S = \frac{\pi}{2} - \alpha - \beta.$$

Was das Volumelement betrifft, so lege man durch den Körper irgend einen ebenen Schnitt, errichte in irgend einem Punkte dieses Schnitts ein Loth auf der Ebene: z, und lege im Abstande dz senkrechte Ebenen auf z, welche zur Grundebene consenkrecht heissen. Die Schicht zwischen zwei aufeinanderfolgenden Schnittebenen in den Abständen z und $z + dz$ theile man durch Lothe, die in den Ecken der nach der beschriebenen Weise zerlegten Fläche des Abstandes z errichtet werden, in unendlich kleine Prismata, so ist die Höhe eines solchen Prisma dz' und $\operatorname{tg}(dz') = \operatorname{tg}(dz) \,.\, \cos l$ und wegen der Dimension von dz und damit generaliter auch dz', $dz' = dz \cos l$, also

(2) $$d^3 V = dz \cos l\, dl \sin l\, d\varphi; \quad \text{oder} \quad d^3 V = dz\, d\varphi\, dl \sin l \cos l.$$

Kugel, Kegel, Cylinder.

Errichtet man auf einem grössten Kreise die Axe z senkrecht im Mittelpunkt M der Kugel, so ist, wenn 2 zuerst nach φ integrirt wird:

$$d^2 V = \pi\, dz\, 2 \sin l \cos l\, dl; \quad dV = \pi\, dz \sin^2 l;$$

wo l bestimmt wird durch $\cos l = \frac{\cos r}{\cos z}$ und somit

(3) $$V = \pi(\cos^2 r \operatorname{tg} z - z).$$

Dies ist also der Ausdruck für das Stück einer Halbkugel, welches durch eine consenkrechte zur Grundebene im Abstande z vom Mittelpunkte abgeschnitten wird. Das Volumen einer Kugelzone von der Dicke h und dem Abstande d vom Centrum, also:

(3a) $$Z = \pi\left(\frac{2\cos^2 r \sin h}{\cos(2d+h) + \cos h} - h\right) \quad \text{oder auch} \quad \pi\left(\frac{\cos^2 r \sin h}{\cos d \cos(d+h)} - h\right).$$

Aus (3) ergiebt sich für die Kugel

(3b) $$K = \pi(\sin 2r - 2r),$$

was bekannt ist. Zu bemerken ist, dass $\frac{dV}{dz} = \pi \sin^2 l$ d. h. also gleich $\frac{1}{4}$ der Kugelfläche mit dem Radius l und *nicht* gleich dem Kreis mit dem Radius l.

Kegel. Sei α der halbe Oeffnungswinkel OSP; OS gleich h die Höhe, (als Variable z), OP oder r der Radius des Grundkreises, s die Seite OP (als Variable s'). Es werden die z von der Spitze S nach der Grundfläche gezählt, so ist wieder

$$dV = \pi\, dz \sin^2 l$$

wo l bestimmt wird durch

$$\operatorname{tg} l = \sin z \operatorname{tg} \alpha, \quad V = \pi \int_0^h dz \cos^2 l - \pi h, \quad J = \int_0^h \frac{dz}{1 - \sin^2 z \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Setze

$$\operatorname{tg} z = \operatorname{tg} s' \cos \alpha$$

so ist

$$J = [s' \cos \alpha]_0^s$$

also

(4) $$V = \pi(s \cos \alpha - h).$$

Es verdient hervorgehoben zu werden, dass, wenn s und h die Seite und Höhe des Stumpfes eines geraden Kegels bezeichnen, dieselbe Formel auch den Inhalt des Stumpfes giebt; die Fläche des Mantels kann durch Abwicklung, aber noch einfacher direct bestimmt werden.

Es ist

$$d^2 M = ds' \sin r'\, d\varphi, \qquad dM = 2\pi\, ds' \sin r',$$

wo $\sin r' = \sin s' \sin \alpha$

(4a) $$M = 2\pi \sin r \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} s.$$

Cylinder. Der Cylinder ist das Gebilde, welches das Viereck $BAB'A'$ durch Rotation um die Axe BB' erzeugt. BB' steht auf BA und $B'A'$ senkrecht; AA' ist BB' parallel. BB' ist h (als Variable z) AB ist r; $A'B'$ ist r'. Wieder ist $dV = \pi\, dz \sin^2 l$ wo l bestimmt ist durch $\operatorname{tg} l = \operatorname{tg} r\, e^{-z}$ (die z werden von B an, also in der Richtung des Parallelismus gezählt)

$$dV = \frac{\pi\, dz}{\cot^2 r\, e^{2z} - 1}; \quad V = \int_0^h dV = \frac{\pi}{2} \log\left((\cot^2 r - e^{-2h}) \sin^2 r\right);$$

$$V = \frac{\pi}{2} \log \frac{\cos^2 r}{\cos^2 r_1},$$

also schliesslich

(6) $$V = \pi \log \frac{\cos r}{\cos r'},$$

welche Formel für $h = \infty$ übergeht in $V = \pi \log \cos r$. Da $\cos r = 1 : \sin \Pi(r) = 1 : \sin \alpha$ ist, so stimmt dies mit der von Lobatschewsky als Specialfall des Kegels ermittelten Formel.

Der Mantel des Cylinders kann durch Abwicklung ermittelt werden; denn dann geht der Mantel in die Fläche, begrenzt von zwei concentrischen Grenzbogen im Abstande s, der Cylinderkante über, und diese ist wie leicht zu beweisen, wenn a der kleinere und b der grössere Bogen ist, gleich $b - a$. Aber man kann den Mantel auch ganz direct ableiten. Es ist $d^2 M = ds \sin r' \, d\varphi$, wo s die variabele Kante und r' den variabeln Radius des Schnittkreises bedeutet. $dM = ds \sin r' \, 2\pi$. Es gilt nun die bemerkenswerthe Relation

$$\text{(8)} \qquad \sin r' = \sin r \, e^{-s}$$

(nicht zu verwechseln mit $\operatorname{tg} r' = \operatorname{tg} r \, e^{-h}$) und somit $dM = ds \, 2\pi \sin r e^{-s}$

$$\text{(9)} \qquad M = 2\pi (\sin r - \sin r') = 4\pi \sin \frac{r + r'}{2} \cos \frac{r - r'}{2},$$

d. h. der *Cylindermantel ist gleich der Differenz der Umfänge seines Grund- und Deckkreises.*

Das dreiseitige Prisma. Sei ABC (Fig. 2) ein Dreieck, M der Mittelpunkt seines umgeschriebenen Kreises, errichte in M ein Loth z auf der Ebene ABC und ziehe durch A, B, C, zu z die Parallelen gleichen Sinns. Schneidet man auf den drei Kanten drei gleichlange Strecken s ab, durch A', B', C', so sind diese Punkte wieder zu je zweien entsprechende Punkte auf den Parallelen, wie es A, B, C selber sind, und die Ebene $A'B'C'$ steht auf z senkrecht in M', und M' ist der Mittelpunkt des $A'B'C'$ umgeschriebenen Kreises. (Den Beweis hierfür werde ich an anderer Stelle geben). Bezeichnet man MM' mit h und den Winkel AMC (gleich $A'M'C'$), der die Neigung der ebenen AMM' und CMM' misst, mit β, so bestimmt sich der Inhalt des Körpers, begrenzt durch die Ecken AMC, $A'M'C'$ wie folgt, wenn die Lothe von M und M' auf AC resp. $A'C'$, nämlich MD und MD' mit q_0 und q_1 bezeichnet werden.

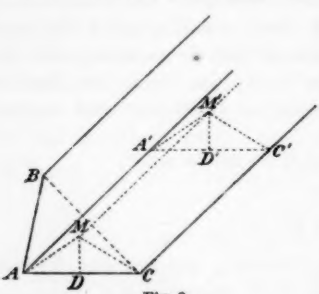


Fig. 2.

$$d^3 P = dz \, dl \, d\varphi \ \text{lin}\ l \cos l,$$

$$P = \int_0^h dz \int_0^{\frac{\beta}{2}} d\varphi \sin^2 l,$$

wo l bestimmt wird durch

$$\cot l = \cot q' \cos\varphi;$$

und

$$\cot q' = \cot q_0\, e^z,$$

$$P = \int_0^h dz \int_0^{\frac{\beta}{2}} \frac{d\varphi}{\cot^2 q' \cos^2\varphi - 1};$$

Setzt man

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg} s}{\sin q'}.$$

$$P = \int_0^h dz\, s \sin q';$$

wo s bestimmt wird durch $\operatorname{tg} s = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\sin q'$,

$$P = -\int_{q_0}^{q_1} \frac{dq\, s}{\cos q} = -\int_{q_0}^{q_1} \frac{dq}{\cos q}\,\frac{1}{2}\log\frac{1+\sin q \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1-\sin q\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}.$$

$\varkappa$ sei der zur Distanz q gehörige Parallelwinkel, alsdann ist $\frac{-dq}{\cos q} = d\varkappa$ und

$$P = \int_{\varkappa_0}^{\varkappa_1} d\varkappa \operatorname{arc}\operatorname{tg}_h \cot\varkappa \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}. \tag{10}$$

Ist $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$ gleich 1, so vereinfacht sich das Integral wesentlich. Es ist dann

$$P = [\varkappa s]_0^1 - \int_{\varkappa_0}^{\varkappa_1} \frac{\varkappa\, d\varkappa}{\cos 2\varkappa}.$$

Setzt man

$$e^{2\varkappa i} = x;\quad 2\varkappa i = \log x;\quad i\,d\varkappa = \frac{1}{2}\,\frac{dx}{x}$$

so ist

$$-J = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} \frac{\log x\, dx}{1+x^2} = -J = \frac{1}{2}[\log x \operatorname{artg} x]_{x_0}^{x_1} - \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} \operatorname{artg} x\,\frac{dx}{x},$$

$$P = [\varkappa s]_0^1 + \frac{1}{2}[\log x \operatorname{artg} x]_{x_0}^{x_1} - \frac{1}{2}\left|\sum_0^\infty \frac{\varepsilon^\varkappa x^{2\varkappa+1}}{(2\varkappa+1)^2}\right|_{x_0}^{x_1}, \tag{10a}$$

wo ε gleich -1. Ist s_0 die Parallele zu $\varkappa_0$, und s_1 gleich 0, so geht P über in

$$P = \frac{1}{2}\sum_0^\infty \frac{\varepsilon^\varkappa}{(2\varkappa+1)^2}; \tag{11}$$

wegen der Benutzung semiconvergenter Reihen, z. B. für arctg — 1 etc., muss diese Formel verificirt werden. Es ist:

$$P = -\frac{1}{2}\sin\beta\int_{s_0}^{s_1}\frac{s\,ds}{\cos^2 s - \cos^2\frac{\beta}{2}}$$

und wenn $\frac{\beta}{2}$ gleich $\frac{\pi}{4}$, so ist

$$P = -\int_{s_0}^{s_1}\frac{s\,ds}{\cos 2s};$$

Setze $e^{-2s} = \operatorname{tg}\omega$, d. h. also $\omega = \frac{1}{2}\Pi(2s)$ d. h. gleich dem halben zur Distanz $2s$ gehörigen Parallelwinkel, so ist:

$$P = -\frac{1}{2}\int_{\omega_0}^{\omega'}\log\operatorname{tg}\omega\,d\omega = -\frac{1}{2}J.$$

$$J = \int_{\omega_0}^{\omega'}(\log i\,d\omega) - \int_{\omega_0}^{\omega'}\log\frac{1+e^{2\omega i}}{1-e^{2\omega i}}\cdot d\omega,$$

$$(12)\qquad J = \left[\frac{\pi}{2}i\,\omega\right]_{\omega_0}^{\omega'} + i\left[\sum_0^\infty\frac{e^{2\omega i(2k+1)}}{(2k+1)^2}\right]_{\omega_0}^{\omega'},$$

$$(12\text{a})\qquad J = \left[\frac{\pi}{2}i\omega\right]_{\omega_0}^{\omega'} + i\left[\cos 2\omega(2k+1)\right]_{\omega_0}^{\omega'} - \left[\sin 2\omega(2k+1)\right]_{\omega_0}^{\omega'}.$$

Da aber hier sowohl der arithmetischen als der geometrischen Bedeutung des Integrals nach J nicht complex sein kann, so muss der imaginäre Theil von J verschwinden, und *man erhält auf diesem immerhin nicht gewöhnlichen Wege durch Vermittlung der imaginären Geometrie die Formel*

$$(13)\qquad \frac{\pi}{4}\omega = \sum_0^\infty\frac{\sin^2(2k+1)\omega}{(2k+1)^2},$$

giltig zwischen $\omega = 0$ und $\omega = \frac{\pi}{4}$; für $\omega = \frac{\pi}{4}$ ist sie leicht zu verificiren, und giebt die bekannte Formel

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum\frac{1}{(2k+1)^2};$$

einmal gefunden ist die Formel (13) durch die Theorie der Fourier'schen Reihen unschwer zu beweisen. J vereinfacht sich also und geht über in

$$(14)\qquad J = \sum_0^\infty\frac{\sin(2k+1)\omega_0 - \sin(2k+1)\omega'}{(2k+1)^2}.$$

Es ergiebt sich hieraus für das quadratische grade Prisma dessen Grundfläche den Radius des eingeschriebenen Kreises q_0 und dessen Deckfläche q_1 hat

(14a) $$V = -2J,$$

wo ω_0 und ω' die halben zu den Seiten der Quadrate gehörigen Parallelwinkel sind. Ist die Höhe des Prisma unendlich, so ist $\omega' = \frac{\pi}{4}$ und wenn ω_0 gleich 0, so erhält man

(15) $$V = 2\sum \frac{\varepsilon^k}{(2k+1)^2}$$

und hieraus für *das grösstmögliche grade dreiseitige Prisma*, d. h. *das Prisma dessen Grundfläche das Maximaldreieck und dessen Höhe unendlich ist*

(16) $$P = \sum_0^\infty \frac{\varepsilon^k}{(2k+1)^2}.\text{*)}$$

Die Formel (16) ist leicht zu verificiren, da

$$J = \int_{\omega_0}^{\omega'} \log \operatorname{tg} \omega \, d\omega = \int_{z_0}^{z_1} \frac{dz}{1+z^2}$$

für $\omega_0 = 0$ und $\omega' = \frac{\pi}{4}$ übergeht in

$$\int_0^1 \frac{\log z \, dz}{1+z^2},$$

welches von Bidone allerdings in nicht ganz unanfechtbarer Weise ausgewerthet (Turiner Akad. 1812, S. 332) und gleich $-P$ gefunden ist; gleichzeitig ergiebt sich (durch Vertauschung der Integration)

(16a) $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left(1 - \frac{1}{2\cos^2\varphi}\right) d\varphi = \int_0^1 \frac{\log z \, dz}{1+z^2};$$

Rotationskörper. Da die Formel $dP = \frac{1}{2} dz\beta \sin^2 l$ für alle Umdrehungskörper gilt, welche durch Rotation um die z-Axe um den Winkel $\beta\left(\frac{180}{\pi}\beta\right)$ erzeugt sind, so bleiben damit die Formeln für das Verhältniss des Kugelzweiecks zur Kugel und damit die Formeln für den Inhalt des sphärischen Dreiecks aus der Euclidischen Geometrie

*) Herr Mertens hat meine Vermuthung, dass dieser Ausdruck mit den Γ Functionen zusammenhänge, bestätigt.

giltig. Für die Kugelcalotte ergiebt sich, wenn ϱ den Radius ihres Grundkreises und h ihre Höhe bezeichnet.

(17) $$\mathrm{Cal} = \pi (\cos \varrho \cos h - h).$$

Für den Kugelsector, dessen Oeffnungswinkel 2α ist, ergiebt sich als Verhältniss zur Kugel:

(17 a) $$S = K \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

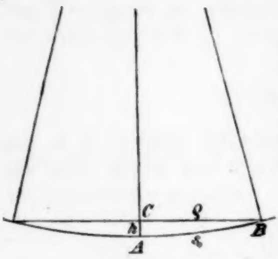


Fig. 3.

Für den Körper der durch Umdrehung des Grenzbogens AB (Fig. 3) mit der Abscisse h und der Ordinate ϱ entsteht, erhält man:

(18) $$V = \pi\left(\frac{1}{2} \sin^2 \varrho - h\right),$$

und da $h = \log \cos \varrho$, so ist $h\pi$ *der Inhalt des Cylinders, der durch Umdrehung des Streifens CBD um die Axe AC entsteht,* somit der Inhalt des Körpers der durch Umdrehung eines Grenzsectors, dessen Bogen $2 s_0$ ist, um seine Axe entsteht

(18a) $$V = \frac{1}{2} s_0^2 \pi.$$

Dies Resultat kann man direct ableiten, da das Volumenelement des betreffenden Körpers gleich ist einem gewöhnlichen Cylinder (euclidisch), dessen Grundfläche der Kreis auf der Grenzfläche ist, und dessen Höhe dz; somit ist

$$dV = dz\, s^2 \pi = dz\, \pi\, e^{-2z} s_0^2;$$

$$V = \pi \int_0^\infty e^{-2z}\, dz\, s_0^2 = \frac{1}{2} s_0^2 \pi.$$

Pyramide. Hauptsatz: Ist S (Fig. 4) die Spitze, SF die Höhe, SAC eine beliebige Seitenfläche, $F'A'C'$ irgend ein Schnitt senkrecht zur Höhe, so gehört $A'C'$ zur Axe SG, der Höhe der Seitenfläche.

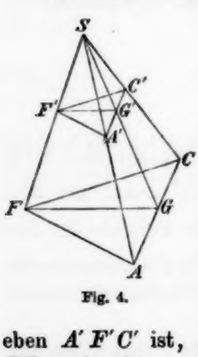


Fig. 4.

AC senkrecht FSG weil senkrecht auf SG und SF, ebenso ist $A'C'$ senkrecht auf $F'SG'$; (Beweis: das Loth in G' auf $F'SG'$ oder FSG liegt mit AC, dem Lothe auf derselben Ebene, in ein und derselben Ebene also in ASC, es liegt aber auch in der Ebene $A'F'C'$, denn die Senkrechte auf $F'G'$ in der Ebene $A'F'C'$ in F' steht auf $F'SG'$ senkrecht, liegt also mit unserem Lothe in G' in einer Ebene, welche eben $A'F'C'$ ist, also ist $A'C'$ unser Loth). Also steht $A'C'$ auf SG senkrecht. — Für die Volumberechnung kann man sich auf die

dreiseitige Pyramide $SFAG$ beschränken, so dass also die Seitenflächen FSG und ASG einen rechten Winkel bilden; es empfiehlt sich bei der Ausdehnung der Untersuchung eine eigene Figur 5 zu entwerfen.

Volumen der Pyramide und des Prismatoid. Bezeichnungen: $SFCA$ (s. Fig.) sei die Pyramide, SF senkrecht FCA und $F'C'A'$. Winkel $CFA = C'FA' = \beta$; CFD (bezw. $C'F'D'$) sei φ; FSC ($F'SC'$) sei σ, $SC'F'$ sei α; $F'C'$ sei q, $FC = q_0$; $SF' = z$; $SF = h$; $F'D' = l$; $FD = l_0$; $AC = s_0$; $D'C'$ und $A'C'$ werden mit s bezeichnet werden, $SC' = c'$; $SC = c$; $FA = f_0$. Die Bezeichnungen schliessen sich den früheren an. $\varkappa$ ist Parallelwinkel von q.

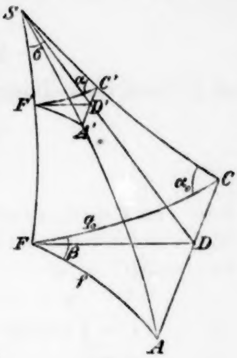


Fig. 5.

Es ist:

$$\cot l = \cot q \cos \varphi; \quad \cot q \sin z = \cot \sigma;$$
$$\operatorname{tg} s = \sin q \operatorname{tg} \beta; \quad \cos z \sin \sigma = \cos \alpha;$$
$$\operatorname{tg} s \cot \beta = \cot \varkappa; \quad \sin \alpha = \sin \varkappa \cos \sigma.$$

Constanten sind s_0, q_0; h, σ und β, sowie α_0, c_0 und f_0. Durch drei von ihnen lassen sich die beiden andern ausdrücken. Winkel werden stets mit griechischen Buchstaben; Masszahlen von Längen mit lateinischen Buchstaben bezeichnet, und die trig. Functionszeichen, welche sich auf letztere beziehen, sind stets hyperbolisch.

Es war:

$$d^3 P = dz\, d\varphi\, dl \sin l \cos l; \quad d^2 P = \frac{1}{2}\, dz\, d\varphi \sin^2 l.$$

Führt man statt φ die Variabele $D'C'$ oder s ein, durch:

$$\sin q \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} s$$

so ist

$$2dP = dz\, s \sin q,$$

weil s für $\varphi = 0$ auch $= 0$ ist.

$$2P = \int_0^h dz \sin q \,.\, s.$$

Es ist

$$dz \sin q = -\, d\alpha,$$

also

$$\text{(I)} \qquad 2P = \int_0^{\frac{\pi}{2} - \sigma} s\, d\alpha.$$

Ist $h = \infty$, $(\sigma = 0)$, so ist $\alpha = \varkappa$, und man erhält wie beim Prisma die Formel

$$\frac{2P}{\sin 2\beta} = \int_0^{s_0} \frac{s\,ds}{\cos 2s - \cos 2\beta}.$$

Da $2P$ dann auch gleich

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \log \frac{1 + \operatorname{tg}\beta \cot\alpha}{1 - \operatorname{tg}\beta \cot\alpha}\, d\alpha,$$

so ist auch dieses Integral ausgewerthet, und geht für $\beta = 45$ wieder in

$$2P = \int_0^{s_0} \frac{s\,ds}{\cos 2s}$$

über. Ist $\sigma \neq 0$, so stösst man bei directer Integration nach, z, s, q, oder α auf Schwierigkeiten. Führt man c ein durch $\cos\sigma \cot z = \cot c$ wo $c = SC'$, so ist

$$2P = \int_0^{c_0} d\,(\operatorname{artg} = \cos c \operatorname{tg}\sigma) \operatorname{arc} \operatorname{tg}_h = \operatorname{tg}\beta \sin c \sin\sigma.$$

Die Integration bietet keine Schwierigkeit; interessant ist nur das Integral

$$J = \int_0^c \frac{dv}{1 + \sin^2\sigma \sin^2 c},$$

welches durch $\sin c = \operatorname{tg}\vartheta$ gefunden wird.

Man führt $\varkappa$ (q' nach Lobatschewsky) ein, so ist

$$2P = -\alpha_0 s_0 + \frac{1}{2} \sin 2\beta \int_{\varkappa_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\operatorname{arc} \sin \sin\varkappa \cos\sigma)\, d\varkappa}{\cos^2\beta - \cos^2\varkappa};$$

da $\varkappa$ stets grösser als β, so tritt unter dem $\int$ keine Divergenz ein. Man setze $\cos\varkappa = \cos\beta \operatorname{tg} f$ wo $f = F'A'$ und erhält

$$2P = -\alpha_0 s_0 + \sin\beta J;$$

wo

$$J = \int_0^f \frac{\operatorname{arc} \sin \cos\sigma \sqrt{1 - \cos^2\beta \operatorname{tg}^2 f}}{\sqrt{1 - \cos^2\beta \operatorname{tg}^2 f}}\, df;$$

$$\sqrt{1 - \cos^2\beta \operatorname{tg}^2 f} = \sqrt{x}, \quad \text{und} \quad -\cos^2\beta \operatorname{tg}^2 f = z;$$

Wenn $\frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{arc} \sin \cos\sigma \sqrt{x}$ mit $f(x)$ oder auch f bezeichnet wird, *so genügen die Ableitungen der $f(x)$ der Differentialgleichung*

$$(3) \quad f^{(k)} = -f^{(k-1)}\frac{(2k-1)}{x} + \frac{1\,.\,3\,.\,.\,.\,(2k-1)}{2^k x}\,\frac{\cos\sigma^{2k-1}}{(\sqrt{1-\cos^2\sigma\, x})^{2k-1}}.$$

Also für $x = 1$ ergiebt sich, wenn $\varepsilon = -1$

$$(3\,\mathrm{a}) \qquad f^{(k)}(1) = \varepsilon^{k-1}\frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,.\,.\,(2k-1)}{2^k}\int_0^{\varphi}\mathrm{tg}^{2k}\varphi\, d\varphi;$$

wo $\varphi = \frac{\pi}{2} - \sigma$ und $f(1) = \varphi$, hieraus:

$$(3\,\mathrm{b}) \quad \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{arc}\sin\sin\varphi\sqrt{x} = \sum_0^{\infty}\frac{(x-1)^k}{k!}\int_0^{\varphi}\mathrm{tg}^{2k}\varphi\, d\varphi\ \varepsilon^{k-1}\frac{1.3.5\ldots(2k-1)}{2^k}.$$

Die Taylor'sche Entwicklung giebt

$$\mathrm{arc} = \sum_0^{\infty}\frac{z^k}{k!}\left(\frac{d^k f}{dz^k}\right)_{z=0};$$

Es ist

$$\frac{d^k f}{dz^k} = \frac{d^k f}{dx^k}$$

und wenn $z = 0$ ist $x = 1$, also mittelst (3a)

$$(4)\ 2P = \alpha_0 s_0 - \sin\beta\sum_0^{\infty}{}^{k}\int_0^{f}\mathrm{tg}^{2k} f\, df\int_0^{\varphi}\mathrm{tg}^{2k}\varphi\, d\varphi\cdot\frac{\cos^{2k}\beta\ 1.3\ldots(2k-1)}{k!\ 2^k}.$$

Hierzu erhält man die entsprechende Formel durch Vertauschung von s_0 mit h.

Die directe Behandlung des Integrals nach x *führt fast ohne alle Rechnung zu der bemerkenswerthen Formel über die Binomialcoefficienten* $\binom{k}{p}$

$$(5) \qquad \sum_{\nu}^{p-1}{}^{\lambda}\varepsilon^{p-1-\lambda}\binom{k}{\lambda}\binom{k-1-\lambda}{p-1-\lambda}\cdot\binom{\lambda}{\nu} = \binom{k}{\nu}$$

gültig für jedes k.

Die Integration in der Reihenfolge l, z, φ führt auf

$$2P = \left(\int^{\beta} d\varphi\,\frac{1}{\lambda}\,\mathrm{arc}\,\mathrm{tg}_h = \lambda\,\mathrm{tg}\,h\right) - h\beta,$$

wo

$$\lambda = \frac{1}{\cos FSD} = \frac{1}{\cos\vartheta}.$$

Da $\mathrm{tg}\,h = \mathrm{tg}\,SD\cos\vartheta$, so ist diese Formel die Lobatschewsky's, Crelle, Bd. VI, S. 317. Es ist $\lambda\,\mathrm{tg}\,h = \mathrm{tg}\,SD$, also < 1.

$$J = \cos\sigma \int_0^\beta \frac{d\varphi \operatorname{arc\,tg}_h = \operatorname{tg} c \sqrt{1 + \sin^2\sigma \operatorname{tg}^2\varphi}}{\sqrt{1 + \sin^2\sigma \operatorname{tg}\varphi}},$$

wo

$$\operatorname{tg} c = \frac{\operatorname{tg} h}{\cos\sigma}, \quad c = SC.$$

Setze $\sin^2\sigma \operatorname{tg}^2\varphi = \xi$, so ist

$$J = \cos\sigma \int_0^\beta d\varphi \sum_0^\infty \frac{\xi^k}{k!} \left(\frac{d^k \dfrac{\operatorname{arc\,tg}_h = \operatorname{tg} c\sqrt{1+\xi}}{\sqrt{1+\xi}}}{d\xi^k} \right)_{\xi=0},$$

$$1 + \xi = x; \quad \frac{d^k f(\xi)}{d\xi^k} = \frac{d^k f(x)}{dx^k}.$$

Es gilt die Differentialgleichung k^{ter} Ordnung

(6) $$f^{(k)} = \frac{-(2k-1)}{2x} f^{(k-1)} + \frac{k!}{2x} \frac{\operatorname{tg}^{2k-1} c}{(1-\operatorname{tg}^2 c)^k}; \quad f(1) = c$$

also

(6a) $$f^{(k)}(1) = k! \int_0^c \sin^{2k} c\, dc,$$

(6b) $$\frac{\operatorname{artg}_h = \operatorname{tg} c\sqrt{1 + \sin^2\sigma \operatorname{tg}^2\varphi}}{\sqrt{1 + \sin^2\sigma \operatorname{tg}^2\varphi}} = \sum_0^\infty \operatorname{tg}\varphi^{2k} \sin\sigma^{2k} \int_0^c \sin^{2k} c\, dc$$

(giltig wenn $\sin^2\sigma \operatorname{tg}^2\varphi < 1$)

(7) $$2P = -h\beta + \cos\sigma \sum_0^\infty \sin^{2k}\sigma \int_0^\beta \operatorname{tg}^{2k}\varphi\, d\varphi \int_0^c \sin^{2k} c.dc.$$

Das Prismatoid. Sei ABC (Fig. 6) ein Dreieck, das einen umschriebenen Kreis M besitzt. Man errichte in A, B, C drei gleich lange Lothe AA', BB', CC', der begrenzte Körper heisse Prismatoid. Das in M errichtete Loth trifft $A'B'C'$ im Mittelpunkt des ihm umschriebenen Kreises M' und MM' steht auf beiden Ebenen senkrecht. Jeder Schnitt senkrecht zur Höhe MM' schneidet jede Seitenfläche z. B. $AA'C'C$ in einer zu AC und $A'C'$ consenkrechten. Man kann sich daher wieder beschränken auf den Fall, wo das Dreieck AMC bei C einen rechten Winkel hat,

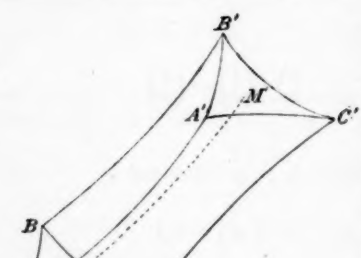


Fig. 6.

und AC und $A'C'$ damit auf $M'C'C$ senkrecht stehen. AMO sei wieder β etc. Es ist wieder $d^3V = dz\, dl\, d\varphi \sin l \cos l$, und

$\cot l = \cot q \cos \varphi$, $\operatorname{tg} q = \operatorname{tg} q_0 \cos z$; $\operatorname{tg} s = \operatorname{tg} \beta \sin q$. Die Integrationen gestalten sich ganz ähnlich wie bei der Pyramide, kann doch der betreffende Körper aufgefasst werden als Differenz der Pyramiden mit den Höhen $\frac{\pi}{2} i$ und $\frac{\pi}{2} i - h$.

$$2V = \int_0^\beta d\varphi \frac{1}{\lambda} \operatorname{artg}_h = \frac{\operatorname{tg} h}{\lambda} - \beta h = J - h\beta; \; \lambda = \sqrt{a^2 b^2 \operatorname{tg}^2 \varphi},$$

für

$$\varphi = 0, \; \lambda = \frac{1}{\cos q_0}.$$

Setze

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{arctg} \operatorname{tg}_h = \frac{\operatorname{tg} h}{\sqrt{x}},$$

Die Function $f(x)$ genügt der Differentialgleichung k^{ter} Ordnung

$$f^{(x)} = -\frac{(2k-1)}{2x} f^{(k-1)} + \frac{\varepsilon^k (k-1)!}{2x} \frac{\operatorname{tg} h}{(x - \operatorname{tg}^2 h)^k}; \tag{8}$$

für

$$\varphi = 0, \; x = \frac{1}{\cos^2 q_0},$$

$$f(x_0) = \cos q_0 \operatorname{arc} \operatorname{tg}_h = \operatorname{tg} h \cos q_0 = \cos q_0 \, p,$$

$$f^{(k)}(x_0) = \varepsilon^k k! \cos q_0^{2k+1} \int_0^p \cos^{2k} p \, dp, \tag{8a}$$

$$\frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg}_h = \operatorname{tg} h (\sqrt{a^2 - b^2 \operatorname{tg}^2 \varphi})^{-1}}{\sqrt{a^2 - b^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \sum_0^\infty \frac{b^{2k} \operatorname{tg}^{2k} \varphi}{a^{2k+1}} \int_0^p \cos^{2k} p \, dp. \tag{8b}$$

$$2V = \frac{1}{a} \sum_0^\infty \operatorname{tg} q_0^{2k} \int_0^\beta \operatorname{tg} \varphi^{2k} d\varphi \int_0^p \cos^{2k} p \, dp, \tag{9}$$

wo $a = \cos q_0$ ist.

Das Raummass. Die Frage nach dem Raummass ist bisher unerörtert geblieben. Als Flächenmass dient das Quadrat auf der Grenzfläche, dessen Seite das Längenmass k ist, es liegt nahe, als Raummass den Grenzwürfel anzusehen, leider existirt er nicht. Lobatschewsky und Bolyai, als sie die Sätze der euclidischen Ebene auf die Grenzfläche übertrugen, haben übersehen, dass die Grenzfläche nicht wie die Ebene umkehrbar, also Congruenz und Symmetrie auftreten; die Untersuchung wird an andrer Stelle mitgetheilt werden.

Als Flächenmass kann man das Abstandsrechteck wählen, dessen Grundlinie k und dessen Höhe die Paralleldistanz zu 45^0 ist, da dessen Fläche k^2 ist. Als Raummass kann der Körper dienen, der entseht,

wenn ein rechtwinkliges Dreieck sich so bewegt, dass es stets auf einer Geraden senkrecht bleibt, die im Endpunkte der Hypotenuse senkrecht auf der Ebene des Dreiecks steht. $A\alpha X$ sei das bei α rechtwinklige Dreieck, $XZ = h$ senkrecht $A\alpha X$. Es ist $d^3 V = dz\, dl\, d\varphi \sin l \cos l$ und da z von l und φ ganz unabhängig

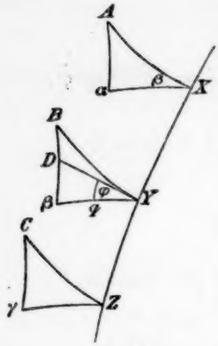


Fig. 7.

$$d^2 V = h\, dl\, d\varphi \sin l \cos l; \qquad d V = \frac{1}{2} h\, d\varphi \sin^2 l$$

wo

$$\cot l = \cot q \cos \varphi; \; d V = \frac{1}{2} \frac{h\, d\varphi}{\cos^2 \varphi \cot^2 q - 1};$$

was wieder durch die Substitution $\sin q \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} s$ übergeht in

$$d V = \frac{1}{2} h \sin q\, ds,$$

somit wenn $s = A\alpha$ und $q = \alpha X$ ist

$$V = \frac{1}{2} h s \sin q.$$

Man sieht, es ist gleichgiltig, ob das Dreieck $A\alpha X$ sich längs XZ oder αXZ sich längs $A\alpha$ bewegt. Ist $h = 2k$; $s = k$ und q gleich der Distanz, deren Parallelwinkel $\frac{\pi}{4}$, so ist $V = 1$ bezw. k^3 und *das Raummass ist in diesem Körper construirt.* Wir haben den Satz: *Schneidet man auf der Schnittgeraden zweier Ebenen die Strecke $2k$ ab, zieht zu ihr in dem Abstande für $\frac{\pi}{4}$ die Abstandslinie, und errichtet in den Punkten dieser Linie die Lothe auf der ersten Ebene bis an die zweite, so ist das aus dem Keil ausgeschnittene Stück das Raummass, wenn die Lothe die Länge k haben.* (Neigungswinkel des Keils $\beta = \text{arc tg} = \text{tg}_k 1$).

Strassburg i. E.

Bemerkung zu dem Existenzbeweise der Integrale partieller Differentialgleichungssysteme.

Von

Leo Koenigsberger in Heidelberg.

In meiner Arbeit „Ueber die Integrale partieller Differentialgleichungsysteme beliebiger Ordnung"*) habe ich für beliebige partielle Differentialgleichungsysteme die Frage nach der Existenz eindeutiger Integrale auf die Untersuchung desjenigen Integrales der partiellen Differentialgleichung

$$(1) \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial X_1} + 1\right)\left(T + \mu - 1 + (\mu - 1)\frac{\partial T}{\partial X_2}\right) = -mA$$

in der Umgebung von $X_1 = 0$, $X_2 = 0$ reducirt, für welches

$$(2) \quad (T)_{X_1=0} = 1 - X_2 - \frac{mAX_2^2}{1-X_2}, \text{ also } \left(\frac{\partial T}{\partial X_2}\right)_{X_1=0} = -1 + \frac{mA_2X_2(X_2-2)}{(1-X_2)^2}$$

wird, wobei μ und m beliebig gegebene positive ganze Zahlen, A beliebig positiv, nur über eine bestimmte Grenze hinausliegend gewählt werden durfte, und diese Untersuchung vermöge bekannter Beziehungen zwischen dem vollständigen und allgemeinen Integrale partieller Differentialgleichungen erster Ordnung durchgeführt. Da es jedoch wesentlich ist, den Existenzbeweis, ohne, wie es sonst geschehen, die *Form* der partiellen Differentialgleichungsysteme zu specialisiren, und, ohne schon die allgemeinen Lagrange'schen Sätze zu Hülfe zu nehmen, unmittelbar zu führen, so halte ich es nicht für überflüssig, eine äusserst einfache Discussion des Integrales der Differentialgleichung (1) hier darzulegen.

*) Journal für Mathematik Bd. CIX, H. 4. Es mag hier bemerkt werden, dass durch ein Versehen auf Seite 270 die Anfangswerthe $\Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_m$ durch die Ausdrücke $\dfrac{A}{1-(x_2+x_3+\cdots+x_\mu)}$ statt durch

$$A\,\frac{(x_2+x_3+\cdots+x_\mu)^2}{1-(x_2+x_3+\cdots+x_\mu)}$$

bestimmt wurden, wodurch die weiteren Schlussfolgerungen nicht berührt werden.

Setzt man

$$(3)\qquad T+\mu-1=z,\quad X_1=x,\quad X_2=y,\quad mA=a,$$

so ist die Natur desjenigen Integrales der partiellen Differentialgleichung

$$(4)\qquad \left(\frac{\partial z}{\partial x}+1\right)\left(z+(\mu-1)\frac{\partial z}{\partial y}\right)=-a,$$

in welcher a eine beliebige, über eine bestimmte Grenze hinausliegende positive Zahl bedeutet, zu untersuchen, welches für $x=0$ den Werth

$$(5)\qquad (z)_{x=0}=\mu-y-\frac{ay^2}{1-y}$$

annimmt.

Man sieht, dass (4) genügt wird, wenn man

$$(6)\qquad z+(\mu-1)\frac{\partial z}{\partial y}=\varphi(x,y),\quad \frac{\partial z}{\partial x}+1=-\frac{a}{\varphi(x,y)}$$

setzt, worin φ eine willkürliche Function bedeutet, welche der Bedingung genügt, dass

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y}=\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x}$$

oder

$$\frac{a}{\varphi^2}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{1}{\mu-1}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{1}{\mu-1}\left(\frac{a}{\varphi}+1\right)$$

oder

$$(7)\qquad a\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\varphi^2}{\mu-1}\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\varphi(a+\varphi)}{\mu-1}$$

ist, und zwar wird es sich um diejenige Function $\varphi(x,y)$ handeln, welche nach (5) und (6) der Bedingung genügt

$$(8)\qquad (\varphi)_{x=0}=1-y-a\frac{y^2}{1-y}+a(\mu-1)\frac{y(y-2)}{(1-y)^2}.$$

Da nun (7) eine lineare Differentialgleichung, deren allgemeines Integral, wie unmittelbar zu sehen,

$$(9)\qquad x+\varphi-a\log(a+\varphi)=\omega\left(\frac{y}{\mu-1}+\log(a+\varphi)-\log\varphi\right)$$

ist, in welchem ω eine willkürliche Function bedeutet, so bleibt nur noch die Frage zu beantworten, welcher Natur ω sein muss, damit φ für $x=0$ den durch (8) gegebenen Werth annimmt. Setzt man nun in (9) $x=0$ und für φ den angegebenen Werth, so erhält man

$$\begin{aligned}(10)\quad & 1-y-a\frac{y^2}{1-y}+a(\mu-1)\frac{y(y-2)}{(1-y)^2}\\ &\quad -a\log\left\{a+1-y-a\frac{y^2}{1-y}+a(\mu-1)\frac{y(y-2)}{(1-y)^2}\right\}\\ &=\omega\left\{\frac{y}{\mu-1}+\log\left(a+1-y-a\frac{y^2}{1-y}+a(\mu-1)\frac{y(y-2)}{(1-y)^2}\right)\right.\\ &\qquad\left.-\log\left(1-y-a\frac{y^2}{1-y}+a(\mu-1)\frac{y(y-2)}{(1-y)^2}\right)\right\}\end{aligned}$$

oder, da a beliebig grösser als die Einheit angenommen werden durfte, durch Entwicklung der einzelnen Theile nach positiven steigenden ganzen Potenzen von y

$$(11)\qquad 1 - a\log(1+a) + \frac{a-1-2a\mu}{1+a}y + \cdots$$
$$= \omega\left\{\log(1+a) + \frac{1+\mu a+2a^2(\mu-1)^2}{(\mu-1)(a+1)}y + \cdots\right\}.$$

Setzt man

$$(12)\qquad \log(1+a) + \frac{1+\mu a+2a^2(\mu-1)^2}{(\mu-1)(a+1)}y + \cdots = t,$$

so ergiebt sich bekanntlich durch Umkehrung

$$(13)\quad y = \frac{(\mu-1)(a+1)}{1+\mu a+2a^2(\mu-1)^2}\big(t-\log(1+a)\big) + A_2\big(t-\log(1+a)\big)^2 + \cdots$$

und somit nach (10)

$$(14)\quad \omega(t) = 1 - a\log(1+a) + \frac{(a-1-2a\mu)(\mu-1)}{1+\mu a+2a^2(\mu-1)^2}\big(t-\log(1+a)\big)$$
$$+ B_2\big(t-\log(1+a)\big)^2 + \cdots,$$

wodurch, nachdem nunmehr der Charakter der Function $\omega(t)$ bestimmt ist, aus Gleichung (9)

$$(15)\qquad x + \varphi - a\log(a+\varphi) = 1 - a\log(1+a)$$
$$+ \frac{(a-1-2a\mu)(\mu-1)}{1+\mu a+2a^2(\mu-1)^2}\left\{\frac{y}{\mu-1} + \log(a+\varphi) - \log\varphi - \log(1+a)\right\}$$
$$+ B_2\left\{\frac{y}{\mu-1} + \log(a+\varphi) - \log\varphi - \log(1+a)\right\}^2 + \cdots$$

folgt, und es bleibt nur noch zu untersuchen, wie sich diejenige Lösung φ dieser Gleichung, welche für $x=0$, $y=0$ den durch (8) gegebenen Werth $(\varphi)_{x=0,y=0} = 1$ annimmt, der, wie man durch Einsetzen in (15) sieht, dieser Gleichung in der That genügt, in der Umgebung der Werthe $x=0$, $y=0$ als Function dieser Variabeln entwickeln lässt. Da aber die nach φ genommene Ableitungsgleichung von (15)

$$(16)\qquad 1 - \frac{a}{a+\varphi} = \frac{(a-1-2a\mu)(\mu-1)}{1+\mu a+2a^2(\mu-1)^2}\left(\frac{1}{a+\varphi} - \frac{1}{\varphi}\right)$$
$$+ 2B_2\left\{\frac{y}{\mu-1} + \log(a+\varphi) - \log\varphi - \log(1+a)\right\}\left(\frac{1}{a+\varphi} - \frac{1}{\varphi}\right) + \cdots,$$

wie unmittelbar zu sehen, nicht durch $x=0$, $y=0$, $\varphi=1$ befriedigt wird, so wird, da die Gleichung (15) nach positiven, steigenden, ganzen Potenzen von x, y, $\varphi-1$ entwickelbar ist, nach dem bekannten Cauchy'schen Satze von der Entwicklung einer Grösse, die mit anderen durch eine Function, welche in der Umgebung specieller Werthe den Charakter einer ganzen hat, verbunden ist, die Function φ in der Umgebung von $x=0$, $y=0$ in der Form entwickelbar sein

$$(17)\qquad \varphi = 1 + a_1x + a_2y + a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + \cdots.$$

Nun ist aber vermöge der Beziehungen (6)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -1 - \frac{a}{1 + a_1 x + a_2 y + a_{11} x^2 + a_{12} xy + a_{22} y^2 + \cdots}$$
$$= -(1+a) + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_{11} x^2 + \beta_{12} xy + \beta_{22} y^2 + \cdots,$$

und somit, da für $x = 0$ nach (5) $(z)_{x=0} = \mu - y - a\frac{y^2}{1-y}$ oder in der Umgebung von $y = 0$

(18) $$(z)_{x=0} = \mu - y - ay^2 - ay^3 - \cdots$$

sein soll, durch Integration

$$z = \mu - y - ay^2 - ay^3 - \cdots - (1+a)x + \frac{\beta_1}{2}x^2 + \beta_2 xy$$
$$+ \frac{\beta_{11}}{3}x^3 + \frac{\beta_{12}}{2}x^2 y + \beta_{22} x y^2 + \cdots$$

oder

(19) $$z = \mu - (1+a)x - y + \frac{\beta_1}{2}x^2 + \beta_2 xy - ay^2 + \frac{\beta_{11}}{3}x^3$$
$$+ \frac{\beta_{12}}{2}x^2 y + \beta_{22} x y^2 - ay^3 + \cdots,$$

also in der Umgebung von $x = 0$, $y = 0$ nach positiven, steigenden, ganzen Potenzen von x und y entwickelbar.

Es mag noch hervorgehoben werden, dass, wie man leicht sieht, die hier angewandte Methode zur Discussion der Integrale partieller Differentialgleichungen auch in vielen andern Fällen anwendbar ist.

Heidelberg im November 1892.

Ueber das Formensystem eines Kreisbogenpolygons vom Geschlecht Null.

Von

Georg Pick in Prag.

Den Ecken eines Kreisbogenpolygons, welches zu einer „automorphen“ Function gehört, entsprechen gewisse ausgezeichnete transcendente Primformen.*) Es liegt nahe, nach den invariantentheoretischen Eigenschaften dieser Primformen zu fragen, welche ja in speciellen Fällen schon bekannt sind.**) Im Folgenden werden *die Functionaldeterminanten****) und Hesse'schen Covarianten solcher Formen für die Polygone vom Geschlecht Null untersucht und mit einer sehr zweckmässigen invariantentheoretischen Schreibweise der zugehörigen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in Verbindung gebracht.*†) Das Resultat, das sich ergiebt, scheint mir in einer besonderen Richtung interessant zu sein. Während nämlich die Relationen für die Functionaldeterminanten einzig und allein durch die Grösse der Polygonwinkel bestimmt

---

*) Ueber die Klein'sche Benennung „automorph“ und die von Schwarz, Halphén, Poincaré aufgestellten Grund- (od. Prim-) formen siehe die Dissertation von E. Ritter „Die eindeutigen automorphen Functionen vom Geschlecht Null“ diese Annalen XLI (insb. II, § 8).

**) Siehe bezüglich der algebraischen Fälle F. Klein „Das Ikosaeder und die Gleichung 5ten Grades“, bezüglich der elliptischen Modulfunctionen Klein-Fricke „Vorlesungen über die Theorie d. ell. Modulf.“ (I, 4. §§ 3 u. 5).

***) Die Functionaldeterminanten berechnet Hr. Schlesinger in der Abhandlung „Ueber die bei den linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung auftretenden Primformen,“ Journal f. Math. 110. II (11). Die im Text gegebene Herleitung ist consequenter in der Verwendung homogener Veränderlicher, worauf ich im Zusammenhang mit Nachfolgendem Werth gelegt habe.

†) Siehe Waelsch „Zur Geometrie der linearen algebraischen Differentialgleichungen etc.“ (Mittheilungen der deutschen mathem. Gesellschaft in Prag — bei Tempsky), Pick „Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung“ (ebenda), Derselbe, „Ueber adjungirte lineare Differentialgleichungen“ (Wr. Ber. Juni 1892), Hirsch „Zur Theorie der linearen Differentialgleichung etc.“ (Dissertation, Königsberg 1892).

sind, hängen jene für die Hesse'schen Covarianten wesentlich ab von den übrigen Bestimmungsstücken des Polygons, welche sie andererseits auch wieder selbst bestimmen. Die Erkenntniss solcher Abhängigkeiten ist aber deshalb von Wichtigkeit, weil aus ihnen sich mit der Zeit wohl die Mittel ergeben können, die Beziehungen zwischen der Gestalt des Polygons und den Constanten der Differentialgleichung, welche ja noch im Dunkel sind, aufzudecken.

§ 1.

Ueber die Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Im Folgenden werden durchwegs homogene binäre Veränderliche verwendet. Die Elemente eines Paares solcher Veränderlicher sollen, wenn nöthig, durch obere Accente unterschieden werden, um die bequemeren Indices der Unterscheidung verschiedener Werthereihen vorbehalten zu können. Dem entsprechend bezeichnen wir ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(1)\qquad (A, \varphi)^2 + 2(B, \varphi) + C\varphi = 0$$

mit φ', φ'', die unabhängigen Veränderlichen mit x', x''. Von diesen sind A, B, C Formen, deren Grade eine absteigende arithmetische Reihe der Differenz 2 bilden; der Grad von φ wird sich gleich nachher ergeben.*)

Von der Differentialgleichung (1) wollen wir voraussetzen, dass sie n singuläre Stellen $a_h (h = 1, 2, \ldots n)$ besitzt, denen beziehungsweise die Exponentenpaare $\left(0, \frac{1}{l_h}\right)$ entsprechen sollen. Wir wollen, um das einfache geometrische Bild eines Kreisbogen-n-Ecks mit den Winkeln $\frac{\pi}{l_h}$ stets beibehalten zu können, die l_h als reelle, am besten gleich als positive ganze Zahlen voraussetzen, ob zwar im Grunde genommen alle folgenden analytischen Entwickelungen von jeder speciellen Voraussetzung über die l_h unabhängig sind.

Durch diese Angabe können nun die Formen A und B und der Grad von φ bestimmt werden. Zunächst können wir

$$(2)\qquad A = \prod_h (a_h x)$$

setzen. Zu weiteren Bestimmungen dient der Abel'sche Satz, welcher hier die Form

$$(3)\qquad (A, \Phi) + B \cdot \Phi = 0$$

*) Man vergleiche die in der vierten Fussnote der Einleitung angegebenen Schriften.

annimmt, worin

$$\Phi = (\varphi', \varphi'')$$

die Functionaldeterminante eines Fundamentalsystems von (1) bedeutet. Den Werth von Φ kann man (bis auf einen willkürlichen constanten Factor) leicht aus den Entwickelungen der φ', φ'' um die einzelnen Stellen des x-Gebiets feststellen. Von Φ unterscheidet sich übrigens der Ausdruck

$$\frac{(\varphi\, d\varphi)}{(x\, dx)}$$

nur durch einen numerischen Factor. Wir wollen nun die Gleichung, die man erhält, folgendermassen normiren:

$$(4) \qquad \frac{(\varphi\, d\varphi)}{(x\, dx)} = \prod_h (a_h x)^{\frac{1}{l_h} - 1}.$$

Hierbei ist über einen willkürlichen Factor passend verfügt, den man natürlich durch proportinale Abänderung der φ', φ'', oder auch der x', x'' jederzeit wieder einführen kann.

Aus (4) entnehmen wir zunächst den Grad von φ in x, welcher sich

$$= \frac{\sum_h \left(\frac{1}{l_h} - 1\right) + 2}{2} = -\frac{\varepsilon}{2}$$

ergiebt, indem wir zur Abkürzung

$$(5) \qquad \varepsilon = n - 2 - \sum_h \frac{1}{l_h}$$

setzen. Ferner setzen wir den gefundenen Werth von Φ in Gleichung (3) ein, welche sich auch in die Form setzen lässt

$$B = \frac{1}{n(\varepsilon+2)} \left\{ \frac{\partial A}{\partial x'} \frac{\partial \lg \Phi}{\partial x''} - \frac{\partial A}{\partial x''} \frac{\partial \lg \Phi}{\partial x'} \right\}.$$

Bezeichnet man mit A_h die Polare der Form A in Bezug auf den Punkt a_h, so verwandelt sich die erhaltene Gleichung ohne Weiteres in

$$(6) \qquad B = -\frac{1}{\varepsilon+2} \sum_h \left(1 - \frac{1}{l_h}\right) \frac{A_h}{(a_h x)},$$

oder zufolge der Identität

$$0 = \sum_h \frac{A_h}{(a_h x)}$$

in

$$(6^*) \qquad B = \frac{1}{\varepsilon+2} \sum_h \frac{1}{l_h} \frac{A_h}{(a_h x)}.$$

B zeigt sich als Form $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades, wie es sein muss.

Die Form C bleibt willkürlich, nur ihr Grad ist bestimmt und zwar gleich $n - 4$.

§ 2.

Die Primformen und ihre Functionaldeterminanten.

Die den Ecken des Kreisbogenpolygons der φ-Ebene entsprechenden Primformen P_h seien definirt durch die Gleichungen

$$P_h = (a_h x)^{\frac{1}{l_h}} \quad (h = 1, 2, \ldots n). \tag{7}$$

Einem beliebigen Punkte $x = y$ entspreche die Primform

$$P = (xy). \tag{8}$$

Aus den Formeln (2) und (4) des vorigen Paragraphen wird jetzt

$$A = \prod_h P_h^{l_h}, \tag{9}$$

$$\frac{(x\,dx)}{(\varphi\,d\varphi)} = \prod_h P_h^{l_h - 1}. \tag{10}$$

Sieht man die Grössen φ als unabhängige Veränderliche an, so ergiebt sich

$$\text{der Grad der } x = -\frac{2}{\varepsilon},$$

$$\text{der Grad von } P_h = -\frac{2}{\varepsilon l_h}.$$

Nach diesen Vorbereitungen gehen wir an die Bestimmung der Functionaldeterminanten je zweier von den Formen P_h in Bezug auf φ', φ'' als unabhängige Veränderliche. Zunächst ist

$$\left(P_r^{l_r},\ P_s^{l_s}\right) = P_r^{l_r - 1} P_s^{l_s - 1} (P_r, P_s).$$

Andererseits wird

$$\left(P_r^{l_r},\ P_s^{l_s}\right) \cdot (\varphi\,d\varphi) = -\frac{\varepsilon}{2} \begin{vmatrix} P_r^{l_r}, & d\left(P_r^{l_r}\right) \\ P_s^{l_s}, & d\left(P_s^{l_s}\right) \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{\varepsilon}{2} \begin{vmatrix} (a_r x), & (a_r dx) \\ (a_s x), & (a_s dx) \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{\varepsilon}{2} (a_r a_s)(x\,dx).$$

Aus diesen Gleichungen folgt in Verbindung mit (10) folgende Formel für die *Functionaldeterminante zweier Primformen*:

$$(P_r, P_s) = -\frac{\varepsilon}{2} (a_r a_s) \cdot \prod_{h \gtrless r, s} P_h^{l_h - 1}. \tag{11}$$

Wir benutzen diese Formel noch dazu, um die Form B durch die P_h auszudrücken. Zu diesem Zwecke bemerken wir zunächst, dass die Polare von A nach a_s sich folgendermassen ausdrückt:

$$A_s = \frac{A}{n} \sum_r \frac{(a_r a_s)}{(a_r x)}.$$

Setzt man in diese Gleichung den Werth von A nach (9), den von $(a_r x)$ nach (7), den von $(a_r a_s)$ nach (11), so erhält man

$$A_s = -\frac{2}{\varepsilon} \frac{P_1 P_2 \ldots P_n}{n} \sum_r \frac{(P_r, P_s)}{P_r . P_s},$$

und wenn man diese Formel zur Umgestaltung von (6) § 2 benutzt, so ergiebt sich als *Ausdruck von B durch die Primformen*

$$(12) \qquad B = -\frac{2}{n\varepsilon(\varepsilon+2)} P_1 P_2 \ldots P_n \sum_{r,s} \left(\frac{1}{l_r} - \frac{1}{l_s}\right) \frac{(P_r, P_s)}{P_r . P_s}.$$

Die Summe ist über alle Combinationen der Indices r, s zu erstrecken.

§ 3.

Die Hesse'schen Covarianten der Primformen.

Zur Berechnung der Hesse'schen Formen der P_r dient folgende Ueberlegung*). Die partiellen Differentialquotienten irgend einer automorphen Form X der φ

$$\frac{\partial X}{\partial \varphi''}, \quad -\frac{\partial X}{\partial \varphi'}$$

sind cogredient mit den φ', φ'' selbst. Es müssen also diese partiellen Differentialquotienten ein Fundamentalsystem einer gewissen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung bilden, welche sich aus der gegebenen Gleichung (1) muss herleiten lassen. Bildet man die Ueberschiebung jener beiden Grössen in Bezug auf die φ', φ'' als unabhängige Veränderliche, so erhält man die Hesse'sche Form von X. Diese Ueberschiebung unterscheidet sich aber nur durch einen bekannten Factor von jener, welche in Bezug auf x', x'' als unabhängig Veränderliche gebildet wird, und letztere kann nach dem Abel'schen Satze vermittelst der postulirten Differentialgleichung ausgewerthet werden.

Indess ist die wirkliche Ausrechnung der Differentialgleichung, wie man leicht sieht, nicht erforderlich. Vielmehr führt der obige Gedankengang auf ein kürzeres Verfahren, welches im Folgenden eingehalten ist. Wir wählen für X die Grösse (yx), in welcher y einen

*) Dieselbe entspricht der Ableitung der Hesse'schen Determinante von $\log \Delta$ mittelst der Perioden zweiter Gattung in der Theorie der elliptischen Modulfunctionen. Vgl. Klein-Fricke. a. a. O.

beliebigen Punkt bedeutet, den wir zum Schlusse mit a_s zusammenfallen lassen. Die Grössen, welche der Berechnung zu Grunde zu legen sind, lauten dann

$$\left(y\frac{\partial x}{\partial \varphi'}\right) \quad \text{und} \quad \left(y\frac{\partial x}{\partial \varphi''}\right).$$

Wir wollen nun die x als unabhängige Veränderliche einführen. Gleichzeitig soll von folgender abkürzenden Bezeichnung Gebrauch gemacht werden: Wenn f eine Form der Veränderlichen ξ', ξ'' vom Grade g ist, setzen wir

$$f_1 = \frac{1}{g}\frac{\partial f}{\partial \xi'}, \quad f_2 = \frac{1}{g}\frac{\partial f}{\partial \xi''},$$

$$f_{11} = \frac{1}{g(g-1)}\frac{\partial^2 f}{\partial \xi'^2}, \quad f_{12} = \frac{1}{g(g-1)}\frac{\partial^2 f}{\partial \xi' \partial \xi''}, \quad f_{22} = \frac{1}{g(g-1)}\frac{\partial^2 f}{\partial \xi''^2}.$$

In solcher Weise bezeichnen wir auf der linken Seite der folgenden Gleichungen die Differentialquotienten nach φ', φ'', auf der rechten diejenigen nach x', x''. Zu Verwechslungen wird dabei kein Anlass gegeben.

Nach bekannten Elementarformeln wird

$$(yx_1) = -\frac{y'\varphi_1'' + y''\varphi_2''}{(\varphi', \varphi'')},$$

$$(yx_2) = +\frac{y'\varphi_1' + y''\varphi_2'}{(\varphi', \varphi'')}.$$

Wir bilden die Differenz der totalen logarithmischen Differentiale dieser beiden Gleichungen. Es ergiebt sich links

$$\frac{1}{(yx_1)(yx_2)}\begin{vmatrix} (yx_1), & d(yx_1) \\ (yx_2), & d(yx_2) \end{vmatrix},$$

rechts

$$\frac{-1}{(y'\varphi_1'+y''\varphi_2')(y'\varphi_1''+y''\varphi_2'')}\begin{vmatrix} y'\varphi_1' + y''\varphi_2', & d(y'\varphi_1' + y''\varphi_2') \\ y'\varphi_1'' + y''\varphi_2'', & d(y'\varphi_1'' + y''\varphi_2'') \end{vmatrix}.$$

Nach Gleichsetzung beider Seiten erhält man mit Benützung der ursprünglichen Gleichungen

$$\begin{vmatrix} (yx_1), & d(yx_1) \\ (yx_2), & d(yx_2) \end{vmatrix} = \frac{1}{[(\varphi', \varphi'')]^2}\begin{vmatrix} y'\varphi_1' + y''\varphi_2', & d(y'\varphi_1' + y''\varphi_2') \\ y'\varphi_1'' + y''\varphi_2'', & d(y'\varphi_1'' + y''\varphi_2'') \end{vmatrix}.$$

Links führen wir die angezeigten Differentiationen mit Hilfe der φ, rechts mit Hilfe der x als unabhängiger Veränderlicher aus. Es ergiebt sich links

$$\left(-\frac{2}{\varepsilon} - 1\right)\left((yx_1), (yx_2)\right)(\varphi\, d\varphi),$$

rechts

$$\frac{\left(-\frac{\varepsilon}{2}-1\right)}{[(\varphi',\varphi'')]^2}\cdot\begin{vmatrix} y'\varphi_{11}'+y''\varphi_{12}', & y'\varphi_{12}'+y''\varphi_{22}' \\ y'\varphi_{11}''+y''\varphi_{12}'', & y'\varphi_{12}''+y''\varphi_{22}'' \end{vmatrix}\cdot(x\,dx)$$

$$=\frac{\left(-\frac{\varepsilon}{2}-1\right)}{[(\varphi',\varphi'')]^2}\begin{vmatrix} \varphi_{11}', & \varphi_{12}', & \varphi_{22}' \\ \varphi_{11}'', & \varphi_{12}'', & \varphi_{22}'' \\ y''^2, & -y'y'', & y'^2 \end{vmatrix}(x\,dx).$$

Es ist nun

$$(\varphi',\varphi'')=-\frac{2}{\varepsilon}\frac{(\varphi\,d\varphi)}{(x\,dx)};$$

Ferner ist die Functionaldeterminante $\big((yx_1),(yx_2)\big)$ nichts anderes als die Hesse'sche Covariante von (yx) zur Hälfte genommen. Somit erhält man

$$\big((yx),(yx)\big)^2=-\frac{\varepsilon^2}{2}\cdot\frac{(x\,dx)^2}{(\varphi\,d\varphi)^2}\cdot\frac{1}{(\varphi',\varphi'')}\cdot\begin{vmatrix} \varphi_{11}', & \varphi_{12}', & \varphi_{22}' \\ \varphi_{11}'', & \varphi_{12}'', & \varphi_{22}'' \\ y''^2, & -y'y'', & y'^2 \end{vmatrix}.$$

Es erübrigt jetzt nur noch, die rechts stehende Determinante vermittelst der Differentialgleichung (1) auszuwerthen. Zu diesem Zwecke drücken wir in der Differentialgleichung nach dem Euler'schen Satze φ und die ersten Ableitungen von φ durch die zweiten Ableitungen aus, wodurch die Gleichung die Form erhält

$$\begin{aligned}&(A_{22}-2B_2x'+Cx'^2)\varphi_{11}\\ &-2(A_{12}-B_1x'+B_2x''-Cx'x'')\varphi_{12}\\ &+\ (A_{11}+2B_1x''+Cx''^2)\varphi_{22}=0.\end{aligned}$$

Diese Gleichung gilt für jede der Grössen φ',φ'' und es folgt also, dass die Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} \varphi_{11}', & \varphi_{12}', & \varphi_{22}' \\ \varphi_{11}'', & \varphi_{12}'', & \varphi_{22}'' \end{vmatrix}$$

sich verhalten wie

$$(A_{22}-2B_2x'+Cx'^2):-2(A_{12}-B_1x'+B_2x''-Cx'x''):(A_{11}+2B_1x''+Cx''^2).$$

Bekanntlich ist aber

$$\begin{vmatrix} \varphi_{11}', & \varphi_{12}', & \varphi_{22}' \\ \varphi_{11}'', & \varphi_{12}'', & \varphi_{22}'' \\ x''^2, & -x'x'', & x'^2 \end{vmatrix}=(\varphi',\varphi''),$$

so dass sich der hinzutretende Proportionalitätsfactor gleich $\frac{A}{(\varphi',\varphi'')}$ ergiebt.

Die fragliche Determinante ist jetzt leicht zu berechnen. Man erhält

$$\frac{1}{(\varphi',\varphi'')}\begin{vmatrix} \varphi_{11}', & \varphi_{12}', & \varphi_{22}' \\ \varphi_{11}'', & \varphi_{12}'', & \varphi_{22}'' \\ y''^2, & -y'y'', & y'^2 \end{vmatrix}=\frac{A_{yy}+2(yx)B_y+(yx)^2C}{A},$$

worin durch die angehängten y Polarisationen nach y angezeigt sind. Somit ergiebt sich für die Hesse'sche Covariante von $P=(yx)$ die Relation

$$(13)\quad (P, P)^2 = \big((yx),\ (yx)\big)^2 = -\frac{\varepsilon^2}{2}\,\frac{(x\,dx)^2}{(\varphi\,d\varphi)^2}\,\frac{A_{yy}+2(yx)B_y+(yx)^2C}{A}.$$

Wir setzen hierin an Stelle von y a_r, und führen gleichzeitig für die rechts vorkommende Grösse $\frac{(x\,dx)}{(\varphi\,d\varphi)}$ und den Nenner A ihre Werthe nach (10) und (9) § 2 ein; es ergiebt sich so für die *Hesse'sche Form der Primform* P_r*)

$$(14)\quad (P_r, P_r)^2 = -\frac{\varepsilon^2(\varepsilon+2)}{2\left(\varepsilon+\frac{2}{l_r}\right)}\prod_h P_h^{l_h-2}\cdot\frac{A_{rr}+2(a_r x)\,B_r+(a_r x)^2C}{P_r^{2l_r-2}}.$$

Wir unterlassen es in dieser Formel die Grössen A_{rr} und B_r auch noch durch ihre Ausdrücke in den P_r zu ersetzen, weil die Schlussformel ziemlich complicirt ausfällt.

Die gefundene Relation macht die gegenseitige Abhängigkeit der Hesse'schen Covarianten der Primformen einerseits und der Form C andrerseits deutlich.

Alle aufgestellten Formeln bedürfen leicht angebbarer Modificationen für den Fall, dass von den l_h einige oder alle gleich Unendlich werden (Fall „parabolischer Ecken" des Polygons). Auf diese Modificationen soll nicht näher eingegangen werden.

Prag, October 1892.

---

*) Bei diesen Umgestaltungen hat man von folgender Formel Gebrauch zu machen, welche ich bei flüchtiger Umsicht nirgends angegeben finden konnte: Es sei f eine Form g^{ten} Grades von ξ', ξ'', so ist

$$(f^m, f^m)^2 = \frac{g-1}{mg-1}\,f^{2m-2}(f, f)^2.$$

Analog ist

$$2\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \lg f}{\partial \xi'^2}, & \frac{\partial^2 \lg f}{\partial \xi' \partial \xi''} \\ \frac{\partial^2 \lg f}{\partial \xi' \partial \xi''}, & \frac{\partial^2 \lg f}{\partial \xi''^2} \end{vmatrix} = -\,g^2(g-1)\,f^{-2}(f, f)^2.$$

Note zur Hesse'schen Normalform der Gleichung einer Ebene.

Von

R. v. Lilienthal in Münster i./W.

Der Mangel einer einheitlichen Bestimmung der positiven und negativen Seiten von Ebenen in analytisch-geometrischen Untersuchungen ist vielfach gefühlt worden. Während die Einen zu jener Bestimmung die Art benutzen, in der das betrachtete geometrische Gebilde analytisch gegeben ist, machen die Anderen jene Bestimmungen nach Möbius'schen Gesichtspunkten*) — oder gar nicht. Immer aber ist es der besondere, betrachtete Fall, für den jene Bestimmungen eigens getroffen werden. Die Hesse'sche Normalform der Gleichung einer Ebene würde ein durchgehends leicht verwendbares, nur auf die Lage des Coordinatensystems gegründetes Verfahren zur Bestimmung der positiven Seite einer Ebene liefern, wenn sie nicht im Fall einer durch den Coordinatenanfangspunkt gehenden Ebene unbestimmt wäre.

Zweck des Folgenden ist eine der Hesse'schen ähnliche Normalform der Gleichung einer Ebene aufzustellen, welche von dem erwähnten Uebelstande frei ist, indem sie nicht die Lage des Coordinatenanfangspunktes, sondern die der positiven Theile der Axen benutzt.

1) Richtungscosinus einer Geraden.

Nach Festlegung eines rechtwinkligen Coordinatensystems mit eindeutig bestimmten positiven Theilen der Axen sind die Coordinaten x, y, z eines Punktes bestimmte eindeutige Grössen. Man kann nun ein solches Coordinatensystem benutzen, um eine beliebige Gerade, falls sie geometrisch durch einen in ihr liegenden Punkt getheilt gedacht ist, auch analytisch in unterscheidbare Theile zu zerlegen. Denken wir uns eine Gerade durch einen Punkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ in zwei Theile zerlegt, und ist $P(x, y, z)$ ein zweiter Punkt der Geraden, so sagen wir, dass P im positiven oder negativen Theil der durch P_0 getheilt gedachten Geraden liegt, je nachdem die erste nicht ver-

*) O. Stolz, Zur Theorie der Raumcurven. Monatshefte für Mathem. u. Phys. I. Jahrgang, S. 433.

schwindende der drei Differenzen $z - z_0$, $y - y_0$, $x - x_0$ positiv oder negativ ist. Hiernach ist klar, was man unter dem „positiven" und „negativen" Theil einer durch einen Punkt getheilt gedachten Geraden zu verstehen habe.

Unter dem Richtungscosinus einer Geraden sollen die Cosinus der Winkel verstanden werden, welche der positive Theil der zur gegebenen Geraden parallelen, durch den Coordinatenanfangspunkt gehenden und durch diesen Punkt getheilt gedachten Geraden mit den positiven Theilen der Coordinatenaxen bildet. Diese Winkel werden als positive Grössen betrachtet, sie variiren von 0^0 (incl.) bis 180^0 (excl.). Bezeichnet man mit a, b, c der Reihe nach die Winkel, welche von dem fraglichen positiven Theil mit der positiven x-, bez. y-, bez. z-Axe gebildet werden, so ist der erste nicht verschwindende der drei Richtungscosinus $\cos c$, $\cos b$, $\cos a$ stets positiv.

Sind $\cos a_1$, $\cos b_1$, $\cos c_1$ und $\cos a_2$, $\cos b_2$, $\cos c_2$ die Richtungscosinus zweier Geraden, so bilden die positiven Theile der zu ihnen parallelen, durch den Coordinatenanfangspunkt gehenden und durch diesen Punkt getheilt gedachten Geraden einen Winkel φ miteinander, für den die Gleichung

$$\cos\varphi = \cos a_1 \cos a_2 + \cos b_1 \cos b_2 + \cos c_1 \cos c_2$$

besteht. Dieser Winkel soll kurz der von den Geraden gebildete Winkel genannt werden. Stellt man die Richtungscosinus der auf beiden Geraden senkrechten Geraden in der Form dar:

$$\cos a_3 = \frac{\cos b_1 \cos c_2 - \cos c_1 \cos b_2}{\sin\varphi}, \quad \cos b_3 = \frac{\cos c_1 \cos a_2 - \cos a_1 \cos c_2}{\sin\varphi},$$
$$\cos c_3 = \frac{\cos a_1 \cos b_2 - \cos b_1 \cos a_2}{\sin\varphi},$$

so ist φ als positiv oder negativ zu betrachten, je nachdem der letzte nicht verschwindende der rechts auftretenden Zähler positiv oder negativ ist.

2) Abscisse eines Punktes in Bezug auf einen Punkt und eine Ebene.

Unter der Abscisse eines Punktes P in Bezug auf einen Punkt P_0 soll diejenige Zahl verstanden werden, deren absoluter Werth das Verhältniss der Strecke $\overline{PP_0}$ zur Längeneinheit angiebt und deren Vorzeichen $+$ oder $-$ ist, je nachdem P im positiven oder negativen Theil der durch P und P_0 gehenden und durch P_0 getheilt gedachten Geraden liegt. Hat P wieder die Coordinaten x, y, z, P_0 die Coordinaten x_0, y_0, z_0 und ist r die Abscisse von P in Bezug auf P_0, so ist also der absolute Werth von r gleich dem absoluten Werth der Quadratwurzel aus $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$ und das Vor-

zeichen von r stimmt mit dem Vorzeichen der ersten nicht verschwindenden der Differenzen $z - z_0$, $y - y_0$, $x - x_0$ überein.

Sind ferner $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$ die Richtungscosinus der durch P_0 und P gehenden Geraden, so hat man:

$$x = x_0 + r\cos a, \quad y = y_0 + r\cos b, \quad z = z_0 + r\cos c.$$

Unter der Abscisse eines Punktes P in Bezug auf eine Ebene wollen wir seine Abscisse in Bezug auf den Punkt verstehen, in welchem die durch P gehende Normale der Ebene die Ebene schneidet. Je nachdem die fragliche Abscisse positiv oder negativ ist, sagt man, dass der Punkt P auf der positiven oder negativen Seite der Ebene liegt.

In der analytischen Geometrie der Ebene hat man analog die Abscisse eines Punktes in Bezug auf eine Gerade, sowie die positive und negative Seite der Geraden zu definiren.

3) Normalform der Gleichung einer Ebene.

Unter der „Normalform" der Gleichung einer Ebene verstehen wir diejenige Form der Gleichung, in welcher die Coefficienten von x, y, z bezüglich die Richtungscosinus der Normalen der Ebene in Bezug auf die x-, y-, bez. z-Axe sind. Damit also die Gleichung:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

in der Normalform geschrieben sei, muss einmal

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1$$

sein und dann muss die erste nicht verschwindende der drei Grössen C, B, A positiv sein. Hier gilt nun folgender Satz:

Setzt man in den linken Theil der in der Normalform befindlichen Gleichung einer Ebene:

$$x\cos a + y\cos b + z\cos c + p = 0$$

die Coordinaten x', y', z' eines beliebigen Punktes P' bez. für x, y, z ein, so stellt der entstehende Ausdruck die Abscisse des Punktes P' in Bezug auf die Ebene dar.

Zum Beweise nenne man r die fragliche Abscisse, sowie x_0, y_0, z_0 die Coordinaten des in der Ebene befindlichen Endpunkts des kürzesten Abstandes des Punktes P' von der Ebene, sodass:

$$x' = x_0 + r\cos a, \quad y' = y_0 + r\cos b, \quad z' = z_0 + r\cos c.$$

Dann wird

$$(x' - x_0)\cos a + (y' - y_0)\cos b + (z' - z_0)\cos c = r$$

oder

$$x'\cos a + y'\cos b + z'\cos c + p = r \quad \text{w. z. b. w.}$$

In der analytischen Geometrie der Ebene stellt analog der linke Theil der in der Normalform befindlichen Gleichung einer Geraden die Abscisse eines Punktes in Bezug auf die Gerade dar.

4) Coordinatentransformation.

Es soll nun untersucht werden, welchen Einfluss eine Coordinatentransformation auf die Abscisse eines Punktes in Bezug auf eine Ebene hat. Von vornherein ist klar, dass dieser Einfluss höchstens in einer Aenderung des Vorzeichens der Abscisse bestehen kann.

Wir bezeichnen die Coordinaten der Punkte des Raumes, sofern sie auf das neue Coordinatenaxensystem bezogen werden, mit ξ, η, ζ; setzen auf irgend eine Weise fest, welche Theile der neuen Axen als positiv gelten sollen, und treffen, damit auch hier der Begriff „Abscisse eines Punktes in Bezug auf einen Punkt" erklärt sei, die Bestimmung, dass die Abscisse eines Punktes $P(\xi, \eta, \zeta)$ in Bezug auf einen Punkt $P_0(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ als positiv oder negativ angesehen werden soll, je nachdem die erste nicht verschwindende der Differenzen $\zeta - \zeta_0$, $\eta - \eta_0$, $\xi - \xi_0$ positiv oder negativ ist.

Die Gleichungen der $\eta\zeta$-, $\zeta\xi$-, $\xi\eta$-Ebene seien der Reihe nach in der Normalform:

$$\begin{aligned}
\alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z + \alpha_{14} &= 0,\\
\alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}z + \alpha_{24} &= 0,\\
\alpha_{31}x + \alpha_{32}y + \alpha_{33}z + \alpha_{34} &= 0.
\end{aligned}$$

Ferner sei $\varepsilon_1 = +1$ oder -1, ebenso $\varepsilon_2 = +1$ oder -1 und $\varepsilon_3 = +1$ oder -1, je nachdem der positive Theil der ξ-, bez. η-, bez. ζ-Axe mit dem durch das Coordinatensystem der x, y, z festgelegten positiven Theil der betreffenden Axe übereinstimmt oder nicht. Sind nun ξ, η, ζ und x, y, z die Coordinaten desselben Punktes in Bezug auf die beiden Coordinatensysteme, so wird:

$$\begin{aligned}
\xi &= \varepsilon_1(\alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z + \alpha_{14}),\\
\eta &= \varepsilon_2(\alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}z + \alpha_{24}),\\
\zeta &= \varepsilon_3(\alpha_{31}x + \alpha_{32}y + \alpha_{33}z + \alpha_{34}),
\end{aligned}$$

und umgekehrt:

$$\begin{aligned}
x &= \alpha_{11}(\varepsilon_1\xi - \alpha_{14}) + \alpha_{21}(\varepsilon_2\eta - \alpha_{24}) + \alpha_{31}(\varepsilon_3\zeta - \alpha_{34}),\\
y &= \alpha_{12}(\varepsilon_1\xi - \alpha_{14}) + \alpha_{22}(\varepsilon_2\eta - \alpha_{24}) + \alpha_{32}(\varepsilon_3\zeta - \alpha_{34}),\\
z &= \alpha_{13}(\varepsilon_1\xi - \alpha_{14}) + \alpha_{23}(\varepsilon_2\eta - \alpha_{24}) + \alpha_{33}(\varepsilon_3\zeta - \alpha_{34}).
\end{aligned}$$

Ist andererseits eine orthogonale Substitution in der Form gegeben:

$$\begin{aligned}
\xi &= \beta_{11}x + \beta_{12}y + \beta_{13}z + \beta_{14},\\
\eta &= \beta_{21}x + \beta_{22}y + \beta_{23}z + \beta_{24},\\
\zeta &= \beta_{31}x + \beta_{32}y + \beta_{33}z + \beta_{34},
\end{aligned}$$

so hat man $\varepsilon_\nu = +1$ oder -1, je nachdem die erste nicht verschwindende der 3 Grössen

$$\beta_{\nu 3},\ \beta_{\nu 2},\ \beta_{\nu 1}, \quad (\nu = 1, 2, 3)$$

positiv oder negativ ist, sodass durch die Substitution die positiven Theile der neuen Axen eindeutig bestimmt werden.

Wird die Adjuncte des Elements $\beta_{\lambda\mu}$ der Determinante

$$|\beta_{\lambda\mu}| \quad (\lambda,\ \mu = 1,\ 2,\ 3)$$

mit $\mathsf{B}_{\lambda\mu}$ bezeichnet, so sei δ_λ das Vorzeichen der ersten nicht verschwindenden der 3 Grössen $\mathsf{B}_{\lambda 3}$, $\mathsf{B}_{\lambda 2}$, $\mathsf{B}_{\lambda 1}$. Dann wird die Determinante

$$|\beta_{\lambda\mu}| = \varepsilon_1\delta_1 = \varepsilon_2\delta_2 = \varepsilon_3\delta_3,$$

sodass die Entscheidung, ob die betrachteten Coordinatenaxensysteme congruent sind oder nicht, auf die Bestimmung eines der Vorzeichenpaare ε_1, δ_1; ε_2, δ_2; ε_3, δ_3 hinauskommt.

Ist nun

$$a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 = 0$$

die Gleichung einer Ebene (E) in der Normalform und bezeichnet man die Abscisse eines Punktes P in Bezug auf diese Ebene mit $\mathrm{abs}(P_x|E)$ oder $\mathrm{abs}(P_\xi|E)$, je nachdem man diese Abscisse durch das alte oder neue Coordinatensystem bestimmt, so wird:

$$\mathrm{abs}(P_x|E) = (\xi - \beta_{14})\sum_{\nu=1}^{3} \alpha_\nu\beta_{1\nu} + (\eta - \beta_{24})\sum_{\nu=1}^{3} \alpha_\nu\beta_{2\nu}$$
$$+ (\zeta - \beta_{34})\sum_{\nu=1}^{3} \alpha_\nu\beta_{3\nu}.$$

Ist δ das Vorzeichen der ersten nicht verschwindenden der 3 Grössen:

$$\sum_{\nu=1}^{3} \alpha_\nu\beta_{3\nu},\quad \sum_{\nu=1}^{3} \alpha_\nu\beta_{2\nu},\quad \sum_{\nu=1}^{3} \alpha_\nu\beta_{1\nu},$$

so wird die Gleichung der Ebene (E) bezogen auf das Coordinatensystem der ξ, η, ζ in der Normalform:

$$\delta\left\{(\xi - \beta_{14})\sum_{\nu=1}^{3}\alpha_\nu\beta_{1\nu} + (\eta - \beta_{24})\sum_{\nu=1}^{3}\alpha_\nu\beta_{2\nu} + (\varphi - \beta_{34})\sum_{\nu=1}^{3}\alpha_\nu\beta_{3\nu}\right\} = 0,$$

und es folgt:

$$\mathrm{abs}(P_\xi|E) = \delta\ \mathrm{abs}(P_x|E).$$

Hierdurch zeigt sich, was auch von vornherein ersichtlich ist, dass der Quotient der Abscissen zweier Punkte in Bezug auf dieselbe Ebene von der Wahl des Coordinatensystems unabhängig ist.

5) Beziehung zwischen den Abscissen eines Punktes in Bezug auf vier Ebenen. Die Abscisse eines Punktes in Bezug auf eine Ebene ausgedrückt durch die Abscissen von vier Punkten in Bezug auf dieselbe Ebene.

Es seien die Gleichungen von vier Ebenen E_1, E_2, E_3, E_4 in der Normalform gegeben und es habe die Ebene E_λ die Gleichung:

$$a_{\lambda 1} x + a_{\lambda 2} y + a_{\lambda 3} z + a_{\lambda 4} = 0.$$

Die Ebenen sollen ein Tetraeder bilden; der Ebene E_λ liege die Ecke P_λ des Tetraeders gegenüber. Bezeichnet man mit $A_{\lambda\varkappa}$ die Adjuncte des Elements $a_{\lambda\varkappa}$ in der Determinante

$$|a_{\lambda\varkappa}| \quad (\lambda, \varkappa = 1, 2, 3, 4),$$

so hat P_λ die Coordinaten

$$x_\lambda = \frac{A_{\lambda 1}}{A_{\lambda 4}}, \quad y_\lambda = \frac{A_{\lambda 2}}{A_{\lambda 4}}, \quad z_\lambda = \frac{A_{\lambda 3}}{A_{\lambda 4}}.$$

Die Gleichungen, welche zwischen den Elementen einer Determinante und ihren Adjuncten bestehen, ergeben jetzt:

$$\frac{\mathrm{abs}(P_x|E_1)}{\mathrm{abs}(P_1|E_1)} + \frac{\mathrm{abs}(P_x|E_2)}{\mathrm{abs}(P_2|E_2)} + \frac{\mathrm{abs}(P_x|E_3)}{\mathrm{abs}(P_3|E_3)} + \frac{\mathrm{abs}(P_x|E_4)}{\mathrm{abs}(P_4|E_4)} = 1$$

und:

$$\begin{aligned}\mathrm{abs}(P_x|E) = \mathrm{abs}(P_1|E)\frac{\mathrm{abs}(P_x|E_1)}{\mathrm{abs}(P_1|E_1)} + \mathrm{abs}(P_2|E)\frac{\mathrm{abs}(P_x|E_2)}{\mathrm{abs}(P_2|E_2)} \\ + \mathrm{abs}(P_3|E)\frac{\mathrm{abs}(P_x|E_3)}{\mathrm{abs}(P_3|E_3)} + \mathrm{abs}(P_4|E)\frac{\mathrm{abs}(P_x|E_4)}{\mathrm{abs}(P_4|E_4)}.\end{aligned}$$

6) Als Beispiel sollen kurz die drei Krümmungen einer Raumcurve betrachtet werden. Die Coordinaten x, y, z einer solchen seien Functionen der Variabeln t. Sind $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ die Richtungscosinus der Tangente der Curve, so wird:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{dx}{dt}}{N}, \quad \cos\beta = \frac{\frac{dy}{dt}}{N}, \quad \cos\gamma = \frac{\frac{dz}{dt}}{N},$$

wo

$$N^2 = \sum\left(\frac{dx}{dt}\right)^2,$$

und das Vorzeichen von N mit dem des letzten nicht verschwindenden Zählers rechts übereinstimmt.

Sind $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ die Richtungscosinus der Binormale, so entsteht:

$$\cos\lambda = \frac{\frac{dy}{dt}\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{dz}{dt}\frac{d^2y}{dt}}{N_1}, \text{ etc.}$$

wo

$$N_1^2 = \sum\left(\frac{dy}{dt}\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{dz}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2,$$

und das Vorzeichen von N_1 so bestimmt werden muss, dass die erste nicht verschwindende der Grössen $\cos\nu$, $\cos\mu$, $\cos\lambda$ positiv aus-

fällt. Sind $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$ die Richtungscosinus der Hauptnormale, so werde gesetzt:

$$\cos a = \varepsilon(\cos\mu \cos\gamma - \cos\nu \cos\beta), \text{ etc.},$$

wo ε gleich $+1$ oder -1, je nachdem die erste nicht verschwindende der Grössen:

$$\cos\lambda \cos\beta - \cos\mu \cos\alpha, \quad \cos\nu \cos\alpha - \cos\lambda \cos\gamma,$$
$$\cos\mu \cos\gamma - \cos\nu \cos\beta$$

positiv oder negativ ist.

Endlich führen wir noch die Richtungscosinus $\cos l$, $\cos m$, $\cos n$ der Geraden ein, die auf der rectificirenden Kante und auf der Hauptnormale senkrecht ist und setzen:

$$\cos l = \frac{\frac{N_1}{N^2}\cos\alpha - \frac{N_2 N}{N_1^2}\cos\lambda}{N_3}, \text{ etc.},$$

wo

$$N_3^2 = \frac{N_1^2}{N^4} + \frac{N_2^2 N^2}{N_1^4}$$

und N_3 selbst so zu nehmen ist, dass die erste nicht verschwindende der Grössen $\cos n$, $\cos m$, $\cos l$ positiv ausfällt.

Wir nehmen nun allgemein eine durch einen Punkt $P(x, y, z)$ gehende Gerade L, deren Richtungscosinus $\cos a_x$, $\cos a_y$, $\cos a_z$ seien.

In der durch P gehenden und zu L senkrechten Ebene sei ein dem Punkte P benachbarter Punkt P_1 mit den Coordinaten $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$ gegeben und durch ihn gehe eine Gerade L_1 mit den Richtungscosinus

$$\cos a_x + \delta \cos a_x, \quad \cos a_y + \delta \cos a_y, \quad \cos a_z + \delta \cos a_z.$$

Wenn nun P_3 der Punkt ist, in welchem die senkrechte Projection von L_1 auf die durch L und P_1 gehende Ebene die Gerade L schneidet und die Abscisse von P_3 in Bezug auf P mit r bezeichnet wird, so entsteht:

$$\frac{1}{r} = -\frac{\sum\limits_x \delta x\, \delta \cos a_x}{\sum (\delta x)^2}.$$

Wir lassen nun den Punkt P mit dem betrachteten Curvenpunkt zusammenfallen und nehmen

$$\delta \cos a_x = d \cos a, \quad \delta \cos a_y = d \cos b, \quad \delta \cos a_z = d \cos c.$$

Für

$$\delta x = \cos\alpha \,.\, N dt, \quad \delta y = \cos\beta \,.\, N dt, \quad \delta z = \cos\gamma \,.\, N dt$$

wird nun:

$$\frac{1}{r} = \varepsilon \frac{N_1}{N^3} = \text{erster Krümmung.}$$

Für

$$\delta x = \cos\lambda \,.\, Ndt, \quad \delta y = \cos\mu \,.\, Ndt, \quad \delta z = \cos\nu \,.\, Ndt$$

wird:

$$\frac{1}{r} = -\,\varepsilon\,\frac{N_2}{N_1^2} = \text{zweiter Krümmung.}$$

Für

$$\delta x = \cos l \,.\, Ndt, \quad \delta y = \cos m \,.\, Ndt, \quad \delta z = \cos n \,.\, Ndt$$

wird:

$$\frac{1}{r} = \varepsilon\,\frac{N_3}{N} = \text{dritter Krümmung,}$$

wofür man auch mit ε' das Vorzeichen von $\frac{N_3}{N}$ bezeichnend

$$\frac{1}{r} = \varepsilon\varepsilon' \sqrt{\frac{N_1^2}{N^6} + \frac{N_2^2}{N_1^4}}$$

setzen kann, falls die Quadratwurzel positiv genommen wird.

Hiernach ist jede der drei Krümmungen als positiv oder negativ zu betrachten, je nachdem der betreffende Krümmungsmittelpunkt auf der positiven oder negativen Seite der rectificirenden Ebene liegt.

Münster i./W., im November 1892.

Ueber geodätische Krümmung.

Von

R. v. Lilienthal in Münster i./W.

Fasst man die Coordinaten x, y, z der Punkte einer Fläche als Functionen von p und q auf und stellt demgemäss die ersten Differentiale der Coordinaten als lineare Formen von dp und dq, die zweiten Differentiale als quadratische Formen von dp und dq vermehrt um lineare Formen von d^2p und d^2q dar, so besitzen die Coefficienten dieser Formen keine unmittelbare geometrische Bedeutung. Anstatt durch die Linienelemente dp und dq der (p, q) Ebene kann man aber jene Differentiale durch Elemente von Linien auf der Fläche ausdrücken und erhält dann Coefficienten, die sich in lauter geometrisch deutbaren Grössen darstellen. Diese Linienelemente auf der Fläche sind lineare Formen von dp und dq, aber im Allgemeinen keine exacten Differentiale. Die zuletzt erwähnten Coefficienten sind nicht Ableitungen im gewöhnlichen Sinne, sondern Resultate von Operationen, die Jacobi und andere in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen angewandt haben*).

Bei der geometrischen Deutung jener Coefficienten kommt man im Wesentlichen mit den normalen und geodätischen Krümmungen zweier Curvenschaaren auf der Fläche und ihrer orthogonalen Trajectorien aus. Die von Herrn A. Voss**) zu demselben Zweck eingeführten beiden Biegungsinvarianten werden dabei einfache Functionen zweier auf einander senkrechter geodätischer Krümmungen.

Nachdem im Folgenden die Grundgleichungen der Flächentheorie von dem skizzirten Gesichtspunkt aus kurz entwickelt sind, gehe ich näher auf die geodätische Krümmung von Curven auf einer Fläche

*) Vergl. Mansion, Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Deutsch von Maser. S. 127.

**) Sitzungsberichte der mathem. phys. Classe der K. B. Akademie der Wissenschaften. 1892. Heft II, S. 258.

ein und leite Beziehungen her, von denen ein besonder Fall bereits von Herrn Knoblauch*) bemerkt ist. Zum Schluss werden die geodätischen Krümmungen von Curven auf der Einheitskugel betrachtet.

§ 1.

Allgemeine, die betrachteten Krümmungen liefernde Formel.

Man kann — wenigstens die wichtigsten — in der Infinitesimalgeometrie auftretenden Krümmungen aus einer allgemeinen Formel herleiten, welche wohl zuerst von Hamilton**) benutzt wurde. Denkt man sich durch einen Punkt $P(x, y, z)$ eine Gerade mit den Richtungscosinus***) $\cos a_x$, $\cos a_y$, $\cos a_z$ gelegt, und nimmt durch einen dem Punkte P unendlich nahen, in der durch P gehenden und zur Geraden senkrechten Ebene befindlichen, Punkt $P_1(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)$ eine zweite Gerade mit den Richtungscosinus $(\cos a_x + \delta \cos a_x, \ldots)$ so schneidet die senkrechte Projection der zweiten Geraden auf die durch P_1 und die erste Gerade gehende Ebene die erste Gerade in einem Punkte P_2, dessen Abscisse r in Bezug auf den Punkt P durch die Gleichung:

$$\frac{1}{r} = -\frac{\sum_x \delta x\, \delta \cos a_x}{\sum_x (\delta x)^2}$$

bestimmt wird.

Fasst man hier x, y, z als Coordinaten der Punkte einer Fläche auf und setzt $\cos a_x, \ldots$ gleich den Richtungscosinus der Normale der Fläche, so geht r in den Krümmungsradius des den Zuwächsen δx, δy, δz entsprechenden Normalschnitts über.

Betrachtet man eine Curve auf einer Fläche und nimmt δx, δy, δz proportional den Richtungscosinus ihrer Tangente, aber $\cos a_x$ etc. gleich den Richtungscosinus der zu dieser Tangente senkrechten Flächentangente, so geht r in den Radius der geodätischen Krümmung der betrachteten Curve über.

Sieht man endlich eine vorgelegte Fläche, deren Gleichung $F(x, y, z) = 0$ sei, als Individuum einer Flächenschaar $F(x, y, z) = \text{Const.}$ an, so liefert unsere Formel noch eine dritte Abscisse, falls δx, δy, δz proportional den Richtungscosinus der Flächennormale gesetzt werden, die wir mit $\cos n_x$, $\cos n_y$, $\cos n_z$ bezeichnen wollen. Sind

*) Acta Mathematica. Bd. 15, S. 255.

**) Transations of the Royal Irish Academy Vol. XVI. Part. I Science p. 47.

***) In Betreff der Begriffe „Richtungscosinus" und „Abscisse" sowie der Anwendung obiger Formel auf die Krümmungen einer Raumcurve vergl. die vorstehend abgedruckte „Note zur Hesse'schen Normalform der Gleichung einer Ebene".

$\cos a_x, \ldots$ die Richtungscosinus der Tangente der durch den betrachteten Punkt gehenden Curve einer auf der Fläche definirten Curvenschaar, so hat man:

$$\delta x = \cos n_x \,.\, \delta s \text{ etc.}, \quad \delta \cos a_x = \delta s \sum_\xi \frac{\partial \cos a_x}{\partial \xi} \cos n_\xi, \text{ etc.}$$

zu setzen, wo ξ die Werthe x, y, z durchläuft. Daher wird, wenn wir die gedachte Abscisse mit P bezeichnen:

$$\frac{1}{\mathsf{P}} = -\sum_x \sum_\xi \cos n_x \cos n_\xi \frac{\partial \cos a_x}{\partial \xi}.$$

Die Tangente der durch den betrachteten Punkt gehenden Curve der zur definirten Curvenschaar orthogonalen Curvenschaar besitze die Richtungscosinus $\cos \alpha_x, \ldots$. Nennt man R den Radius der geodätischen Krümmung dieser Curve, so entsteht:

$$\frac{1}{R} = -\sum_x \sum_\xi \cos \alpha_x \cos \alpha_\xi \frac{\partial \cos a_x}{\partial \xi}.$$

Da die in Rede stehenden 9 Richtungscosinus die Coefficienten einer orthogonalen Substitution bilden, findet man:

$$\frac{\partial \cos a_x}{\partial x} + \frac{\partial \cos a_y}{\partial y} + \frac{\partial \cos a_z}{\partial z} = -\frac{1}{R} - \frac{1}{\mathsf{P}}.$$

Der Ausdruck für $\frac{1}{\mathsf{P}}$ lässt sich in der Form schreiben:

$$-\frac{\sum_x \sum_\xi \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial \xi} \frac{\partial \cos a_x}{\partial \xi}}{\sum_\xi \left(\frac{\partial F}{\partial \xi}\right)^2},$$

oder wenn man

$$\sum_\xi \left(\frac{\partial F}{\partial \xi}\right)^2 = L$$

setzt:

$$\frac{1}{\mathsf{P}} = \frac{1}{2L} \sum_x \cos a_x \frac{\partial L}{\partial x}.$$

Wenn die Flächenschaar $F(x, y, z) = \text{Const.}$ aus lauter zur Fläche $F(x, y, z) = 0$ parallelen Flächen besteht, so ist entweder L constant oder man hat:

$$\frac{\partial L}{\partial x} : \frac{\partial L}{\partial y} : \frac{\partial L}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z}.$$

In diesem Falle verschwindet $\frac{1}{\mathsf{P}}$ und es bleibt:

$$\sum_x \frac{\partial \cos a_x}{\partial x} = -\frac{1}{R} {}^{*)}.$$

*) Vergl. diese Annalen Bd. 38, p. 437 u. 450.

§ 2.

Linienelemente zweier Curvenschaaren und ihrer senkrechten Trajectorien.

Es seien:

$$T_1 = \alpha_{11}\, dp + \alpha_{12}\, dq,$$
$$T_2 = \alpha_{21}\, dp + \alpha_{22}\, dq,$$

wo die Coefficienten $\alpha_{\lambda\mu}$ Functionen von p und q sind, zwei Differentialformen von dp und dq, deren Determinante $\Delta = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$ im Allgemeinen von Null verschieden ist.

Eine dritte lineare Differentialform von dp und dq werde mit:

$$T = (T)_{dp}\, dp + (T)_{dq}\, dq$$

bezeichnet, wo die Coefficienten von dp und dq partielle Ableitungen sind, falls T ein exactes Differential ist. Setzt man nun:

$$(T)_{T_1} = \frac{\alpha_{22}(T)_{dp} - \alpha_{21}(T)_{dq}}{\Delta}, \quad (T)_{T_2} = \frac{-\alpha_{12}(T)_{dp} + \alpha_{11}(T)_{dq}}{\Delta},$$

so entsteht:

$$T = (T)_{T_1} T_1 + (T)_{T_2} T_2.$$

Für die mit $(\;)_{T_1}$ und $(\;)_{T_2}$ angedeuteten Operationen gelten die Regeln für die gewöhnliche Differentiation, sodass:

$$(T+S)_{T_1} = (T)_{T_1} + (S)_{T_1}, \quad (TS)_{T_1} = T(S)_{T_1} + S(T)_{T_1},$$
$$\left(\frac{T}{S}\right)_{T_1} = \frac{S(T)_{T_1} - T(S)_{T_1}}{S^2},$$

wo man überall T_1 durch T_2 ersetzen darf.

Ist λ_1 ein integrirender Factor von T_1, λ_2 ein solcher von T_2, so erhält man:

$$\frac{\partial \alpha_{11}}{\partial q} - \frac{\partial \alpha_{12}}{\partial p} = -\Delta\,(d \log \lambda_1)_{T_2},$$
$$\frac{\partial \alpha_{22}}{\partial p} - \frac{\partial \alpha_{21}}{\partial q} = -\Delta\,(d \log \lambda_2)_{T_1}.$$

Wird mit λ ein integrirender Factor von T bezeichnet und versteht man allgemein unter $(T)_{T_\alpha T_\beta}$ den Factor von T_β in dem Differential $d(T)_{T_\alpha}$, so besteht die Gleichung:

$$(1) \qquad (T)_{T_1T_2} - (T)_{T_2T_1} = \left(d \log \frac{\lambda_1}{\lambda}\right)_{T_2} (T)_{T_1} - \left(d \log \frac{\lambda_2}{\lambda}\right)_{T_1} (T)_{T_2}.$$

Für $\lambda = 1$ ergiebt sich somit die Integrabilitätsbedingung von T in der Form:

$$(2) \qquad (T)_{T_1T_2} - (T)_{T_2T_1} = (d \log \lambda_1)_{T_2}(T)_{T_1} - (d \log \lambda_2)_{T_1}(T)_{T_2}.$$

Sind nun zwei linear unabhängige Differentialformen

$$\mathfrak{T}_1 = a_{11}\, dp + a_{12}\, dq, \qquad \mathfrak{T}_2 = a_{21}\, dp + a_{22}\, dq$$

gegeben, deren Determinante $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ gleich ϑ sei, so entsprechen den Differentialgleichungen $\mathfrak{T}_1 = 0$, $\mathfrak{T}_2 = 0$ auf einer Fläche, deren Coordinaten x, y, z Functionen von p und q sind, zwei Curvenschaaren, die sich nicht ändern, wenn man $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ mit beliebig zu wählenden Functionen von p und q multiplicirt, falls man die Veränderlichen p und q auf einen geeigneten Bereich beschränkt.

Es wird:

$$(dx)_{\mathfrak{T}_1} = \frac{1}{\vartheta}\left(a_{22}\frac{\partial x}{\partial p} - a_{21}\frac{\partial x}{\partial q}\right), \quad (dx)_{\mathfrak{T}_2} = \frac{1}{\vartheta}\left(-a_{12}\frac{\partial x}{\partial p} + a_{11}\frac{\partial x}{\partial q}\right).$$

Wir setzen nun:

$$N_1 = \sum_x \left(a_{22}\frac{\partial x}{\partial p} - a_{21}\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 = a_{22}^2 E - 2a_{21}a_{22}F + a_{21}^2 G,$$

$$N_2 = \sum_x \left(a_{12}\frac{\partial x}{\partial p} - a_{11}\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 = a_{12}^2 E - 2a_{11}a_{12}F + a_{11}^2 G,$$

und bestimmen die Vorzeichen der Quadratwurzeln aus N_1 und N_2 so, dass

$$\frac{a_{22}\frac{\partial x}{\partial p} - a_{21}\frac{\partial x}{\partial q}}{\sqrt{N_1}}, \text{ etc.,} \quad \text{und} \quad \frac{-a_{12}\frac{\partial x}{\partial p} + a_{11}\frac{\partial x}{\partial q}}{\sqrt{N_2}}, \text{ etc.}$$

Richtungscosinus werden.

Nimmt man jetzt:

$$T_1 = \frac{\sqrt{N_1}}{\vartheta}\mathfrak{T}_1, \quad T_2 = \frac{\sqrt{N_2}}{\vartheta}\mathfrak{T}_2,$$

so werden $(dx)_{T_1}$, $(dy)_{T_1}$, $(dz)_{T_1}$ die Richtungscosinus der Tangente einer Curve $T_2 = 0$, während $(dx)_{T_2}$, $(dy)_{T_2}$, $(dz)_{T_2}$ die Richtungscosinus der Tangente einer Curve $T_1 = 0$ sind. Der Winkel beider Tangenten in einem Punkt der Fläche sei φ, sodass:

$$\sum_x (dx)_{T_1}(dx)_{T_2} = \cos\varphi = f.$$

Dabei soll φ als positiver oder negativer Winkel betrachtet werden, je nachdem die erste nicht verschwindende der drei Determinanten:

$$(dx)_{T_1}(dy)_{T_2} - (dx)_{T_2}(dy)_{T_1}, \quad (dz)_{T_1}(dx)_{T_2} - (dz)_{T_2}(dx)_{T_1},$$
$$(dy)_{T_1}(dz)_{T_2} - (dy)_{T_2}(dz)_{T_1}$$

positiv oder negativ ausfällt. Für die Richtungscosinus X, Y, Z der Flächennormale folgen dann die Gleichungen:

$$X = \frac{(dy)_{T_1}(dz)_{T_2} - (dy)_{T_2}(dz)_{T_1}}{\sin\varphi}, \quad Y = \frac{(dz)_{T_1}(dx)_{T_2} - (dz)_{T_2}(dx)_{T_1}}{\sin\varphi},$$

$$Z = \frac{(dx)_{T_1}(dy)_{T_2} - (dx)_{T_2}(dy)_{T_1}}{\sin\varphi}.$$

Ausser T_1 und T_2 führen wir zwei weitere Differentialformen T_1' und T_2' ein, so, dass $T_1' = 0$ die Differentialgleichung der orthogonalen Trajectorien der auf der Fläche gelegenen Curven $T_1 = 0$ und analog $T_2' = 0$ die Differentialgleichung der orthogonalen Trajectorien der Curven $T_2 = 0$ wird. Die Grössen ε_1 und ε_2 mögen absolut genommen die Einheit vorstellen. Wird dann:

$$T_1' = \frac{\varepsilon_1 (f T_1 + T_2)}{\sin\varphi}, \qquad T_2' = \frac{-\varepsilon_2 (T_1 + f T_2)}{\sin\varphi}$$

gesetzt, so entsteht:

$$T_1 = \frac{-\varepsilon_1 f T_1' - \varepsilon_2 T_2'}{\sin\varphi}, \qquad T_2 = \frac{\varepsilon_1 T_1' + \varepsilon_2 f T_2'}{\sin\varphi},$$

und:

$$(dx)_{T_1'} = \frac{\varepsilon_1 (-f (dx)_{T_1} + (dx)_{T_2})}{\sin\varphi}, \qquad (dx)_{T_2'} = \frac{\varepsilon_2 (-(dx)_{T_1} + f (dx)_{T_2})}{\sin\varphi},$$

womit ε_1 und ε_2 durch die Forderung bestimmt werden, dass

$$(dx)_{T_1'} \ldots, \; (dx)_{T_2'} \ldots$$

Richtungscosinus sein sollen. Den Zusammenhang zwischen den Operationen $(\;)_{T_\alpha'}$ und $(\;)_{T_\beta'}$ liefern die Gleichungen:

$$(\;)_{T_1'} = \frac{\varepsilon_1 (-f(\;)_{T_1} + (\;)_{T_2})}{\sin\varphi}, \qquad (\;)_{T_2'} = \frac{\varepsilon_2 (-(\;)_{T_1} + f(\;)_{T_2})}{\sin\varphi}.$$

In der That wird jetzt:

$$\sum_x (dx)_{T_1} (dx)_{T_1'} = 0, \qquad \sum_x (dx)_{T_2} (dx)_{T_2'} = 0,$$

ferner:

$$\sum (dx)^2_{T_1'} = \sum (dx)^2_{T_2'} = 1,$$

und:

$$\sum_x (dx)_{T_1'} (dx)_{T_2'} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cos\varphi, \qquad \sum_x (dx)_{T_1} (dx)_{T_2'} = -\varepsilon_2 \sin\varphi,$$

$$\sum (dx)_{T_2} (dx)_{T_1'} = \varepsilon_1 \sin\varphi,$$

$$X = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{(dy)_{T_1'} (dz)_{T_2'} - (dy)_{T_2'} (dz)_{T_1'}}{\sin\varphi},$$

$$Y = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{(dz)_{T_1'} (dx)_{T_2'} - (dz)_{T_2'} (dx)_{T_1'}}{\sin\varphi},$$

$$Z = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{(dx)_{T_1'} (dy)_{T_2'} - (dy)_{T_2'} (dx)_{T_2'}}{\sin\varphi}.$$

Um den geometrischen Charakter der Grössen T_1 und T_2 zu erkennen, bezeichnen wir den betrachteten Flächenpunkt mit P, den Punkt $(x + dx, \ldots)$ mit P_2, ferner mit P_1 den Punkt, in welchem

die durch P_2 gehende und zur Tangente der Curve $T_1 = 0$ parallele Gerade die Tangente der Curve $T_2 = 0$ schneidet. Dann lehren die Ausdrücke

$$dx = (dx)_{T_1} T_1 + (dx)_{T_2} T_2, \text{ etc.}$$

dass T_1 die Abscisse des Punktes P_1 in Bezug auf P, aber T_2 die Abscisse des Punktes P_2 in Bezug auf P_1 ist. Man hat also T_1 und T_2 als Linienelemente auf der Fläche zu betrachten.

Stellt man die Operationen $(T)_{T_1}$ etc. in den ursprünglich gegebenen Grössen $a_{\lambda\mu}$ dar, so entsteht:

$$(T)_{T_1} = \frac{a_{22}(T)_{dp} - a_{21}(T)_{dq}}{\sqrt{N_1}}, \quad (T)_{T_2} = \frac{-(T)_{dp}\, a_{12} + (T)_{dq}\, a_{11}}{\sqrt{N_2}},$$

$$(T)_{T_1'} = \frac{\varepsilon_1}{\sin\varphi}\left[(T)_{dp}\left(\frac{-f a_{22}}{\sqrt{N_1}} - \frac{a_{12}}{\sqrt{N_2}}\right) + (T)_{dq}\left(\frac{f a_{21}}{\sqrt{N_1}} + \frac{a_{11}}{\sqrt{N_2}}\right)\right],$$

$$(T)_{T_2'} = \frac{\varepsilon_2}{\sin\varphi}\left[(T)_{dp}\left(\frac{-a_{22}}{\sqrt{N_1}} - \frac{f a_{12}}{\sqrt{N_2}}\right) + (T)_{dq}\left(\frac{a_{21}}{\sqrt{N_1}} + \frac{f a_{11}}{\sqrt{N_2}}\right)\right].$$

§ 3.

Wiederholte Anwendung der Operationen $(\;)_{T_\alpha}$. Fundamentalgleichungen.

Die Formeln, welche die zweiten Ableitungen der Coordinaten der Punkte einer Fläche durch die ersten Ableitungen derselben und durch die Richtungscosinus der Flächennormalen ausdrücken, sind bekanntlich für die Flächentheorie von fundamentaler Bedeutung. In der hier verfolgten Betrachtungsweise müssen die analogen Formeln die Gestalt haben:

$$(1) \quad \begin{cases} (dx)_{T_1 T_1} = \beta_1{}^{11}(dx)_{T_1} + \beta_2{}^{11}(dx)_{T_2} + \Theta_{11} X, \\ (dx)_{T_1 T_2} = \beta_1{}^{12}(dx)_{T_1} + \beta_2{}^{12}(dx)_{T_2} + \Theta_{12} X, \\ (dx)_{T_2 T_1} = \beta_1{}^{21}(dx)_{T_1} + \beta_2{}^{21}(dx)_{T_2} + \Theta_{21} X, \\ (dx)_{T_2 T_2} = \beta_1{}^{22}(dx)_{T_1} + \beta_2{}^{22}(dx)_{T_2} + \Theta_{22} X, \end{cases}$$

und es fragt sich, welche geometrische Bedeutung den hier auftretenden Grössen β und Θ zukommt. Zunächst wird die Integrabilitätsbedingung für dx zu:

$$(dx)_{T_1 T_2} - (dx)_{T_2 T_1} = (d \log \lambda_1)_{T_2}(dx)_{T_1} - (d \log \lambda_2)_{T_1}(dx)_{T_2}$$

d. h.

$$(\beta_1{}^{12} - \beta_1{}^{21})(dx)_{T_1} + (\beta_2{}^{12} - \beta_2{}^{21})(dx)_{T_2} + (\Theta_{12} - \Theta_{21}) X$$
$$= (d \log \lambda_1)_{T_2}(dx)_{T_1} - (d \log \lambda_2)_{T_1}(dx)_{T_2},$$

sodass:

$$(2) \quad \beta_1{}^{12} - \beta_1{}^{21} = (d \log \lambda_1)_{T_2}, \quad \beta_2{}^{12} - \beta_1{}^{21} = (d \log \lambda_2)_{T_1}, \quad \Theta_{12} = \Theta_{21},$$

Den Krümmungsradius des zu $T_2 = 0$ bez. $T_1 = 0$ gehörenden Normalschnitts wollen wir mit ϱ_{T_1} bez. ϱ_{T_2} bezeichnen. Dann entsteht:

$$\frac{1}{\varrho_{T_1}} = -\sum_x (dx)_{T_1}(dX)_{T_1} = \sum X\,(dx)_{T_1\,T_1},$$

$$\frac{1}{\varrho_{T_2}} = -\sum_x (dx)_{T_2}(dX)_{T_2} = \sum X\,(dx)_{T_2\,T_2}$$

sodass:

$$\Theta_{11} = \frac{1}{\varrho_{T_1}}, \qquad \Theta_{22} = \frac{1}{\varrho_{T_2}}.$$

Zu einer stets gültigen rationalen Darstellung von Θ_{12} durch anschauliche Grössen kann man die Normalkrümmungen der Curven benutzen, welche die von den Curven $T_1 = 0$ und $T_2 = 0$ gebildeten Winkel halbiren. Längs der einen dieser Curven ist $T_1 = T_2$ und der Krümmungsradius des entsprechenden Normalschnitts sei ϱ'. Längs der anderen ist $T_1 = -T_2$ und hier werde der fragliche Krümmungsradius mit ϱ'' bezeichnet. Es entsteht dann:

$$\frac{1}{\varrho'} = -\frac{\sum_x\left((dx)_{T_1} + (dx)_{T_2}\right)\left((dX)_{T_1} + (dX)_{T_2}\right)}{2(1+\cos\varphi)} = \frac{\Theta_{11} + \Theta_{22} + 2\Theta_{12}}{2(1+\cos\varphi)},$$

$$\frac{1}{\varrho''} = -\frac{\sum_x\left((dx)_{T_1} - (dx)_{T_2}\right)\left((dX)_{T_1} - (dX)_{T_2}\right)}{2(1-\cos\varphi)} = \frac{\Theta_{11} + \Theta_{22} - 2\Theta_{12}}{2(1-\cos\varphi)},$$

sodass:

$$\Theta_{12} = \frac{1+\cos\varphi}{\varrho'} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_{T_1}} + \frac{1}{\varrho_{T_2}}\right) = \frac{\cos\varphi - 1}{\varrho''} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_{T_1}} + \frac{1}{\varrho_{T_2}}\right).$$

In Betreff der Grössen β folgt zunächst aus den Gleichungen:

$$\sum_x (dx)_{T_1}(dx)_{T_1\,T_1} = 0, \qquad \sum_x (dx)_{T_1}(dx)_{T_1\,T_2} = 0,$$

$$\sum_x (dx)_{T_2}(dx)_{T_2\,T_1} = 0, \qquad \sum_x (dx)_{T_2}(dx)_{T_2\,T_2} = 0,$$

dass:

(3) $\beta_1^{11} = -f\beta_2^{11},\ \beta_1^{12} = -f\beta_2^{12},\ \beta_2^{21} = -f\beta_1^{21},\ \beta_2^{22} = -f\beta_1^{22}$
wird.

Es bleiben also nur noch die vier Grössen β_2^{11}, β_2^{12}, β_1^{21}, β_1^{22} zu bestimmen. Hierzu eignen sich die geodätischen Krümmungen der Curven $T_2 = 0$, $T_1 = 0$, $T_2' = 0$, $T_1' = 0$, deren Radien wir der Reihe nach mit R_{T_1}, R_{T_2}, $R_{T_1'}$, $R_{T_2'}$ bezeichnen wollen. Für jeden dieser Radien ergeben sich leicht zwei der Form nach verschiedene Ausdrücke. So ist nach der Definition:

$$\frac{1}{R_{T_1}} = -\sum_x (dx)_{T_1}(dx)_{T_1'\,T_1}.$$

Führt man die Operation $(\ )_{T_1}$ auf $d(dx)_{T_1'}$ aus, so entsteht:

$$\frac{1}{R_{T_1}} = -\,\varepsilon_1\,\{(d\varphi)_{T_1} + \sin\varphi\,\beta_1^{21}\}\,. \tag{4}$$

Berücksichtigt man aber, dass aus der Gleichung:

$$\sum_x (dx)_{T_1}(dx)_{T_1'} = 0$$

folgt:

$$\sum_x (dx)_{T_1}(dx)_{T_1'\,T_1} = -\sum (dx)_{T_1'}\,(dx)_{T_1\,T_1},$$

so ergiebt sich:

$$\frac{1}{R_{T_1}} = \varepsilon_1\,\sin\varphi\,\beta_2''. \tag{5}$$

Auf ähnliche Weise zieht man aus den Gleichungen:

$$\frac{1}{R_{T_2}} = -\sum_x (dx)_{T_2}(dx)_{T_2'\,T_2}, \qquad \frac{1}{R_{T_1'}} = -\sum_x (dx)_{T_1'}\,(dx)_{T_1\,T_1'},$$

$$\frac{1}{R_{T_2'}} = -\sum_x (dx)_{T_2'}(dx)_{T_2\,T_2'}$$

die Schlüsse:

$$\frac{1}{R_{T_2}} = \varepsilon_2\left((d\varphi)_{T_2} + \sin\varphi\,\beta_2^{12}\right), \tag{6}$$

$$\frac{1}{R_{T_2}} = -\,\varepsilon_2\,\sin\varphi\,\beta_1^{22}, \tag{7}$$

$$\frac{1}{R_{T_1'}} = \frac{1}{\sin\varphi}\left((d\varphi)_{T_2} - f(d\varphi)_{T_1}\right) + \beta_1^{22} - f\beta_1^{21}, \tag{8}$$

$$\frac{1}{R_{T_1'}} = f\beta_2^{11} - \beta_2^{12}, \tag{9}$$

$$\frac{1}{R_{T_2'}} = \frac{1}{\sin\varphi}\left((d\varphi)_{T_1} - f(d\varphi)_{T_2}\right) + \beta_2^{11} - f\beta_2^{12}, \tag{10}$$

$$\frac{1}{R_{T_2'}} = f\beta_1^{22} - \beta_1^{21}. \tag{11}$$

Die zu bestimmenden Grössen β erhalten daher vermöge der Gleichungen (5), (7), (9), (11) die Werthe:

$$\left\{\begin{array}{ll} \beta_2^{11} = \dfrac{\varepsilon_1}{\sin\varphi\,R_{T_1}}, & \beta_2^{12} = \dfrac{\varepsilon_1\cos\varphi}{\sin\varphi\,R_{T_1}} - \dfrac{1}{R_{T_1'}}, \\ \beta_1^{21} = -\dfrac{\varepsilon_2\cos\varphi}{\sin\varphi\,R_{T_2}} - \dfrac{1}{R_{T_2'}}, & \beta_1^{22} = -\dfrac{\varepsilon_2}{\sin\varphi\,R_{T_2}}. \end{array}\right. \tag{12}$$

Unter Benutzung dieser Werthe ergeben die Gleichungen (4), (6), (8), (10) das System:

$$
(13)\quad \begin{cases}
(d\varphi)_{T_1} = \dfrac{\varepsilon_2 \cos\varphi}{R_{T_2}} + \dfrac{\sin\varphi}{R_{T_2'}} - \dfrac{\varepsilon_1}{R_{T_1}} = -\sin\varphi\,(\beta_1{}^{21} + \beta_2{}^{11}), \\[2mm]
(d\varphi)_{T_2} = \dfrac{\varepsilon_2}{R_{T_2}} - \dfrac{\varepsilon_1 \cos\varphi}{R_{T_1}} + \dfrac{\sin\varphi}{R_{T_1'}} = -\sin\varphi\,(\beta_1{}^{22} + \beta_2{}^{12}), \\[2mm]
(d\varphi)_{T_1'} = \dfrac{\varepsilon_1}{R_{T_1'}} + \dfrac{\varepsilon_1\varepsilon_2 \sin\varphi}{R_{T_2}} - \dfrac{\varepsilon_1 \cos\varphi}{R_{T_2'}}, \\[2mm]
(d\varphi)_{T_2'} = \dfrac{\varepsilon_2 f}{R_{T_1'}} + \dfrac{\varepsilon_1\varepsilon_2 \sin\varphi}{R_{T_1}} - \dfrac{\varepsilon_2}{R_{T_2'}}.
\end{cases}
$$

Ferner folgt aus den Gleichungen (2) mit Hülfe von (3) und (13):

$$
(14)\quad \begin{cases}
(d\log\lambda_1)_{T_2} = -\dfrac{\varepsilon_1 \cos^2\varphi}{\sin\varphi\, R_{T_1}} + \dfrac{\cos\varphi}{R_{T_1'}} + \dfrac{\varepsilon_2 \cos\varphi}{\sin\varphi\, R_{T_2}} + \dfrac{1}{R_{T_2'}} \\[2mm]
\qquad\qquad = -f\beta_2{}^{12} - \beta_1{}^{21}, \\[2mm]
(d\log\lambda_2)_{T_1} = -\dfrac{\varepsilon_1 \cos\varphi}{\sin\varphi\, R_{T_1}} + \dfrac{1}{R_{T_1'}} + \dfrac{\varepsilon_2 \cos^2\varphi}{\sin\varphi\, R_{T_2}} + \dfrac{\cos\varphi}{R_{T_2'}} \\[2mm]
\qquad\qquad = -\beta_2{}^{12} - f\beta_1{}^{21}.
\end{cases}
$$

sodass:

$$
(15)\qquad \frac{1}{R_{T_1'}} = \left(d\log\frac{\lambda_2}{\sin\varphi}\right)_{T_1}, \qquad \frac{1}{R_{T_2'}} = \left(d\log\frac{\lambda_1}{\sin\varphi}\right)_{T_2}.
$$

Sind λ_1' und λ_2' integrirende Factoren von T_1' und T_2', so schliesst man aus (15), dass:

$$
(16)\qquad \frac{1}{R_{T_1}} = \left(d\log\frac{\lambda_2'}{\sin\varphi}\right)_{T_1'}, \qquad \frac{1}{R_{T_2}} = \left(d\log\frac{\lambda_1'}{\sin\varphi}\right)_{T_2'}.
$$

Die Gleichungen (1) nehmen unter Benutzung der Gleichungen (3) folgende für die Anwendungen bequemere Form an:

$$
(17)\quad \begin{cases}
(dx)_{T_1T_1} = \dfrac{1}{R_{T_1}}(dx)_{T_1'} + \Theta_{11}X, \\[2mm]
(dx)_{T_1T_2} = \left(\dfrac{\cos\varphi}{R_{T_1}} - \dfrac{\varepsilon_1\sin\varphi}{R_{T_1'}}\right)(dx)_{T_1'} + \Theta_{12}X, \\[2mm]
(dx)_{T_2T_1} = \left(\dfrac{\cos\varphi}{R_{T_2}} + \dfrac{\varepsilon_2\sin\varphi}{R_{T_2'}}\right)(dx)_{T_2'} + \Theta_{12}X, \\[2mm]
(dx)_{T_2T_2} = \dfrac{1}{R_{T_2}}(dx)_{T_2'} + \Theta_{12}X.
\end{cases}
$$

Um die entsprechenden drei übrigen Systeme, welche sich aus der Anwendung der Operationen $(\;)_{T_\alpha T_\beta'}$, $(\;)_{T_\alpha' T_\beta}$, $(\;)_{T_\alpha' T_\beta'}$ ergeben, zu bilden, setzen wir

$$
\mathsf{H}_{11} = \frac{-\Theta_{11} + f\Theta_{12}}{\sin^2\varphi}, \quad \mathsf{H}_{12} = \frac{f\Theta_{11} - \Theta_{12}}{\sin^2\varphi}, \quad \mathsf{H}_{21} = \frac{-\Theta_{12} + f\Theta_{22}}{\sin^2\varphi}, \quad \mathsf{H}_{22} = \frac{f\Theta_{12} - \Theta_{22}}{\sin^2\varphi},
$$

$$
\Theta_{11}' = \mathsf{H}_{12}f - \mathsf{H}_{22}, \quad \Theta_{12}' = \varepsilon_1\varepsilon_2(\mathsf{H}_{12} - f\mathsf{H}_{22}) = \varepsilon_1\varepsilon_2(\mathsf{H}_{21} - f\mathsf{H}_{11}),
$$

$$
\Theta_{22}' = -\mathsf{H}_{11} + f\mathsf{H}_{21}.
$$

Dann findet sich:

$$
(18)\quad \begin{cases}
(dX)_{T_1} = \mathsf{H}_{11}(dx)_{T_1} + \mathsf{H}_{12}(dx)_{T_2} = \dfrac{\varepsilon_2\Theta_{11}}{\sin\varphi}(dx)_{T_2'} - \dfrac{\varepsilon_2\Theta_{12}}{\sin\varphi}(dx)_{T_1'}, \\[2ex]
(dX)_{T_2} = \mathsf{H}_{21}(dx)_{T_1} + \mathsf{H}_{22}(dx)_{T_2} = \dfrac{\varepsilon_2\Theta_{12}}{\sin\varphi}(dx)_{T_2'} - \dfrac{\varepsilon_1\Theta_{22}}{\sin\varphi}(dx)_{T_1'}, \\[2ex]
(dX)_{T_1'} = \mathsf{H}_{22}(dx)_{T_1'} - \varepsilon_1\varepsilon_2\mathsf{H}_{12}(dx)_{T_2'} = \dfrac{\varepsilon_2\Theta_{12}'}{\sin\varphi}(dx)_{T_1} - \dfrac{\varepsilon_1\Theta_{11}'}{\sin\varphi}(dx)_{T_2}, \\[2ex]
(dX)_{T_2'} = -\varepsilon_1\varepsilon_2\mathsf{H}_{21}(dx)_{T_1'} + \mathsf{H}_{11}(dx)_{T_2'} = \dfrac{\varepsilon_2\Theta_{22}'}{\sin\varphi}(dx)_{T_1} - \dfrac{\varepsilon_1\Theta_{12}'}{\sin\varphi}(dx)_{T_2};
\end{cases}
$$

$$
(19)\quad \begin{cases}
(dx)_{T_1T_1'} = -\dfrac{1}{R_{T_1'}}(dx)_{T_1'} - \varepsilon_1\cdot\mathsf{H}_{12}\sin\varphi\, X, \\[2ex]
(dx)_{T_1T_2'} = -\varepsilon_2\left(\dfrac{\sin\varphi}{R_{T_1}} + \dfrac{\varepsilon_1\cos\varphi}{R_{T_1'}}\right)(dx)_{T_1'} + \varepsilon_2\sin\varphi\,\mathsf{H}_{11}\,X, \\[2ex]
(dx)_{T_2T_1'} = \varepsilon_1\left(\dfrac{\sin\varphi}{R_{T_2}} - \dfrac{\varepsilon_2\cos\varphi}{R_{T_2'}}\right)(dx)_{T_2'} + \varepsilon_1\mathsf{H}_{22}\sin\varphi\, X, \\[2ex]
(dx)_{T_2T_2'} = -\dfrac{1}{R_{T_2'}}(dx)_{T_2'} + \varepsilon_2\sin\varphi\,\mathsf{H}_{21}\,X;
\end{cases}
$$

$$
(20)\quad \begin{cases}
(dx)_{T_1'T_1} = -\dfrac{1}{R_{T_1}}(dx)_{T_1} - \varepsilon_1\sin\varphi\,\mathsf{H}_{12}X, \\[2ex]
(dx)_{T_1'T_2} = -\left(\dfrac{\cos\varphi}{R_{T_1}} - \dfrac{\varepsilon_1\sin\varphi}{R_{T_1'}}\right)(dx)_{T_1} - \varepsilon_1\sin\varphi\,\mathsf{H}_{22}X, \\[2ex]
(dx)_{T_2'T_1} = -\left(\dfrac{\cos\varphi}{R_{T_2}} + \dfrac{\varepsilon_2\sin\varphi}{R_{T_2'}}\right)(dx)_{T_2} + \varepsilon_2\sin\varphi\,\mathsf{H}_{11}X, \\[2ex]
(dx)_{T_2'T_2} = -\dfrac{1}{R_{T_2}}(dx)_{T_2} + \varepsilon_2\sin\varphi\,\mathsf{H}_{21}X;
\end{cases}
$$

$$
(21)\quad \begin{cases}
(dx)_{T_1'T_1'} = \dfrac{1}{R_{T_1'}}(dx)_{T_1} + \Theta_{11}'X, \\[2ex]
(dx)_{T_1'T_2'} = \varepsilon_2\left(\dfrac{\sin\varphi}{R_{T_1}} + \dfrac{\varepsilon_1\cos\varphi}{R_{T_1'}}\right)(dx)_{T_1} + \Theta_{12}'X, \\[2ex]
(dx)_{T_2'T_1'} = -\varepsilon_1\left(\dfrac{\sin\varphi}{R_{T_2}} - \dfrac{\varepsilon_2\cos\varphi}{R_{T_2'}}\right)(dx)_{T_2} + \Theta_{12}'X, \\[2ex]
(dx)_{T_2'T_2'} = \dfrac{1}{R_{T_2'}}(dx)_{T_2} + \Theta_{22}'X.
\end{cases}
$$

Die Grössen H bestimmen die zu den Tangenten der Curven $T_2' = 0$ und $T_1' = 0$ conjugirten Richtungen. Längs der der Curve $T_2' = 0$ conjugirten Curve hat man:

$$T_1 : T_2 = \mathsf{H}_{22} : -\mathsf{H}_{12}$$

und damit

$$dX : dY : dZ = (dx)_{T_1} : (dy)_{T_1} : (dz)_{T_1}.$$

Längs der der Curve $T_1' = 0$ conjugirten Curve ist:

$$T_1 : T_2 = \mathsf{H}_{21} : -\mathsf{H}_{11}$$

und dementsprechend entsteht:

$$dX : dY : dZ = (dx)_{T_2} : (dy)_{T_2} : (dz)_{T_2}.$$

Es sind daher die sphärischen Bilder der conjugirten Curven der Orthogonalschaar eines Liniensystems auf der Fläche diesem Liniensystem parallel — ein Satz, den Herr Dini (Annali di Mat. Ser. II, Bd. IV, S. 180) bezüglich eines Systems von Asymptotenlinien ausgesprochen hat.

Um die Coefficienten β geometrisch zu deuten, kann man auch von einer anderen Differentialformel als der im § 1 aufgestellten, die geodätischen Krümmungen liefernden, ausgehen, welche Herr Voss zur Bestimmung der Coefficienten β_2^{12} und β_1^{21} benutzt hat für den Fall, dass die Curven $T_1 = 0$, $T_2 = 0$ mit den Parameterlinien $p = \text{const.}$, $q = \text{const.}$ zusammenfallen. Diese Formel ergiebt sich so: durch einen Punkt $P(x, y, z)$ gehe eine Gerade L mit den Richtungscosinus $\cos a_x$, $\cos a_y$, $\cos a_z$ und eine Ebene E, deren Gleichung sei:

$$\sum (\xi - x) \cos b_x = 0.$$

Die senkrechte Projection L_1 der Geraden L auf die Ebene E habe die Richtungscosinus $\cos c_x$, $\cos c_y$, $\cos c_z$. Ist dann P_1 ein dem Punkte P auf L benachbarter Punkt, so geht durch ihn eine der Ebene E benachbarte Ebene, deren Gleichung ist:

$$\sum (\xi - x - \delta x)(\cos b_x + \delta \cos b_x) = 0.$$

Die Abscisse des Punktes, in welchem diese Ebene die Gerade L_1 schneidet, wird durch den Ausdruck

$$\frac{\sum \delta x \cos b_x}{\sum \cos c_x \,\delta \cos b_x}$$

gegeben. Lässt man die Gerade L der Reihe nach mit der Tangente der Curve $T_2 = 0$, $T_1 = 0$, $T_2' = 0$, $T_1' = 0$ und die Gerade L_1 entsprechend mit der Tangente der Curve $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $T_1' = 0$, $T_2' = 0$ zusammenfallen, so finden sich für die reciproken Werthe der fraglichen Abscissen die Ausdrücke:

$$-\beta_1^{21}, \quad -\beta_2^{12}, \quad \frac{1}{R_{T_2}} - \frac{\varepsilon_2 \cos\varphi}{R_{T_2'} \sin\varphi}, \quad \frac{1}{R_{T_1}} + \frac{\varepsilon_1 \cos\varphi}{R_{T_1'} \sin\varphi}.$$

Die sogenannten Fundamentalgleichungen erhält man in der Form:

$$(22) \qquad \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} = \left(d\frac{1}{R_{T_1}}\right)_{T_1'} + \left(d\frac{1}{R_{T_1'}}\right)_{T_1} + \frac{1}{R_{T_1}^2} - \frac{1}{R_{T_1'}^2},$$

$$(23) \qquad (d\Theta_{11})_{T_2} - (d\Theta_{12})_{T_1} = \sin^2\varphi \left\{ \mathsf{H}_{11}\beta_1^{21} - 2\mathsf{H}_{12}\beta_2^{12} + \mathsf{H}_{22}\beta_2^{11} \right\},$$

$$(24) \qquad (d\Theta_{22})_{T_1} - (d\Theta_{12})_{T_2} = \sin^2\varphi \left\{ \mathsf{H}_{11}\beta_1^{22} - 2\mathsf{H}_{21}\beta_1^{21} + \mathsf{H}_{22}\beta_2^{12} \right\}.$$

§ 4.

Geodätische Krümmungen in Orthogonalschaaren. Anwendungen.

Mit Hülfe der Formeln (16) des vorigen Paragraphen soll nun die geodätische Krümmung einer Curve einer beliebigen Schaar und die der zugehörigen Curve der Orthogonalschaar dargestellt werden. Beide Schaaren seien durch Gleichungen von der Form:

$$T_0 = b_{11} T_1 + b_{12} T_2 = 0, \qquad T_0' = b_{21} T_1 + b_{22} T_2 = 0$$

gegeben, wo T_0 und T_0' als so bestimmt angenommen sind, dass $(dx)_{T_0} \ldots$, $(dx)_{T_0'} \ldots$ Richtungscosinus werden. Nimmt man:

$$\sum (dx)_{T_1} (dx)_{T_0} = \cos \alpha, \qquad \sum (dx)_{T_1'} (dx)_{T_0} = \sin \alpha,$$

so entsteht:

$$(dx)_{T_0} = \frac{\sin(\varphi - \varepsilon_1 \alpha)}{\sin \varphi} (dx)_{T_1} + \frac{\sin \varepsilon_1 \alpha}{\sin \varphi} (dx)_{T_2},$$

$$(dx)_{T_0'} = \frac{-\varepsilon' \varepsilon_1 \cos(\varphi - \varepsilon_1 \alpha)}{\sin \varphi} (dx)_{T_1} + \frac{\varepsilon' \varepsilon_1 \cos \alpha}{\sin \varphi} (dx)_{T_2},$$

wo ε' die positive oder negative Einheit bedeutet, derart, dass die erste nicht verschwindende der Grössen $(dz)_{T_0'}$, $(dy)_{T_0'}$, $(dx)_{T_0'}$ einen positiven Werth erhält. Für die Coefficienten b und ihre Determinante B folgen jetzt die Gleichungen:

$$b_{11} = \cos \alpha, \quad b_{12} = \cos(\varepsilon_1 \varphi - \alpha), \quad b_{21} = -\varepsilon' \sin \alpha,$$
$$b_{22} = \varepsilon' \sin(\varepsilon_1 \varphi - \alpha), \quad B = \varepsilon' \varepsilon_1 \sin \varphi.$$

Wird die geodätische Krümmung der Curve $T_0' = 0$ bez. $T_0 = 0$ mit $\frac{1}{R_{T_0}}$ bez. $\frac{1}{R_{T_0'}}$ bezeichnet, so ergiebt sich, falls λ_0 und λ_0' integrirende Factoren der Formen T_0 und T_0' sind:

$$\frac{1}{R_{T_0}} = (d \log \lambda_0)_{T_0'}, \quad \frac{1}{R_{T_0'}} = (d \log \lambda_0')_{T_0}.$$

Da aber:

$$(d \log \lambda_0)_{T_0'} = -\frac{b_{12}}{B} (d \log \lambda_0)_{T_1} + \frac{b_{11}}{B} (d \log \lambda_0)_{T_2},$$

so liefert der Satz 1) § 2 die Gleichung:

$$\frac{B}{R_{T_0}} = (d \log \lambda_1)_{T_2} b_{11} - (d \log \lambda_2)_{T_1} b_{12} - (d b_{11})_{T_2} + (d b_{12})_{T_1}$$
$$= \frac{\cos \alpha}{R_{T_2'}} - \frac{\cos(\varphi - \alpha \varepsilon_1)}{R_{T_1'}} + \varepsilon_1 \sin \varphi \big(\sin \alpha (d\alpha)_{T_2'} + \cos \alpha (d\alpha)_{T_1}\big)$$
$$+ \varepsilon_2 \cos \alpha (d\varphi)_{T_2'}$$

und damit:

$$(1) \qquad \frac{1}{R_{T_0}} = \varepsilon' \left\{ \cos \alpha \left(\frac{1}{R_{T_1}} + (d\alpha)_{T_1} \right) - \sin \alpha \left(\frac{1}{R_{T_1'}} - (d\alpha)_{T_1'} \right) \right\}.$$

Entsprechend erhält man:

$$(2)\qquad \frac{1}{R_{T_0'}} = \cos\alpha\left(\frac{1}{R_{T_1'}} - (d\alpha)_{T_1'}\right) + \sin\alpha\left(\frac{1}{R_{T_1}} + (d\alpha)_{T_1}\right).$$

Diese Formeln liefern besonders dann einfache Resultate, wenn α constant oder eine Function von φ allein ist.

Es sollen die Winkelhalbirungslinien der Curven $T_1 = 0$, $T_2 = 0$ betrachtet werden. Längs der einen derselben ist $T_1 = T_2$ und diese halbirt den von den positiven Theilen der Tangenten der Curven $T_1 = 0$, $T_2 = 0$ gebildeten Winkel. Nehmen wir diese zur Curve $T_0' = 0$, so ist längs ihrer:

$$\sum (dx)_{T_1}(dx)_{T_0} = \sum (dx)_{T_2}(dx)_{T_0}$$

und dies ergiebt:

$$\alpha = \frac{\varepsilon_1\varphi}{2}.$$

Das Zeichen ε' muss hier so bestimmt werden, dass die Ausdrücke

$$-\frac{\varepsilon'\varepsilon_1\cos\frac{\varphi}{2}}{\sin\varphi}\left((dx)_{T_1} - (dx)_{T_2}\right) \text{ etc.}$$

Richtungscosinus darstellen. Dann findet sich:

$$(3)\qquad \frac{1}{R_{T_0}} = \frac{\varepsilon'\varepsilon_1}{2}\left\{\cos\frac{\varphi}{2}\left(\frac{\varepsilon_1}{R_{T_1}} + \frac{\varepsilon_2}{R_{T_2}}\right) - \sin\frac{\varphi}{2}\left(\frac{1}{R_{T_1'}} - \frac{1}{R_{T_2'}}\right)\right\},$$

$$(4)\qquad \frac{1}{R_{T_0'}} = \frac{1}{2}\left\{\cos\frac{\varphi}{2}\left(\frac{1}{R_{T_1'}} + \frac{1}{R_{T_2'}}\right) + \sin\frac{\varphi}{2}\left(\frac{\varepsilon_1}{R_{T_1}} - \frac{\varepsilon_2}{R_{T_2}}\right)\right\}.$$

Wir führen nun die Voraussetzung ein, dass die Curven $T_2 = 0$, $T_1 = 0$ Asymptotenlinien seien. Um dies genauer zu präcisiren, nennen wir den grösseren der beiden Hauptkrümmungshalbmesser ϱ_1, den kleineren ϱ_2, und bezeichnen mit A_1, B_1, C_1 bezüglich A_2, B_2, C_2 die Richtungscosinus der Tangente der zu ϱ_1 bez. ϱ_2 gehörenden Krümmungslinien. Ferner seien $S_1 = 0$ und $S_2 = 0$ die Gleichungen der Krümmungslinien, derart, dass man hat:

$$dx = A_1 S_1 + A_2 S_2.$$

Setzt man nun:

$$(dx)_{T_1} = \frac{A_1\sqrt{\varrho_1} - A_2\sqrt{-\varrho_2}}{\delta\sqrt{\varrho_1 - \varrho_2}},\qquad (dx)_{T_2} = \frac{A_1\sqrt{\varrho_1} + A_2\sqrt{-\varrho_2}}{\sqrt{\varrho_1 - \varrho_2}},$$

$$(dx)_{T_1'} = \frac{A_1\sqrt{-\varrho_2} + A_2\sqrt{\varrho_1}}{\sqrt{\varrho_1 - \varrho_2}},\qquad (dx)_{T_2'} = \frac{A_1\sqrt{-\varrho_2} - A_2\sqrt{\varrho_1}}{\delta'\sqrt{\varrho_1 - \varrho_2}},$$

wo sämmtliche Quadratwurzeln positiv zu nehmen sind, und δ sowohl wie δ' die positive oder negative Einheit bedeuten so, dass $(dx)_{T_1}\ldots$, $(dx)_{T_2'}\ldots$ Richtungscosinus werden, so entstehen die Beziehungen zwischen den T und S in der Form:

$$\frac{\sqrt{\varrho_1}}{\sqrt{\varrho_1-\varrho_2}}(\delta T_1+T_2)=S_1,\qquad \frac{\sqrt{-\varrho_2}}{\sqrt{\varrho_1-\varrho_2}}(-\delta T_1+T_2)=S_2,$$

woraus folgt:

$$(\ )_{T_1}=\frac{\delta}{\sqrt{\varrho_1-\varrho_2}}\left\{\sqrt{\varrho_1}\,(\ )_{S_1}-\sqrt{-\varrho_2}\,(\ )_{S_2}\right\},$$

$$(\ )_{T_2}=\frac{1}{\sqrt{\varrho_1-\varrho_2}}\left\{\sqrt{\varrho_1}\,(\ )_{S_1}+\sqrt{-\varrho_2}\,(\ )_{S_2}\right\}.$$

Mit Hülfe dieser Abhängigkeit der Operationen $(\ )_T$ von den Operationen $(\ )_S$ kann man leicht zeigen, dass $T_1=0$ und $T_2=0$ wirklich Gleichungen von Asymptotenlinien sind, in dem Θ_{11} und Θ_{22} verschwinden.

Da die Krümmungslinien die Winkelhalbirungslinien der Asymptotencurven sind, müssen die Gleichungen (3) und (4) Beziehungen ergeben zwischen den geodätischen Krümmungen der Krümmungslinien, der Asymptotenlinien und der orthogonalen Trajectorien der letzteren. Um diese Beziehungen aufzufinden, setzen wir:

$$X=\varepsilon(B_1C_2-B_2C_1),\quad Y=\varepsilon(C_1A_2-C_2A_1),\quad Z=\varepsilon(A_1B_2-A_2B_1),$$

wo $\varepsilon=+1$ oder $=-1$, je nachdem die letzte nicht verschwindende Klammer rechts positiv oder negativ ist. Dann erhält man:

$$\cos\varphi=\sum_x (dx)_{T_1}(dx)_{T_2}=\delta\,\frac{\varrho_1+\varrho_2}{\varrho_1-\varrho_2}.$$

$$\begin{vmatrix}(dx)_{T_1} & (dx)_{T_2}\\ (dy)_{T_1} & (dy)_{T_2}\end{vmatrix}=\frac{2\delta\varepsilon Z\sqrt{-\varrho_1\varrho_2}}{\varrho_1-\varrho_2},$$

wo $\sqrt{-\varrho_1\varrho_2}$ positiv zu nehmen ist, sodass:

$$\sin\varphi=2\varepsilon\delta\,\frac{\sqrt{-\varrho_1\varrho_2}}{\varrho_1-\varrho_2}.$$

Zur Abkürzung nennen wir die geodätische Krümmung der zu ϱ_1 bez. ϱ_2 gehörenden Krümmungslinie $\frac{1}{R_1}$ bez. $\frac{1}{R_2}$ und setzen ausserdem $R_{T_\alpha}=F_\alpha$, $R_{T'_\alpha}=F'_\alpha$.

Ist erstens $\delta=+1$, so wird:

$$\cos\frac{\varphi}{2}=\frac{\sqrt{\varrho_1}}{\sqrt{\varrho_1-\varrho_2}},\qquad \sin\frac{\varphi}{2}=\frac{\varepsilon\sqrt{-\varrho_2}}{\sqrt{\varrho_1-\varrho_2}},$$

denn $\cos\frac{\varphi}{2}$ ist immer positiv, während φ hier das Vorzeichen ε hat.

Ferner fällt die Curve $T_1=T_2$ mit der Curve $S_2=0$ d. h. mit der zu ϱ_1 gehörenden Krümmungslinie zusammen, sodass $R_1=R_{T_0}$, $R_2=R_{T'_0}$. Ausserdem entsteht:

$$\varepsilon_1=\varepsilon,\quad \varepsilon_2=-\varepsilon\delta',\quad \varepsilon'=1.$$

Daher:

$$\frac{1}{R_1}=\frac{1}{2\sqrt{\varrho_1-\varrho_2}}\left\{\sqrt{\varrho_1}\quad\left(\frac{1}{F_1}-\frac{\delta'}{F_2}\right)-\sqrt{-\varrho_2}\left(\frac{1}{F_1'}-\frac{1}{F_2'}\right)\right\},$$

$$\frac{1}{R_2}=\frac{1}{2\sqrt{\varrho_1-\varrho_2}}\left\{\sqrt{-\varrho_2}\left(\frac{1}{F_1}+\frac{\delta'}{F_2}\right)+\sqrt{\varrho_1}\quad\left(\frac{1}{F_1'}+\frac{1}{F_2'}\right)\right\}.$$

Ist zweitens $\delta=-1$, so wird:

$$\cos\frac{\varphi}{2}=\frac{\sqrt{-\varrho_2}}{\sqrt{\varrho_1-\varrho_2}},\quad \sin\frac{\varphi}{2}=\frac{-\varepsilon\sqrt{\varrho_1}}{\sqrt{\varrho_1-\varrho_2}},$$

und die Curve $T_1=T_2$ fällt mit der Curve $S_1=0$, d. h. mit der zu ϱ_2 gehörenden Krümmungslinie zusammen. Hier wird:

$$\varepsilon_1=-\varepsilon,\quad \varepsilon_2=-\varepsilon\delta',\quad \varepsilon'=1$$

und:

$$\frac{1}{R_2}=\frac{1}{2\sqrt{\varrho_1-\varrho_2}}\left\{\sqrt{-\varrho_2}\left(\frac{1}{F_1}+\frac{\delta'}{F_2}\right)-\sqrt{\varrho_1}\quad\left(\frac{1}{F_1'}-\frac{1}{F_2'}\right)\right\},$$

$$\frac{1}{R_1}=\frac{1}{2\sqrt{\varrho_1-\varrho_2}}\left\{\sqrt{\varrho_1}\quad\left(\frac{1}{F_1}-\frac{\delta'}{F_2}\right)+\sqrt{-\varrho_2}\left(\frac{1}{F_1'}+\frac{1}{F_2'}\right)\right\}.$$

Beide Fälle lassen sich daher in das eine System:

$$(5)\qquad\begin{cases}\dfrac{1}{R_1}=\dfrac{1}{2\sqrt{\varrho_1-\varrho_2}}\left\{\sqrt{\varrho_1}\quad\left(\dfrac{1}{F_1}-\dfrac{\delta'}{F_2}\right)-\sqrt{-\varrho_2}\left(\dfrac{\delta}{F_1'}-\dfrac{1}{F_2'}\right)\right\},\\[2ex]\dfrac{1}{F_2}=\dfrac{1}{2\sqrt{\varrho_1-\varrho_2}}\left\{\sqrt{-\varrho_2}\left(\dfrac{1}{F_1}+\dfrac{\delta'}{F_2}\right)+\sqrt{\varrho_1}\quad\left(\dfrac{\delta}{F_1'}+\dfrac{1}{F_2'}\right)\right\}\end{cases}$$

zusammenfassen.

Speciell für Minimalflächen hat man:

$$\delta=\delta',\quad F_1'=F_2,\quad F_2'=F_1$$

und damit:

$$\frac{1}{R_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{F_2}-\frac{\delta}{F_1}\right),\quad \frac{1}{R_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{F_1}+\frac{1}{F_2}\right).$$

Die in (5) auftretenden Summen und Differenzen der geodätischen Krümmungen der Asymptotenlinien und ihrer orthogonalen Trajectorien stehen in Beziehung zu den Krümmungsmassen der Krümmungsmittelpunktsflächen. Zur Herleitung derselben sind zunächst die Gleichungen (23) und (24) § 3 für den vorliegenden Fall umzugestalten. Man erhält:

$$\Theta_{12}=-\frac{\sin^2\varphi}{2\cos\varphi}\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)=\frac{2\delta}{\varrho_1-\varrho_2}.$$

Daher nehmen die fraglichen Gleichungen die Form an:

$$(6)\qquad\begin{aligned}\big(d(\varrho_1-\varrho_2)\big)_{T_1}&=\delta(\varrho_1+\varrho_2)\,(\beta_1^{21}+\beta_2^{11})+2(\varrho_1-\varrho_2)\,\beta_2^{12},\\ \big(d(\varrho_1-\varrho_2)\big)_{T_2}&=\delta(\varrho_1+\varrho_2)\,(\beta_1^{22}+\beta_2^{12})+2(\varrho_1-\varrho_2)\,\beta_1^{21},\end{aligned}$$

oder:

$$(7)\quad \begin{cases} \big(d(\varrho_1-\varrho_2)\big)_{T_1} = \dfrac{3\delta(\varrho_1+\varrho_2)(\varrho_1-\varrho_2)}{2\sqrt{-\varrho_1\varrho_2}\,F_1} + \dfrac{\delta\delta'(\varrho_1+\varrho_2)^2}{2\sqrt{-\varrho_1\varrho_2}\,F_2} - \dfrac{2(\varrho_1-\varrho_2)}{F_1'} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - \dfrac{\delta(\varrho_1+\varrho_2)}{F_2'}, \\ \big(d(\varrho_1-\varrho_2)\big)_{T_2} = \dfrac{(\varrho_1+\varrho_2)^2}{2\sqrt{-\varrho_1\varrho_2}\,F_1} + \dfrac{3\delta'(\varrho_1+\varrho_2)(\varrho_1-\varrho_2)}{2\sqrt{-\varrho_1\varrho_2}\,F_2} - \dfrac{\delta(\varrho_1+\varrho_2)}{F_1'} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - \dfrac{2(\varrho_1-\varrho_2)}{F_2'}. \end{cases}$$

Setzt man

$$S_1 = -\varrho_1 H_1, \qquad S_2 = -\varrho_2 H_2,$$

so sind die Operationen $(\;)_{T_\alpha}$ mit den Operationen $(\;)_{H_\alpha}$ durch die Gleichungen verbunden:

$$(\;)_{T_1} = \frac{-\delta}{\sqrt{\varrho_1}\sqrt{\varrho_1-\varrho_2}}(\;)_{H_1} - \frac{\delta}{\sqrt{-\varrho_2}\sqrt{\varrho_1-\varrho_2}}(\;)_{H_2},$$

$$(\;)_{T_2} = \frac{-1}{\sqrt{\varrho_1}\sqrt{\varrho_1-\varrho_2}}(\;)_{H_1} - \frac{1}{\sqrt{-\varrho_2}\sqrt{\varrho_1-\varrho_2}}(\;)_{H_2}.$$

Bezeichnet man daher den Ausdruck $(d\varrho_\alpha)_{H_\beta}$ mit $\varrho_{\alpha\beta}$, so entsteht:

$$(8)\quad \begin{cases} \big(d(\varrho_1-\varrho_2)\big)_{T_1} = \dfrac{-\delta}{\sqrt{\varrho_1}\sqrt{\varrho_1-\varrho_2}}(\varrho_{11}-\varrho_{21}) - \dfrac{\delta}{\sqrt{-\varrho_2}\sqrt{\varrho_1-\varrho_2}}(\varrho_{12}-\varrho_{22}), \\ \big(d(\varrho_1-\varrho_2)\big)_{T_2} = \dfrac{-1}{\sqrt{\varrho_1}\sqrt{\varrho_1-\varrho_2}}(\varrho_{11}-\varrho_{21}) + \dfrac{1}{\sqrt{-\varrho_2}\sqrt{\varrho_1-\varrho_2}}(\varrho_{12}-\varrho_{22}). \end{cases}$$

Werden die Hauptkrümmungsradien der zu ϱ_1 bez. ϱ_2 gehörenden Krümmungsmittelpunktsfläche mit ϱ_1', ϱ_2' bez. ϱ_1'', ϱ_2'' bezeichnet, so ist (diese Annalen Bd. 38, S. 450):

$$\varrho_{11} = \frac{\varrho_2\varrho_1'\varrho_2'}{R_2(\varrho_2-\varrho_1)}, \qquad \varrho_{12} = \frac{(\varrho_2-\varrho_1)\,\varrho_1}{R_1}, \qquad \varrho_{21} = \frac{(\varrho_1-\varrho_2)\,\varrho_2}{R_2},$$

$$\varrho_{22} = \frac{\varrho_1\varrho_1''\varrho_2''}{(\varrho_1-\varrho_2)\,R_1}.$$

Aus (7) und (8) folgt dann bei Benutzung von (5):

$$\frac{1}{F_1} + \frac{\delta'}{F_2} = \frac{\sqrt{-\varrho_2}}{R_2\sqrt{\varrho_1-\varrho_2}}\left\{3 + \frac{\varrho_2\varrho_1'\varrho_2'}{\varrho_1(\varrho_1-\varrho_2)^2}\right\},$$

$$\frac{1}{F_1} - \frac{\delta'}{F_2} = \frac{\sqrt{\varrho_1}}{R_1\sqrt{\varrho_1-\varrho_2}}\left\{3 + \frac{\varrho_1\varrho_1''\varrho_2''}{\varrho_2(\varrho_1-\varrho_2)^2}\right\},$$

$$\frac{\delta}{F_1'} + \frac{1}{F_2'} = \frac{1}{R_2\sqrt{\varrho_1}\sqrt{\varrho_1-\varrho_2}}\left\{2\varrho_1 + \varrho_2 + \frac{\varrho_2^2\varrho_1'\varrho_2'}{\varrho_1(\varrho_1-\varrho_2)^2}\right\},$$

$$\frac{\delta}{F_1'} - \frac{1}{F_2'} = \frac{1}{R_1\sqrt{-\varrho_2}\sqrt{\varrho_1-\varrho_2}}\left\{2\varrho_2 + \varrho_1 + \frac{\varrho_1^2\varrho_1''\varrho_2''}{\varrho_2(\varrho_1-\varrho_2)^2}\right\}.$$

Diese Gleichungen zeigen, dass sowohl bei den geradlinigen Flächen als auch bei den Flächen, auf welchen eine der Schaaren der ortho-

gonalen Trajectorien der Asymptotenlinien aus geodätischen Linien besteht, jedesmal eine einfache Beziehung zwischen den normalen und geodätischen Krümmungen der Krümmungslinien und den Krümmungsmassen der Centraflächen statthat. Nach unseren Festsetzungen gehen die Asymptotenlinie $T_1' = 0$ und die Trajectorie $T_2' = 0$ stets durch den von den positiven Theilen der Tangenten der Krümmungslinien gebildeten Winkel. Wenn daher eine der Schaaren der Asymptotenlinien aus geodätischen Linien besteht d. h. wenn die betrachtete Fläche geradlinig ist, so hat man:

$$\frac{\sqrt{-\varrho_2}}{R_2}\left(3+\frac{\varrho_2\varrho_1'\varrho_2'}{\varrho_1(\varrho_1-\varrho_2)^2}\right) = \pm\frac{\sqrt{\varrho_1}}{R_1}\left\{3+\frac{\varrho_1\varrho_1''\varrho_2''}{\varrho_2(\varrho_1-\varrho_2)^2}\right\},\text{*)}$$

wo das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem die geradlinige Asymptotenlinie durch den von den positiven Theilen der Tangenten der Krümmungslinien gebildeten Winkel geht oder nicht. Wenn aber eine der Orthogonalschaaren der Asymptotenlinien aus geodätischen Linien besteht, so hat man:

$$\frac{1}{R_2\sqrt{\varrho_1}}\left\{2\varrho_1+\varrho_2+\frac{\varrho_2^2\varrho_1'\varrho_2'}{\varrho_1(\varrho_1-\varrho_2)^2}\right\} = \mp\frac{1}{R_1\sqrt{-\varrho_2}}\left\{2\varrho_2+\varrho_1+\frac{\varrho_1^2\varrho_1''\varrho_2''}{\varrho_2(\varrho_1-\varrho_2)^2}\right\},$$

wo das obere oder untere Vorzeichen wie vorhin gedeutet werden muss.

§ 5.

Geodätische Krümmung der sphärischen Bilder von Curven auf einer Fläche.

Man kann die entwickelten Formeln mit Leichtigkeit bei Fragen anwenden, welche Curven auf der Einheitskugel darbieten, sofern sie nach irgend einem Gesichtspunkt als den Curven $T_1 = 0$, $T_2 = 0$ auf der gegebenen Fläche entsprechend betrachtet sind.

Es mögen zuerst die geodätischen Krümmungen der Curven $T_1 = 0$ und $T_2 = 0$ auf der Einheitskugel (X, Y, Z), sowie die ihrer orthogonalen Trajectorien aufgestellt werden.

Setzt man:

$$L = \sum (dX)^2_{T_1}, \quad N = \sum (dX)^2_{T_2},$$

so wird:

$$L = \mathsf{H}_{11}^2 + 2f\mathsf{H}_{11}\mathsf{H}_{12} + \mathsf{H}_{12}^2 = -\Theta_{11}\mathsf{H}_{11} - \Theta_{12}\mathsf{H}_{12},$$
$$N = \mathsf{H}_{21}^2 + 2f\mathsf{H}_{21}\mathsf{H}_{22} + \mathsf{H}_{22}^2 = -\Theta_{12}\mathsf{H}_{21} - \Theta_{22}\mathsf{H}_{22}.$$

Man bestimme nun die Vorzeichen der Quadratwurzeln aus L und N so, dass:

$$\frac{(dX)_{T_1}}{\sqrt{L}}, \text{ etc.,} \quad \frac{(dX)_{T_2}}{\sqrt{N}} \text{ etc.}$$

Richtungscosinus werden und setze:

$$t_1 = \sqrt{L}\,T_1, \quad t_2 = \sqrt{N}\,T_2$$

*) J. Knoblauch, Acta Mathem. Bd. 15, S. 255.

Im System t_1, t_2 sollen die Grössen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varphi$ der Reihe nach mit $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \psi$ bezeichnet werden. Dann hat man:

$$\cos\psi = \frac{-\mathsf{H}_{11}\Theta_{12} - \mathsf{H}_{12}\Theta_{22}}{\sqrt{L}\sqrt{N}} = \frac{-\mathsf{H}_{21}\Theta_{11} - \mathsf{H}_{22}\Theta_{12}}{\sqrt{L}\sqrt{N}},$$

$$\sin\psi = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{L}\sqrt{N}\,\varrho_1\varrho_2}.$$

Nimmt man ferner:

$$t_1' = \frac{\varepsilon_1'(\cos\psi\, t_1 + t_2)}{\sin\psi}, \qquad t_2' = \frac{-\varepsilon_2'(t_1 + \cos\psi\, t_2)}{\sin\psi},$$

so werden $t_1' = 0$ und $t_2' = 0$ die Differentialgleichungen der orthogonalen Trajectorien der Schaaren $t_1 = 0$, $t_2 = 0$ auf der betrachteten Kugel. Dabei sind ε_1' und ε_2' so zu bestimmen, dass die Ausdrücke:

$$(dX)_{t_1'} = \frac{\varepsilon_1'\left(\Theta_{12}(dx)_{T_1} - \Theta_{11}(dx)_{T_2}\right)}{\sqrt{L}\sin\varphi} \text{ etc.,}$$

$$(dX)_{t_2'} = \frac{\varepsilon_2'\left(\Theta_{22}(dx)_{T_1} - \Theta_{12}(dx)_{T_2}\right)}{\sqrt{N}\sin\varphi} \text{ etc.}$$

Richtungscosinus werden.

Um die geodätischen Krümmungen der Curven $t_2 = 0$, $t_1 = 0$, $t_2' = 0$, $t_1' = 0$ zu berechnen, berücksichtige man, dass gegenwärtig für die Operationen $(\;)_{t_\alpha}$ und $(\;)_{t_\beta'}$ die Gleichungen bestehen:

$$(\;)_{t_1'} = \frac{\varepsilon_1'}{\sin\psi}\left\{-\frac{\cos\psi\,(\;)_{T_1}}{\sqrt{L}} + \frac{(\;)_{T_2}}{\sqrt{N}}\right\}, \qquad (\;)_{t_2'} = \frac{\varepsilon_2'}{\sin\psi}\left\{-\frac{(\;)_{T_1}}{\sqrt{L}} + \frac{\cos\psi\,(\;)_{T_2}}{\sqrt{N}}\right\}.$$

Man erhält:

$$\frac{1}{R_{t_1}} = \frac{\varepsilon_1'}{L\sqrt{L}\sin\varphi}\left\{\Theta_{11}(d\Theta_{12})_{T_1} - \Theta_{12}(d\Theta_{11})_{T_1} + \sin^2\varphi\,(\beta_1{}^{21}\mathsf{H}_{11}\Theta_{11} - \beta_2{}^{11}\mathsf{H}_{12}\Theta_{12})\right\},$$

$$\frac{1}{R_{t_2}} = \frac{\varepsilon_2'}{N\sqrt{N}\sin\varphi}\left\{\Theta_{12}(d\Theta_{22})_{T_1} - \Theta_{22}(d\Theta_{12})_{T_2} + \sin^2\varphi\,(\beta_1{}^{22}\mathsf{H}_{21}\Theta_{12} - \beta_2{}^{12}\mathsf{H}_{22}\Theta_{22})\right\},$$

$$\frac{1}{R_{t_1'}} = \frac{\varepsilon_1'\cos\psi}{R_{t_1}\sin\psi} + \frac{\varrho_1\varrho_2}{\sqrt{L}\sin^2\varphi}\left\{\Theta_{12}(d\Theta_{11})_{T_2} - \Theta_{11}(d\Theta_{12})_{T_2} + \sin^2\varphi(\beta_2{}^{12}\Theta_{12}\mathsf{H}_{12} - \beta_1{}^{22}\Theta_{11}\mathsf{H}_{11})\right\},$$

$$\frac{1}{R_{t_2'}} = -\frac{\varepsilon_2'\cos\psi}{R_{t_2}\sin\psi} + \frac{\varrho_1\varrho_2}{\sqrt{N}\sin^2\varphi}\left\{\Theta_{12}(d\Theta_{22})_{T_1} - \Theta_{22}(d\Theta_{12})_{T_1} - \sin^2\varphi(\beta_2{}^{11}\mathsf{H}_{22}\Theta_{22} - \beta_1{}^{21}\mathsf{H}_{21}\Theta_{12})\right\},$$

Es mögen nun erstens die Curven $T_2 = 0$ bez. $T_1 = 0$ auf der Fläche mit den zu ϱ_1 bez. ϱ_2 gehörenden Krümmungslinien zusammenfallen. Hier wird:

$$(dX)_{T_1} = -\frac{1}{\varrho_1}(dx)_{T_1}, \qquad (dX)_{T_2} = -\frac{1}{\varrho_2}(dx)_{T_2}$$

somit:

$$\sqrt{L} = -\frac{1}{\varrho_1}, \quad \sqrt{N} = -\frac{1}{\varrho_2}.$$

Da ferner: $\sin\varphi = \varepsilon$, so entsteht: $\varepsilon_1' = \varepsilon$, $\varepsilon_2' = -\varepsilon$.

Ausserdem:

$$\mathsf{H}_{11} = -\frac{1}{\varrho_1}, \quad \mathsf{H}_{12} = \mathsf{H}_{21} = 0, \quad \mathsf{H}_{22} = -\frac{1}{\varrho_2},$$

$$\beta_2{}^{11} = -\beta_1{}^{21} = \frac{1}{R_1}, \quad \beta_2{}^{12} = -\beta_1{}^{22} = -\frac{1}{R_2}.$$

Nennt man daher die Grössen R_{t_1} und R_{t_2} in diesem Fall K_1 und K_2, so wird:

$$\frac{1}{K_1} = -\frac{\varrho_1}{R_1}, \quad \frac{1}{K_2} = -\frac{\varrho_2}{R_2}.$$

Man erhält also für das Krümmungsmass die anschauliche Darstellung:

$$\frac{1}{\varrho_1\varrho_2} = \frac{K_1K_2}{R_1R_2}.$$

Wenn zweitens die Curven $T_1 = 0$, $T_2 = 0$ Asymptotenlinien sind, so zwar, dass wie im vorigen Paragraphen die Curve $T_1 = 0$ als durch den von den positiven Theilen der Tangenten der Krümmungslinien gebildeten Winkel hindurchgehend genommen wird, erhält man:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon\delta, \quad \varepsilon_2 = -\varepsilon\delta', \quad \varepsilon_1' = -\varepsilon\delta, \quad \varepsilon_2' = \varepsilon\delta';$$

$$(d\mathrm{X})_{T_1} = \frac{-\delta}{\sqrt{-\varrho_1\varrho_2}}(dx)_{T_1'}, \quad (dx)_{T_2} = \frac{-\delta'}{\sqrt{-\varrho_1\varrho_2}}(dx)_{T_2'},$$

sodass:

$$\sqrt{L} = \frac{-\delta}{\sqrt{-\varrho_1\varrho_2}}, \quad \sqrt{N} = \frac{-\delta'}{\sqrt{-\varrho_1\varrho_2}}.$$

Ferner wird:

$$\beta_2{}^{11} = \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{2F_1\sqrt{-\varrho_1\varrho_2}}, \quad \beta_2{}^{12} = \frac{\delta(\varrho_1+\varrho_2)}{2F_1\sqrt{-\varrho_1\varrho_2}} - \frac{1}{F_1'}, \quad \beta_1{}^{21} = \frac{\delta'(\varrho_1+\varrho_2)}{2F_2\sqrt{-\varrho_1\varrho_2}} - \frac{1}{F_2'},$$

$$\beta_1{}^{22} = \frac{\delta\delta'(\varrho_1-\varrho_2)}{2F_2\sqrt{-\varrho_1\varrho_2}};$$

$$\mathsf{H}_{11} = -\frac{\varrho_1+\varrho_2}{2\varrho_1\varrho_2}, \quad \mathsf{H}_{12} = \frac{\delta(\varrho_1-\varrho_2)}{2\varrho_1\varrho_2} = \mathsf{H}_{21}, \quad \mathsf{H}_{22} = \mathsf{H}_{11} = -f\mathsf{H}_{12}.$$

Die Grössen R_{t_1}, R_{t_2}, $R_{t_1'}$, $R_{t_2'}$ sollen hier der Reihe nach mit E_1, E_2, E_1', E_2' bezeichnet werden. Dann folgt:

$$\frac{1}{E_1} = \frac{\delta\sqrt{-\varrho_1\varrho_2}}{F_1}, \quad \frac{1}{E_2} = \frac{\delta'\sqrt{-\varrho_1\varrho_2}}{F_2}, \quad \frac{1}{E_1'} = \frac{\delta\sqrt{-\varrho_1\varrho_2}}{F_1'} - \frac{\varrho_1+\varrho_2}{F_1},$$

$$\frac{1}{E_2'} = \frac{\delta'\sqrt{-\varrho_1\varrho_2}}{F_2'} - \frac{\varrho_1+\varrho_2}{F_2}.$$

Zum Schluss möge noch eine allgemeine Bemerkung über die geodätische Krümmung von Curven auf der Einheitskugel Platz finden.

Das Oberflächenelement der Kugel (X, Y, Z) kann man, abgesehen vom Vorzeichen, durch:

$$\sqrt{\sum (dX)_{t_1}^2 \sum (dX)_{t_2}^2 - \left(\sum (dX)_{t_1}(dX)_{t_2}\right)^2} \cdot t_1 t_2 = \sin\psi\, t_1 t_2$$

ausdrücken. Man betrachte nun eine zweite Einheitskugel, deren Radien den Tangenten der Curven $t_2 = 0$ auf der ersten Kugel parallel seien. Das Oberflächenelement dieser Kugel wird ausgedrückt durch:

$$\sqrt{\sum (d\,X)^2_{t_1 t_1} \sum (d\,X)^2_{t_1 t_2} - \left(\sum (d\,X)_{t_1 t_1} (d\,X)_{t_1 t_2}\right)^2} \cdot t_1 t_2.$$

Da aber

$$(d\,X)_{t_1 t_1} = \frac{1}{R_{t_1}} (d\,X)_{t_1'} - X,$$

$$(d\,X)_{t_1 t_2} = \left(\frac{\cos\psi}{R_{t_1}} - \frac{\varepsilon_1' \sin\psi}{R_{t_1'}}\right) (d\,X)_{t_1'} - \cos\psi\, X,$$

so erhält, abgesehen vom Vorzeichen, das letztbetrachtete Flächenelement den Werth: $\frac{\sin\psi}{R_{t_1'}} t_1 t_2$. Somit folgt der Satz: Ist eine Curvenschaar auf der Einheitskugel gegeben und bildet man letztere dadurch auf einer zweiten Einheitskugel ab, dass man zu den positiven Theilen der Tangenten der Curvenschaar in der zweiten Kugel parallele Radien zieht, so ist das Verhältniss des Flächenelements der zweiten Kugel zu dem der ersten in entsprechenden Punkten, abgesehen vom Vorzeichen, gleich der geodätischen Krümmung der durch den betrachteten Punkt auf der ersten Kugel gehenden orthogonalen Trajectorie der Curvenschaar.

Nennt man das Flächenelement der Fläche (x, y, z) O, das der Kugel $\left((dx)_{T_1}, (dy)_{T_1}, (dz)_{T_1}\right)$ O_1, und das der Kugel $\left((dx)_{T_2}, (dy)_{T_2}, (dz)_{T_2}\right)$ O_2, so wird, abgesehen vom Vorzeichen:

$$\frac{O_1}{O} = \frac{1}{\sin\varphi}\left\{\Theta_{11}\left(\frac{\cos\varphi}{R_{T_1}} - \frac{\varepsilon_1 \sin\varphi}{R_{T_1'}}\right) - \frac{\Theta_{12}}{R_{T_1}}\right\},$$

$$\frac{O_2}{O} = \frac{1}{\sin\varphi}\left\{\Theta_{22}\left(\frac{\cos\varphi}{R_{T_2}} + \frac{{}_2 \sin\varphi}{R_{T_2'}}\right) - \frac{\Theta_{12}}{R_{T_2}}\right\}.$$

Sind die Curven $T_1 = 0$, $T_2 = 0$ Krümmungslinien, so folgt daher:

$$\frac{O_1}{O} = \frac{1}{\varrho_1 R_2}, \quad \frac{O_2}{O} = \frac{1}{\varrho_2 R_1};$$

sind jene Curven aber Asymptotenlinien, so entsteht:

$$\frac{O_1}{O} = \frac{1}{F_1 \sqrt{-\varrho_1 \varrho_2}}, \quad \frac{O_2}{O} = \frac{1}{F_2 \sqrt{-\varrho_1 \varrho_2}}.$$

Münster i./W., im November 1892.

Ueber die linearen Relationen zwischen den zu verschiedenen singulären Punkten gehörigen Fundamentalsystemen von Integralen der Riemann'schen Differentialgleichung.

Von

OSKAR BOLZA in Chicago.

Die folgende Notiz beschäftigt sich mit zwei Punkten aus der Theorie der hypergeometrischen Functionen:

1) Die Relationen zwischen den zu den drei singulären Punkten der Gauss'schen Differentialgleichung gehörigen Fundamentalsystemen, wie sie schon von Kummer*) und Gauss**) gegeben worden sind, und die sich vielleicht am vollständigsten bei Herrn Goursat***) zusammengestellt finden, leiden an einer doppelten Unsymmetrie, einmal an der der Gauss'schen Differentialgleichung selbst anhaftenden, und überdies treten in ihnen gewisse Exponentialfactoren in unsymmetrischer Weise auf.

Um *die Relationen in einer in Beziehung auf die drei singulären Punkte symmetrischen Form* zu erhalten, muss man von der Gauss'schen Differentialgleichung zu der allgemeineren Differentialgleichung der Riemann'schen P-Function übergehen. Wie dies im einzelnen durchzuführen ist, und zwar so, dass man aus einer einzigen Relation alle übrigen durch blosse Buchstabenvertauschung herleiten kann, wird in §§ 1 und 2 gezeigt.

2) Die grössere oder geringere Einfachheit der fraglichen Relationen hängt von einer geeigneten *Normirung der Fundamentalintegrale* ab; eine erste Vereinfachung der Gauss'chen Formeln hat Herr Jordan†) angegeben, indem er bei der Normirung der Fundamentalintegrale statt von der hypergeometrischen Reihe von dem Euler'schen bestimmten Integral ausgeht. (Vgl. § 3).

---

*) Crelle's Journal, Bd. 15, pag. 56—60.

**) Gauss' Werke, Bd. III, pag. 210—220.

***) Annales de l'Ecole Normale Superieure, 1881, Supplement pag. 28—30. auch bei Craig, Linear differential equations, pag. 237—239.

†) Cours d'Analyse, III. pag. 230.

Dass aber noch eine weitere Vereinfachung möglich sein muss, ergiebt sich aus der einfachen und eleganten Form, welche Herr Papperitz*) den erzeugenden Substitutionen der Schwarz'schen s-Function, welche aufs engste mit den hier besprochenen Relationen zusammenhängen, gegeben hat. In § 4 und § 5 wird diejenige Normirung der Fundamentalsysteme abgeleitet, welche für die Gruppe der s-Function gerade auf die Papperitz'schen Formeln führt.

§ 1.

Bezeichnungen.

Der Gegenstand unserer Betrachtung ist die *reguläre homogene lineare Differentialgleichung mit drei singulären Punkten.* Die singulären Punkte und die zugehörigen Exponenten, durch welche bekanntlich die Differentialgleichung vollkommen bestimmt**) ist, mögen durch das Schema gegeben sein:

$$(1)\qquad \begin{matrix} a, & b, & c \\ \lambda', & \mu', & \nu' \\ \lambda'', & \mu'', & \nu'' \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{(singuläre Punkte),} \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{(Exponenten)***)} \end{matrix}$$

dabei sind die Exponenten der Bedingung unterworfen:

$$(2)\qquad \lambda' + \lambda'' + \mu' + \mu'' + \nu' + \nu'' = 1,$$

und überdies soll im Folgenden angenommen werden, dass keine der drei Differenzen:

$$(3)\qquad \lambda = \lambda' - \lambda'', \quad \mu = \mu' - \mu'', \quad \nu = \nu' - \nu''$$

eine ganze Zahl ist.

Die Differentialgleichung bleibt ungeändert, wenn man in dem Schema (1) *die Colonnen beliebig untereinander vertauscht; ebenso, wenn man λ' mit λ'' oder μ' mit μ'', oder ν' mit ν'' vertauscht.*†) Diese beiden Arten von Vertauschungen combiniren sich zu einer Gruppe, G, von 48 Substitutionen zwischen den Buchstaben: $a, b, c;\ \lambda', \mu', \nu';\ \lambda'', \mu'', \nu''$. Dieselbe kann erzeugt werden durch die Substitutionen:

$$(4)\qquad \begin{cases} \mathsf{\Lambda} = (\lambda'\lambda''), \quad \mathsf{M} = (\mu', \mu''), \quad \mathsf{N} = (\nu', \nu''), \\ S = (abc)\,(\lambda'\mu'\nu')\,(\lambda''\mu''\nu''), \\ T = \ (bc) \quad (\mu'\nu') \quad (\mu''\nu''). \end{cases}$$

---

*) Mathematische Annalen Bd. 27, pag. 333.

**) Man findet die ausgeschriebene Differentialgleichung bei Hrn. Papperitz, Mathematische Annalen Bd. 25, pag. 213. Vgl. auch Craiq, Linear Differential Equations pag. 191.

***) Ich folge in der Bezeichnung: λ', λ'' etc., statt Riemann's α, α' etc. Herrn F. Klein's Vorgang.

†) Bei Riemann, Werke pag. 64 als eine Eigenschaft der P-Function ausgesprochen.

Wir benutzen diese Eigenschaft der Differentialgleichung bei der Normirung der Fundamentalintegrale.

Das zum Exponenten λ' gehörige Fundamentalintegral lässt sich auf vier verschiedene Weisen durch hypergeometrische Reihen ausdrücken*). Wir wählen eine dieser Darstellungen willkürlich aus und bezeichnen**):

$$P_0^{\lambda'}\left\{\begin{matrix} a & b & c & \\ \lambda' & \mu' & \nu' & x \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' & \end{matrix}\right\} \tag{5}$$

$$= u^{\lambda'}(1-u)^{\nu'}F(\mu'+\lambda'+\nu',\ \mu''+\lambda'+\nu',\ 1+\lambda'-\lambda'',\ u),$$

wo

$$u = \frac{(c-b)(x-a)}{(c-a)(x-b)}.$$

Auf dies Integral $P_0^{\lambda'}$ wenden wir jestzt die sämmtlichen Substitutionen der Gruppe G an. Wir erhalten dabei jedesmal wieder ein particuläres Integral unserer Differentialgleichung.

Man zeigt nun zunächst durch einfache Schlüsse***), dass $P_0^{\lambda'}$ ungeändert bleibt bei der Untergruppe:

$$1,\ \mathsf{M},\ \mathsf{N},\ \mathsf{MN}.$$

Bei Anwendung der Gesammtgruppe G wird daher G in 12 verschiedene Functionen übergehen; wir bezeichnen dieselben folgendermassen:

Die Function, in welche $P_0^{\lambda'}$ durch die Substitution Λ übergeführt wird, werde mit $P_0^{\lambda''}$ bezeichnet und dies durch die Gleichung ausgedrückt:

$$(\Lambda)\ P_0^{\lambda'} = P_0^{\lambda''}.$$

In analoger abkürzender Bezeichnung werde weiter definirt:

$$\left\{\begin{array}{ll} (S)\ P_0^{\lambda'} = P_0^{\mu'}; & (S)\ P_0^{\lambda''} = P_0^{\mu''}, \\ (S^2)\ P_0^{\lambda'} = P_0^{\nu'}; & (S^2)\ P_0^{\lambda''} = P_0^{\nu''} \\ \text{ferner:} & \\ (T)\ P_0^{\lambda'} = Q_0^{\lambda'}; & (T)\ P_0^{\lambda''} = Q_0^{\lambda''} \\ \text{und weiter:} & \\ (S)\ Q_0^{\lambda'} = Q_0^{\mu'}; & (S)\ Q_0^{\lambda''} = Q_0^{\mu''}, \\ (S^2)\ Q_0^{\lambda'} = Q_0^{\nu'}; & (S^2)\ Q_0^{\lambda''} = Q_0^{\nu''}. \end{array}\right. \tag{6}$$

Dabei ist zu beachten, dass die Substitutionen Λ, M, N die Function u ungeändert lassen, während

---

*) Riemann, Werke, pag. 77.

**) Das Riemann'sche Zeichen $P^{\lambda'}$ ohne unteren Index soll für eine anders normirte Function reservirt werden, siehe § 4.

***) Vgl. z. B. Jordan, Cours d'Analyse III, Art. 183.

$$(7)\qquad \begin{aligned} &(S)\quad u=\frac{1}{1-u},\\ &(T)\quad u=\frac{u}{u-1}. \end{aligned}$$

Um die Definition der 12 Functionen völlig bestimmt zu machen, beschränken wir die Variable u vorläufig auf die obere Halbebene und setzen fest, dass die Potenzen

$$u^r,\quad (1-u)^r,\quad \left(1-\frac{1}{u}\right)^r,$$

resp. in den Punkten:

$$1,\qquad 0\quad,\qquad \infty$$

den Werth 1 annehmen sollen.

Bei dieser Festsetzung ist in der ganzen oberen Halbebene:

$$(8)\qquad \left(1-\frac{1}{u}\right)^r = e^{r\pi i}\,\frac{(1-u)^r}{u^r}.$$

Durch Wiederholung der Schlussweise, durch welche man gezeigt hat, dass $P_0^{\lambda'}$ bei der Substitution N ungeändert bleibt, ergeben sich nun zwischen den P und Q die Relationen:

$$(9)\qquad \begin{cases} Q_0^{\lambda'} = e^{-\lambda'\pi i}\,P_0^{\lambda'}, & Q_0^{\lambda''} = e^{-\lambda''\pi i}\,P_0^{\lambda''},\\ Q_0^{\mu'} = e^{-\mu'\pi i}\,P_0^{\mu'}, & Q_0^{\mu''} = e^{-\mu''\pi i}\,P_0^{\mu''},\\ Q_0^{\nu'} = e^{-\nu'\pi i}\,P_0^{\nu'}, & Q_0^{\nu''} = e^{-\nu''\pi i}\,P_0^{\nu''}. \end{cases}$$

Für die Erhaltung der Symmetrie in den folgenden Ableitungen ist es nun wesentlich, dass man von diesen Gleichungen (9) *gerade **nicht** Gebrauch macht, sondern jedes der sechs Fundamentalintegrale in zwei verschiedenen Normirungen als P und als Q, durch die Formeln laufen lässt,* und erst, wo es nöthig wird, auf die Gleichungen (9) zurückgreift.

§ 2.

Die linearen Relationen zwischen den Fundamentalsystemen.

Um zunächst das particuläre Integral $P_0^{\lambda'}$ durch die beiden linear unabhängigen Integrale

$$Q_0^{\nu'} = (1-u)^{\nu'}\,u^{\lambda'}F(\mu'+\nu'+\lambda',\ \mu''+\nu'+\lambda',\ 1+\nu'-\nu'',\ 1-u),$$
$$Q_0^{\nu''} = (1-u)^{\nu''}\,u^{\lambda'}F(\mu'+\nu''+\lambda',\ \mu''+\nu''+\lambda',\ 1+\nu''-\nu',\ 1-u)$$

auszudrücken, kann man Schritt für Schritt den von **Gauss** (Werke, III, pag. 210—213) angegebenen Weg einschlagen; nur dass der hübsche Kunstgriff, durch welchen **Gauss** zeigt, dass man von den beiden Coefficienten der Relation nur *einen* wirklich zu bestimmen braucht, hier noch eine einfachere Form annimmt:

Die gesuchte Relation sei

$$(10)\qquad P_0^{\lambda'} = A\begin{pmatrix}\lambda' & \mu' & \nu' \\ \lambda'' & \mu'' & \nu''\end{pmatrix} Q_0^{\nu'} + B\begin{pmatrix}\lambda' & \mu' & \nu' \\ \lambda'' & \mu'' & \nu''\end{pmatrix} Q_0^{\nu''},$$

wobei durch die Bezeichnung der Coefficienten ihre Abhängigkeit von den Exponenten angedeutet werden soll.

Auf diese Relation wenden wir jetzt die Substitution $(\nu'\nu'')$ an; wie wir oben gesehen haben, bleibt dabei $P_0^{\lambda'}$ ungeändert; dagegen werden $Q_0^{\nu'}$ und $Q_0^{\nu''}$ vertauscht, es kommt also:

$$P_0^{\lambda'} = A\begin{pmatrix}\lambda' & \mu' & \nu'' \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'\end{pmatrix} Q_0^{\nu''} + B\begin{pmatrix}\lambda' & \mu' & \nu'' \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'\end{pmatrix} Q_0^{\nu'}.$$

Aus der Vergleichung folgt wegen der linearen Unabhängigkeit von $Q_0^{\nu'}$, $Q_0^{\nu''}$:

$$(11)\qquad \begin{aligned} A\begin{pmatrix}\lambda' & \mu' & \nu'' \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'\end{pmatrix} &= B\begin{pmatrix}\lambda' & \mu' & \nu' \\ \lambda'' & \mu'' & \nu''\end{pmatrix}, \\ B\begin{pmatrix}\lambda' & \mu' & \nu'' \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'\end{pmatrix} &= A\begin{pmatrix}\lambda' & \mu' & \nu' \\ \lambda'' & \mu'' & \nu''\end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wodurch die Berechnung von B auf die von A zurückgeführt ist.

Indem man nun genau nach Gauss weiterschliesst, erhält man das Resultat:

$$(12)\qquad \begin{aligned} P_0^{\lambda'} &= \frac{\Pi(\lambda'-\lambda'')\,\Pi(\nu''-\nu'-1)}{\Pi(-\lambda''-\mu'-\nu')\,\Pi(-\lambda''-\mu''-\nu')}\, Q_0^{\nu'} \\ &+ \frac{\Pi(\lambda'-\lambda'')\,\Pi(\nu'-\nu''-1)}{\Pi(-\lambda''-\mu'-\nu'')\,\Pi(-\lambda''-\mu''-\nu'')}\, Q_0^{\nu''}. \end{aligned}$$

Auf diese Relation wenden wir jetzt wieder die 48 Substitutionen der Gruppe G an.

Ebenso wie $P_0^{\lambda'}$, bleibt die ganze Relation ungeändert bei der Untergruppe:

$$1,\ \mathsf{M},\ \mathsf{N},\ \mathsf{MN}.$$

Bei Anwendung der Gesammtgruppe werden wir daher 12 verschiedene Relationen erhalten.

Die Substitution $(\lambda'\lambda'')$ ergiebt:

$$(12')\qquad \begin{aligned} P_0^{\lambda''} &= \frac{\Pi(\lambda''-\lambda')\,\Pi(\nu''-\nu'-1)}{\Pi(-\lambda'-\mu'-\nu')\,\Pi(-\lambda'-\mu''-\nu')}\, Q_0^{\nu'} \\ &+ \frac{\Pi(\lambda''-\lambda')\,\Pi(\nu'-\nu''-1)}{\Pi(-\lambda'-\mu'-\nu'')\,\Pi(-\lambda'-\mu''-\nu'')}\, Q_0^{\nu''}. \end{aligned}$$

Auf diese beiden Relationen wenden wir jetzt die Substitution T an und beachten, dass

$$(T)\,Q_0^{\nu'} = (T)\,(S^2)\,Q_0^{\lambda'} = (S)\,(T)\,Q_0^{\lambda'} = (S)\,P_0^{\lambda'} = P_0^{\mu'};$$

so erhalten wir:

$$
(13)\quad \begin{cases} Q_0^{\lambda'} = \dfrac{\Pi(\lambda'-\lambda'')\,\Pi(\mu''-\mu'-1)}{\Pi(-\lambda''-\nu'-\mu')\,\Pi(-\lambda''-\nu''-\mu')}\,P_0^{\mu'} \\ \qquad + \dfrac{\Pi(\lambda'-\lambda'')\,\Pi(\mu'-\mu''-1)}{\Pi(-\lambda''-\nu'-\mu'')\,\Pi(-\lambda''-\nu''-\mu'')}\,P_0^{\mu''}, \\ Q_0^{\lambda''} = \dfrac{\Pi(\lambda''-\lambda')\,\Pi(\mu''-\mu'-1)}{\Pi(-\lambda'-\nu'-\mu')\,\Pi(-\lambda'-\nu''-\mu')}\,P_0^{\mu'} \\ \qquad + \dfrac{\Pi(\lambda''-\lambda')\,\Pi(\mu'-\mu''-1)}{\Pi(-\lambda'-\nu'-\mu'')\,\Pi(-\lambda'-\nu''-\mu'')}\,P_0^{\mu''}. \end{cases}
$$

Aus diesen vier Relationen folgen die übrigen acht durch Anwendung der Substitutionen S und S^2, d. h. einfach durch cyklische Vertauschung der Buchstaben λ, μ, ν.

§ 3.

Die Jordan'sche Normirung.

Die Relationen vereinfachen sich, wenn man nach Herrn Jordan (Cours d'Analyse, III, pag. 230) statt von der Function $P_0^{\lambda'}$ ausgeht von

$$
(14)\qquad P_1^{\lambda'} = \frac{\Pi(-\lambda''-\mu''-\nu'')\,\Pi(-\lambda''-\mu'-\nu')}{\Pi(\lambda'-\lambda'')}\,P_0^{\lambda'}.
$$

Falls:

$$
\Re(-\lambda''-\mu''-\nu'') > -1, \qquad \Re(-\lambda''-\mu'-\nu') > -1,
$$

so ist dies identisch mit*):

$$
(15)\qquad P_1^{\lambda'} = u^{\lambda'}(1-u)^{\nu'}\int_0^1 z^{-\lambda''-\mu''-\nu''}(1-z)^{-\lambda''-\mu'-\nu'}(1-uz)^{-\lambda'-\mu''-\nu'}\,dz.
$$

Wenn man auf die Function $P_1^{\lambda'}$ wieder die 48 Substitutionen der Gruppe G anwendet, so sieht man zunächst, dass $P_1^{\lambda'}$ nur mehr bei der Untergruppe [1, MN] ungeändert bleibt; man erhält also 24 verschiedene particuläre Integrale bei Anwendung der Gesammtgruppe. Wir beschränken uns jedoch auf die Betrachtung der Untergruppe von der Ordnung 24, welche durch die Substitutionen MN, $\mathsf{\Lambda N}$, T, S erzeugt wird, und erhalten dementsprechend wieder 12 particuläre Integrale.

Wir definiren

$$
(\mathsf{\Lambda N})\quad P_1^{\lambda'} = P_1^{\lambda''} = \frac{\Pi(-\mu''-\lambda'-\nu')\,\Pi(-\mu'-\lambda'-\nu'')}{\Pi(\lambda''-\lambda')}\,P_0^{\lambda''},
$$

während die übrigen zehn particulären Integrale $P_1^{\mu'}$, $P_1^{\mu''}$ etc. $Q_1^{\lambda'}$, $Q_1^{\lambda''}$ etc. genau so wie in (6) definirt werden.

*) Riemann, Werke, pag. 76. Sind die Ungleichungen nicht erfüllt, so hat man auf einem „Doppelumlauf" um die beiden Punkte 0 und 1 herum zu integriren, siehe Jordan, Cours d'Analyse III, No. 193; Pochhammer, Mathem. Annalen Bd. 35, pag. 470.

Da dabei

$$Q_1^{\lambda'} : Q_0^{\lambda'} = P_1^{\lambda'} : P_0^{\lambda'}, \text{ etc.}$$

so bleiben die Gleichungen (9) bestehen, wenn man darin den unteren Index 0 durch 1 ersetzt, also:

$$(16) \qquad Q_1^{\lambda'} = e^{-\lambda'\pi i} P_1^{\lambda'}, \quad Q_1^{\lambda''} = e^{-\lambda''\pi i} P_1^{\lambda''}, \text{ etc.}$$

Die Relationen (12), (12') nehmen nun nach Einführung von $P_1^{\lambda'}$, $Q_1^{\lambda'}$ etc. folgende vereinfachte Gestalt an:

$$(17) \qquad \begin{cases} P_1^{\lambda'} = \dfrac{\sin(\lambda''+\mu''+\nu')\pi}{\sin(\nu''-\nu')\pi} Q_1^{\nu'} + \dfrac{\sin(\lambda''+\mu'+\nu'')\pi}{\sin(\nu'-\nu'')\pi} Q_1^{\nu''}, \\ P_1^{\lambda''} = \dfrac{\sin(\lambda'+\mu'+\nu')\pi}{\sin(\nu''-\nu')\pi} Q_1^{\nu'} + \dfrac{\sin(\lambda'+\mu''+\nu'')\pi}{\sin(\nu'-\nu'')\pi} Q_1^{\nu''}, \end{cases}$$

daraus die übrigen Relationen durch Anwendung der Substitutionen S, S^2, T, ST, S^2T, wie oben.

In dieser Form der Relationen treten die von Riemann (Werke, pag. 68) abgeleiteten, von der Normirung der P, Q unabhängigen Bedingungen zwischen den Coefficienten der Relationen unmittelbar in Evidenz, sobald man mit Hilfe von (16) die Q_1 durch die P_1 ausdrückt.

Die Coefficienten der Relationen (17) (auch schon der Relationen (12)) hängen nur von den Differenzen

$$\lambda = \lambda' - \lambda'', \quad \mu = \mu' - \mu'', \quad \nu = \nu' - \nu''$$

ab. Aus (2) folgt nämlich z. B.

$$\lambda'' + \mu'' + \nu' = 1 - \lambda' - \mu' - \nu'' = \frac{1}{2}(1 - \lambda - \mu + \nu),$$

u. s. w. Beachtet man dies und setzt überdies

$$(18) \qquad \frac{\lambda + \mu + \nu}{2} = \sigma$$

so nehmen die Relationen (17) folgende Form an:

$$(19) \qquad \begin{cases} P_1^{\lambda'} = \dfrac{\cos(\sigma-\nu)\pi}{\sin(-\nu)\pi} Q_1^{\nu'} + \dfrac{\cos(\sigma-\mu)\pi}{\sin\nu\pi} Q_1^{\nu''}, \\ P_1^{\lambda''} = \dfrac{\cos\sigma\pi}{\sin(-\nu)\pi} Q_1^{\nu'} + \dfrac{\cos(\sigma-\lambda)\pi}{\sin\nu\pi} Q_1^{\nu''}. \end{cases}$$

§ 4.

Weitere Vereinfachung.

Wir führen jetzt nach Herrn Papperitz Vorgang drei Hilfsgrössen L, M, N ein durch die Gleichungen:

$$(20) \qquad \begin{cases} \cos\lambda\pi = -\cos\mu\pi\cos\nu\pi + \sin\mu\pi\sin\nu\pi\cos L, \\ \cos\mu\pi = -\cos\nu\pi\cos\lambda\pi + \sin\nu\pi\sin\lambda\pi\cos M, \\ \cos\nu\pi = -\cos\lambda\pi\cos\mu\pi + \sin\lambda\pi\sin\mu\pi\cos N, \\ \qquad \dfrac{\sin L}{\sin\lambda\pi} = \dfrac{\sin M}{\sin\mu\pi} = \dfrac{\sin N}{\sin\nu\pi}, \end{cases}$$

so dass also, wenn λ, μ, ν reell und überdies

$$\lambda + \mu + \nu > 1,$$

L, M, N die drei Seiten des sphärischen Dreiecks mit den Winkeln $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ sind.

Durch die Gleichungen (20) sind L, M, N nicht vollkommen bestimmt; ist L_0, M_0, N_0 *ein* Lösungssystem, so ist die allgemeinste Lösung:

$$L = \varepsilon L_0 + 2g\pi,\quad M = \varepsilon M_0 + 2h\pi,\quad N = \varepsilon N_0 + 2\varkappa\pi,$$

wo $\varepsilon = +1$ oder -1, und g, h, k ganze Zahlen sind. Durch geeignete Wahl von g, h, k kann man stets bewirken, dass die *Gauss'schen Gleichungen* mit demjenigen Vorzeichen gelten, mit welchem sie beim gemeinen sphärischen Dreieck zu nehmen sind*). Alsdann ergeben sich aus den Gauss'schen Gleichungen die folgenden:

$$(21)\qquad \begin{cases} \sin\frac{N}{2}\cos(\sigma-\mu)\pi = \sin\nu\pi\cos\frac{L}{2}\sin\frac{M}{2},\\ \sin\frac{N}{2}\cos(\sigma-\lambda)\pi = \sin\nu\pi\sin\frac{L}{2}\cos\frac{M}{2},\\ \cos\frac{N}{2}\cos\sigma\pi = -\sin\nu\pi\sin\frac{L}{2}\sin\frac{M}{2},\\ \cos\frac{N}{2}\cos(\sigma-\nu)\pi = \sin\nu\pi\cos\frac{L}{2}\cos\frac{M}{2}. \end{cases}$$

Setzt man jetzt

$$(21)\qquad \begin{cases} P^{\lambda'} = -\dfrac{1}{\cos\frac{L}{2}}P_1^{\lambda''},\quad Q^{\lambda'} = \dfrac{1}{\cos\frac{L}{2}}Q_1^{\lambda'},\\ P^{\lambda''} = \dfrac{1}{\sin\frac{L}{2}}P_1^{\lambda''},\quad Q^{\lambda''} = \dfrac{1}{\sin\frac{L}{2}}Q_1^{\lambda''} \end{cases}$$

denen acht weitere, durch gleichzeitige cyklische Vertauschung von λ, μ, ν und L, M, N abzuleitende Gleichungen hinzuzufügen sind, *so gehen die Relationen* (19) *unter Benutzung von* (21) *über in:*

$$(22)\qquad \begin{cases} P^{\lambda'} = \cos\frac{M}{2}Q^{\nu'} - \sin\frac{M}{2}Q^{\nu''},\\ P^{\lambda''} = \sin\frac{M}{2}Q^{\nu'} + \cos\frac{M}{2}Q^{\nu''}, \end{cases}$$

daraus durch Auflösen:

$$(23)\qquad \begin{cases} Q^{\nu'} = \cos\frac{M}{2}P^{\lambda'} + \sin\frac{M}{2}P^{\lambda''},\\ Q^{\nu''} = -\sin\frac{M}{2}P^{\lambda'} + \cos\frac{M}{2}P^{\lambda''}; \end{cases}$$

*) Vgl. Baltzer, Elemente der Mathematik, II, pag. 319.

Aus diesen vier Relationen ergeben sich die übrigen acht durch gleichzeitige cyklische Vertauschung der Buchstaben λ, μ, ν und L, M, N.

Man beachte noch, dass jetzt

$$(24)\qquad \begin{cases} Q^{\lambda'} = -\, e^{-\lambda'\pi i}\, P^{\lambda'}, \\ Q^{\lambda''} = +\, e^{-\lambda''\pi i} P^{\lambda''}, \quad \text{etc.} \end{cases}$$

§ 5.

Die erzeugenden linearen Substitutionen.

Aus den Relationen (22), (23) kann man unmittelbar die linearen Substitutionen ableiten, welche irgend eines der Fundamentalsysteme bei einem Umlauf der Variabeln x um einen der singulären Punkte a, b, c erleidet*). Ich will das Resultat für das Fundamentalsystem $Q^{\lambda'}$, $Q^{\lambda''}$ angeben. Bei einem *positiven Umlauf um den Punkt a* erfährt dasselbe die Substitution:

$$A = e^{(\lambda'+\lambda'')\pi i} \begin{vmatrix} e^{\lambda\pi i} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda\pi i} \end{vmatrix},$$

bei einem *positiven Umlauf um den Punkt b* die Substitution:

$$B = e^{(\mu'+\mu'')\pi i} \begin{vmatrix} \cos\mu\pi + i\cos N \sin\mu\pi, & -i\sin N\sin\mu\pi \\ -i\sin N\sin\mu\pi, & \cos\mu\pi - i\cos N\sin\mu\pi \end{vmatrix},$$

bei einem *positiven Umlauf um den Punkt c* die Substitution:

$$C = e^{(\nu'+\nu'')\pi i} \begin{vmatrix} \cos\nu\pi + i\cos M\sin\nu\pi, & -i\sin M\sin\nu\pi\, e^{-\lambda\pi i} \\ -i\sin M\sin\nu\pi\, e^{\lambda\pi i}, & \cos\nu\pi - i\cos M\sin\nu\pi \end{vmatrix},$$

wobei $e^{(\lambda'+\lambda'')\pi i}$, $e^{(\mu'+\mu'')\pi i}$, $e^{(\nu'+\nu'')\pi i}$ als „Scalarfactoren“ im Sinne der Matrixtheorie zu verstehen sind.

Man verificirt leicht, dass die Substitutionen A, B, C die *Riemann'sche Bedingung* **):

$$BA = C^{-1}$$

erfüllen, wenn man von den Gleichungen (2) und (20) Gebrauch macht.

Es bleibt nun zum Schlusse noch nachzuweisen, dass unsere Normirung der Functionen $P^{\lambda'}$, $P^{\lambda''}$ etc. in der That gerade auf die im Eingang erwähnten *Papperitz'schen Formeln* führt.

Man setze

$$s = \frac{Q^{\lambda''}}{Q^{\lambda'}},$$

so ergeben sich aus A, B, C unmittelbar die linearen, nicht-homogenen

---

*) Riemann's Werke pag. 67.

**) Riemann's Werke pag. 66.

Substitutionen, welche s bei den Umläufen der Variabeln x um die drei singulären Punkte erfährt. Diese Substitutionen bringe man nun mit Herrn Papperitz in die folgende Form, in welche jede lineare, nicht-homogene Substitution gebracht werden kann*):

$$s' = \frac{\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\zeta\sin\frac{\varphi}{2}\right)s - \sin\frac{\varphi}{2}(\eta - i\xi)}{\sin\frac{\varphi}{2}(\eta + i\xi)s + \left(\cos\frac{\varphi}{2} - i\zeta\sin\frac{\varphi}{2}\right)},$$

mit der Bedingung:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,$$

und schreibe diese Substitution in der abgekürzten Form:

$$s' = (\xi,\ \eta,\ \zeta,\ \varphi;\ s).$$

Alsdann lauten die drei fraglichen Substitutionen:

(A_1) $\quad s' = (0,\ 0,\ 1,\ -2\lambda\pi;\ s),$

(B_1) $\quad s' = (\sin N,\ 0,\ \cos N,\ -2\mu\pi;\ s),$

(C_1) $\quad s' = (\sin M\cos\lambda,\ \sin M\sin\lambda,\ \cos M,\ -2\nu\pi;\ s),$

welches genau die Formeln sind, welche Herr Papperitz l. c. p. 333 für die Function

$$s = \mathfrak{s}_0(x)$$

giebt, wo auch die geometrische Deutung derselben ausführlich discutirt wird.

Freiburg i. B., im October 1892.

Nachtrag.

Aus den sechs zu den drei singulären Punkten gehörigen Fundamentalintegralen lassen sich 20 Tripel bilden. Dieselben zerfallen in zwei Kategorien:

1) in 12 von den Tripeln kommen jedesmal *zwei* zu *demselben* singulären Punkt gehörige Integrale vor,

2) in den 8 übrigen Tripeln gehört *jedes* der drei Integrale *zu einem andern* singulären Punkt.

Die drei Integrale eines Tripels sind jedesmal durch eine lineare Relation verbunden, und man erhält daher, der Eintheilung der Tripel entsprechend, 12 Relationen erster Art und 8 Relationen zweiter Art. Von den 20 Relationen sind 4 linear unabhängig, die übrigen eine Folge dieser vier.

Geht man bei der Definition der P-Function von der *linearen*

*) Siehe Papperitz, Mathem. Annalen Bd. 27, pag. 331, und Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder, pag. 34.

Differentialgleichung aus, so sind in erster Linie die 12 Relationen *erster Art* von Wichtigkeit und auf sie haben wir uns in der obigen Darstellung ausschliesslich beschränkt. Die übrigen 8 würden sich daraus durch Elimination ergeben.

Geht man dagegen von der Definition durch das *bestimmte Integral* aus, so wird man zunächst naturgemäss auf die 8 Relationen *zweiter Art* geführt. In dieser Beziehung verweise ich auf die Arbeit von Herrn Goursat (Annales de l'Ecole Normale Supérieure, 1881, Supplément pag. 23), dann aber vor allen auf die demnächst erscheinende*) Dissertation von Herrn Schellenberg, *Neue Behandlung der hypergeometrischen Function auf Grund ihrer Definition durch das bestimmte Integral*, Göttingen 1892. In derselben wird, im Anschluss an die Vorlesungen von Herrn F. Klein**) vom Sommer 1890, eine detaillirte und systematische Darstellung der Theorie der hypergeometrischen Functionen, ausgehend von dem bestimmten Integral

$$\int (ua)^{\alpha} (ub)^{\beta} (uc)^{\gamma} (ud)^{\delta} (udu),$$

gegeben.

Die Relationen, welche uns hier beschäftigt haben, würden sich durch eine Combination der Gleichungen (22) und (38) von Herrn Schellenberg ergeben. Zu einer Vergleichung mit unsern Formeln wäre jedoch eine ziemlich umständliche Bestimmung gewisser Einheitswurzeln erforderlich, wesshalb ich hier nicht weiter darauf eingehe.

*) Dieselbe ist inzwischen erschienen.

**) Vgl. auch Math. Annalen Bd. 38, pag. 151.

Ueber die Bewegung eines Punktes in einer n-fachen Mannigfaltigkeit.

Von

Paul Stäckel in Halle a./S.

Einleitung.

Jacobi's Definition erweiternd habe ich*) als ein *dynamisches Problem* jede Aufgabe der Mechanik bezeichnet, bei welcher es sich handelt um die Bewegung eines Systems materieller Punkte, deren Anzahl endlich oder aber auch unbeschränkt gross sein darf, sobald die Bedingungen des Systems und die wirkenden Kräfte nur von der gegenseitigen Lage der Punkte, nicht von ihren Geschwindigkeiten abhängen, und sobald die Lage der Punkte zur Zeit t durch die Werthe einer *endlichen* Anzahl von Bestimmungsstücken festgelegt werden kann. Die *kleinste* Anzahl von Bestimmungsstücken, welche dieses leisten, ist von mir als *Ordnung* des betreffenden dynamischen Problems bezeichnet worden. Um die *Differentialgleichungen der Bewegung* aufzustellen, hat man zu bilden: erstens den Ausdruck der *virtuellen Arbeit* des Systems im Zeitelemente $(t \dots t + dt)$:

$$U' = \sum_{\varkappa} P_\varkappa \delta p_\varkappa,$$

und zweitens den Ausdruck der *lebendigen Kraft* des Systems zur Zeit t:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\varkappa, \lambda} a_{\varkappa\lambda} \frac{dp_\varkappa}{dt} \frac{dp_\lambda}{dt} \quad (a_{\varkappa\lambda} = a_{\lambda\varkappa}).$$

Hierbei sind $P_1, P_2, \dots, P_n$; $a_{11}, \dots, a_{nn}$ Functionen der Bestimmungsstücke $p_1, p_2, \dots, p_n$ allein, und die Buchstaben $\varkappa, \lambda$ bezeichnen die Reihe der Zahlen $1, 2, 3, \dots, n$. Ist dieses geschehen,

*) Ueber die Differentialgleichungen der Dynamik und den Begriff der analytischen Aequivalenz dynamischer Probleme, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 107, S. 319—348 (1891).

so ergeben sich die gesuchten Differentialgleichungen in der zweiten Lagrange'schen Form:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \frac{dp_\varkappa}{dt}} - \frac{\partial T}{\partial p_\mu} - P_\mu = 0, \quad (\mu = 1, 2, \ldots, n).$$

Diesen Differentialgleichungen lässt sich aber folgende Bedeutung beilegen. Das Problem der Mechanik lässt sich in der Weise ausdehnen*), dass als Quadrat des Linienelementes ds eine wesentlich positive quadratische Form der Differentiale der n unabhängigen Veränderlichen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ angenommen wird. Setzt man also:

$$ds^2 = \sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa\lambda}\, dp_\varkappa\, dp_\lambda,$$

so ist T als die lebendige Kraft eines Punktes der Masse 1 zur Zeit t anzusehen, und der Ausdruck U' erhält die Bedeutung der virtuellen Arbeit dieses Punktes im Zeitelemente $(t \ldots t + dt)$. Unter diesen Annahmen ergeben sich genau die eben gefundenen Differentialgleichungen als *die Differentialgleichungen der Bewegung eines Punktes der Masse* 1 *in einer n-fachen Mannigfaltigkeit*, deren Linienelement ds ist.

Jedem *dynamischen* Probleme lässt sich auf diese Weise ein Problem der Bewegung *eines* Punktes in einer n-fachen Mannigfaltigkeit so zuordnen, dass beide die Lösung desselben analytischen Problems verlangen; ich habe daher (a. a. O. S. 325) zwei dynamische Probleme *analytisch äquivalent* genannt, wenn zu beiden dasselbe Problem der Bewegung eines Punktes in einer n-fachen Mannigfaltigkeit gehört**). Bei der Discussion des analytischen Problems, dessen Lösung mit einem Schlage die Lösung der unendlich vielen zugehörigen dynamischen Probleme ergiebt, erweist es sich als durchaus zweckmässig nicht rein analytisch zu verfahren, sondern das analytische Problem immer als das Problem der Bewegung eines Punktes in einer n-fachen Mannigfaltigkeit zu interpretiren, wodurch die Darstellung an Anschaulichkeit und Uebersichtlichkeit erheblich gewinnt. Die Einführung dieser Sprechweise dürfte um so mehr gerechtfertigt sein, als es immer mehr üblich wird, Betrachtungen, die sich auf Systeme von veränderlichen Grössen beziehen, durch Zuhilfenahme höherer

---

*) Vgl. die ausgezeichneten Arbeiten von Herrn R. Lipschitz: Untersuchung eines Problems der Variationsrechnung, in welchem das Problem der Mechanik enthalten ist, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 74, S. 116 (1871) und: Bemerkungen zu dem Princip des kleinsten Zwanges, ebendaselbst Bd. 82, S. 316 (1877); sowie meine oben erwähnte Abhandlung, S. 330.

**) Der Begriff der Aequivalenz dynamischer Probleme ist noch einer Verallgemeinerung fähig, wie dies im Anschluss an meine Arbeit Herr P. Appell gezeigt hat (Sur des transformations de mouvements, Journal für Mathematik, Bd. 110, S. 37, 1892).

Mannigfaltigkeiten der Anschauung näher zu bringen, wie dies bei drei Variabeln mittelst geometrischer Massnahmen möglich ist.

Im folgenden soll eine ausgezeichnete Classe von Bewegungen eines Punktes in einer n-fachen Mannigfaltigkeit behandelt werden, bei denen es möglich ist sich eine genaue Vorstellung von dem Verlaufe der Bewegung zu verschaffen, indem alles auf die Untersuchung eines Umkehrproblems ankommt, welches, wie ich an anderer Stelle gezeigt habe*), auf n-fach periodische Functionen von n reellen Veränderlichen führt.

Jedesmal, wenn es gelungen ist das Problem der Bewegung eines Punktes in einer n-fachen Mannigfaltigkeit zu lösen, entsteht die umgekehrte Frage nach den Problemen der Mechanik im gewöhnlichen Sinne des Wortes, die diesem Probleme analytisch äquivalent sind. Auf diese Frage in Bezug auf das hier gelöste Problem einzugehen, muss ich jedoch, um den Umfang dieser Arbeit nicht zu sehr auszudehnen, verzichten und behalte mir vor, meine Resultate an anderer Stelle mitzutheilen.

I.

Ueber eine ausgezeichnete Classe von Bewegungen eines Punktes in einer n-fachen Mannigfaltigkeit.

Zu jeder quadratischen Differentialform:

$$ds^2 = \sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa\lambda}\, dp_\varkappa\, dp_\lambda$$

gehören gewisse *Covarianten*, welche Herr Beltrami**) entdeckt und als *Differentialparameter* bezeichnet hat. Um den Differentialparameter erster Ordnung einer Function $U(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ zu bilden, hat man sich zunächst die der Form ds^2 *reciproke* Form:

$$\sum_{\varkappa,\lambda} A_{\varkappa\lambda}\, dp_\varkappa\, dp_\lambda \quad (A_{\varkappa\lambda} = A_{\lambda\varkappa})$$

herzustellen. Dann ist der Differentialparameter erster Ordnung:

$$\Delta_1 U = \sum_{\varkappa,\lambda} A_{\varkappa\lambda} \frac{\partial U}{\partial p_\varkappa} \frac{\partial U}{\partial p_\lambda}.$$

Er hat folgende Bedeutung. Der Gleichung $U(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \text{const.}$ entspricht in der n-fachen Mannigfaltigkeit, deren Linienelement ds

*) Ueber die Integration der Hamilton-Jacobi'schen Differentialgleichung mittelst Separation der Variabeln, Habilitationsschrift, Halle 1891.

**) Memorie dell' Istituto di Bologna, Serie seconda T. VIII, S. 549 (1869), Sulla teorica generale dei parametri differenziali.

ist, und die im folgenden kurz als *Mannigfaltigkeit* bezeichnet werden soll, ein System von ∞^1 $(n-1)$-fachen Mannigfaltigkeiten, von denen im allgemeinen nur eine zu jedem Punkte $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ gehört; diese $(n-1)$-fachen Mannigfaltigkeiten sollen als „*Felder*" bezeichnet werden. Geht man in der Mannigfaltigkeit vom Punkte $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ normal zu dem durch ihn gehenden Felde um eine Strecke δN vorwärts und ändert sich dabei U um δU, so ist:

$$\Delta_1 U = \left(\frac{\delta U}{\delta N}\right)^2.$$

Unter den Functionen U zeichnen sich diejenigen aus, welche der partiellen Differentialgleichung

$$\Delta_1 U = f(U)$$

genügen, wo $f(U)$ eine Function von U allein bedeutet. Das Bestehen dieser Gleichung ist die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, *dass die orthogonalen Trajectorien des Systems der Felder $U =$ const. geodätische Linien der Mannigfaltigkeit sind.* Herr Beltrami beweist nun, indem er einen berühmten Satz von Gauss verallgemeinert, dass die Bogen solcher Trajectorien zwischen je zwei Feldern dieselbe Länge haben und sagt daher, *die Gleichung $\Delta_1 U = f(U)$ definire den geodätischen Parallelismus der Felder $U =$ const.*

Jetzt soll angenommen werden, dass für die Bewegung eines Punktes der Masse 1 in der betrachteten Mannigfaltigkeit eine *Kräftefunction* $\Pi(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ existirt, dass also:

$$P_\mu = \frac{\partial U}{\partial p_\mu}$$

und $U' = \delta U$ ist. Dem Umstand entsprechend, dass man in der gewöhnlichen Mechanik die Flächen constanten Potentials als Niveauflächen bezeichnet, sollen die Felder constanter Kräftefunction $\Pi(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ als *Niveaufelder* bezeichnet werden. Aus der Definition der Kräftefunction folgt, dass

$$\Delta_1 \Pi = \left(\frac{\delta \Pi}{\delta N}\right)^2$$

das Quadrat der Kraft angiebt, welche in der Mannigfaltigkeit senkrecht zum Niveaufeld auf den bewegten Punkt wirkt. Wird daher die besondere Annahme gemacht, dass die Kräftefunction der Gleichung:

$$\Delta_1 \Pi = f(\Pi)$$

genügt, so folgt, dass die Grösse dieser Kraft längs eines Niveaufeldes constant ist; und umgekehrt, ist die Grösse dieser Kraft längs jedes einzelnen Niveaufeldes constant, so ist $\Delta_1 \Pi = f(\Pi)$.

Es erweist sich als zweckmässig für die Untersuchung der soeben charakterisirten Classe von Bewegungen statt der Variabeln $p_1, p_2, \ldots, p_n$

neue Variabeln $q_1, q_2, \ldots, q_n$ einzuführen. Und zwar sei q_1 die Bogenlänge der orthogonalen Trajectorien, gemessen von einem bestimmten Niveaufelde aus. Die Variabeln $q_2, q_3, \ldots, q_n$ lassen sich dann, wie Herr Beltrami gezeigt hat, in der Weise wählen, dass man erhält:

$$ds^2 = dq_1^2 + \sum_{h,k} b_{hk}\, dq_h\, dq_k,$$

wo $b_{22}, \ldots, b_{nn}$ Functionen von $q_1, q_2, \ldots, q_n$ sind, und die Indices h, k die Werthe $2, 3, \ldots, n$ zu durchlaufen haben. Bei diesen Festsetzungen ist $q_1 = \text{const.}$ die Gleichung der Niveaufelder, und das Linienelement dieser $(n-1)$-fachen Mannigfaltigkeiten $d\sigma$ wird gegeben durch die Gleichung:

$$d\sigma^2 = \sum_{h,k} b_{hk}\, dq_h\, dq_k.$$

In Folge der Voraussetzung, welche über die Kräftefunction gemacht wurde, kann man über die Abhängigkeit der Grösse $\frac{d\sigma}{dt}$ von t etwas aussagen. Angenommen nämlich, dass an einer Stelle der Bahn des bewegten Punktes $\frac{d\sigma}{dt}$ verschwindet, so geht der bewegte Punkt von dieser Stelle aus im nächsten Zeitelemente auf der orthogonalen Trajectorie weiter. Im folgenden Zeitelemente würde er, seiner Geschwindigkeit allein folgend, in der geodätischen Fortsetzung seiner Bahn weitergehen. Es wirkt aber auf ihn eine beschleunigende Kraft und zwar in der Richtung der durch ihn gehenden orthogonalen Trajectorie der Niveaufelder. Wenn und nur wenn $\Delta_1 \Pi = f(\Pi)$ ist, fällt die geodätische Fortsetzung mit der Trajectorie zusammen und der bewegte Punkt geht auf dieser weiter. Entweder bleibt er also auf einer solchen Trajectorie, wobei beständig $\frac{d\sigma}{dt}$ gleich Null ist, oder $\frac{d\sigma}{dt}$ verschwindet niemals. Mithin ist $\Delta_1 \Pi = f(\Pi)$ die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $\frac{d\sigma}{dt}$ entweder immer oder niemals verschwindet.

Der Grösse $\frac{d\sigma}{dt}$ lässt sich eine mechanische Bedeutung beilegen. Nimmt man $\frac{ds}{dt}$ als Ausdruck der Geschwindigkeit v des bewegten Punktes zur Zeit t an, so zeigt die Gleichung:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dq_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2,$$

dass die Geschwindigkeit sich in zwei auf einander senkrechte Componenten zerlegen lässt, von denen die erste $\frac{dq_1}{dt}$ die Richtung der

Trajectorie hat, während die zweite $\frac{d\sigma}{dt}$ ihrer Richtung nach im Niveaufelde liegt. Ist $\frac{ds}{dt}$ bekannt als Function von t, so ergiebt sich durch Integration die Länge s der vom Punkte durchlaufenen Bahn. Ebenso erhält man durch Integration von $\frac{d\sigma}{dt}$ eine Grösse σ, welche als *seitliche Abweichung des Punktes* von der Trajectorie bezeichnet werden kann, auf welcher sich der Punkt am Anfange der Bewegung befand. Zwischen der Geschwindigkeit v des bewegten Punktes und der Kräftefunction Π besteht ein einfacher Zusammenhang, es ist:

$$v^2 - \bar{v}^2 = 2(\Pi - \bar{\Pi});$$

dabei sind die Anfangswerthe der Grössen v und Π durch Ueberstreichen gekennzeichnet worden. Es darf und soll angenommen werden, dass $\bar{v}$ und $\bar{\Pi}$ endlich sind. Dann ist klar, dass die Geschwindigkeit v nur dann über alle Grenzen wachsen kann, wenn Π unendlich wird, das heisst, wenn der bewegte Punkt einem Niveaufelde $\Pi = \pm\infty$ sich unbeschränkt nähert. Solange Π endlich ist, ist auch $\frac{ds}{dt}$, mithin auch $\frac{d\sigma}{dt}$ endlich. Nun ist bewiesen worden, dass $\frac{d\sigma}{dt}$ entweder immer oder niemals verschwindet. Da $\frac{d\sigma}{dt}$, seiner mechanischen Bedeutung wegen, seinen Werth stetig ändert, so folgt, dass, solange Π endlich ist, $\frac{d\sigma}{dt}$ dasselbe Vorzeichen hat, und dass mithin σ entweder beständig wächst, oder beständig abnimmt. Dies lässt sich so ausdrücken: die seitliche Abweichung des bewegten Punktes von der Trajectorie, die durch den Anfangspunkt der Bewegung geht, ist entweder immer Null, und der Punkt bleibt beständig auf dieser Trajectorie, oder diese Abweichung ändert sich beständig in demselben Sinne, solange die Kräftefunction Π bei der Bewegung endlich bleibt.

Die Niveaufelder, in denen die Kräftefunction Π unendlich wird, sind also besonders zu untersuchen. Die Gleichung:

$$v^2 - \bar{v}^2 = 2(\Pi - \bar{\Pi})$$

zeigt, dass die Annahme $\Pi = -\infty$ einen imaginären Werth für v ergeben würde. Hieraus folgt, dass ein Niveaufeld $\Pi = -\infty$ eine unübersteigliche Grenze für die Bewegung des Punktes bildet; diese Niveaufelder kommen daher für die Untersuchung von $\frac{d\sigma}{dt}$ nicht in Betracht. Dagegen können die Felder $\Pi = +\infty$ eine Aenderung des Vorzeichens von $\frac{d\sigma}{dt}$ herbeiführen, wenn nämlich $\frac{d\sigma}{dt}$ in ihnen auch unendlich wird; was in jedem besonderen Falle entschieden werden kann, ohne dass man im Allgemeinen etwas darüber aussagen könnte.

Noch eine andere Art von Niveaufeldern ist für die Bewegung des Punktes von Wichtigkeit. Es kann nämlich vorkommen, dass das Niveaufeld in einen Punkt degenerirt, durch welchen dann unendlich viele Trajectorien gehen. Solche Stellen der n-fachen Mannigfaltigkeit sollen *Pole* genannt werden. Um zu untersuchen, ob der bewegte Punkt im Laufe der Bewegung einen solchen Pol erreichen kann, denke man sich vom Anfangspunkte der Bewegung, welcher kein Pol sein möge, nach einem der Pole eine Curve gezogen, die durch keinen anderen Pol geht und ihre Richtung überall stetig ändert. Besitzt diese Curve im Pol eine bestimmte Tangente, so ist diese mit der Tangente einer der durch den Pol gehenden Trajectorien identisch. Für diese Uebereinstimmung aber ist nothwendig und hinreichend, dass $\frac{d\sigma}{dt}$ an der betreffenden Stelle unendlich klein gegen $\frac{ds}{dt}$ ist. Bei endlichem $\frac{ds}{dt}$ muss also $\frac{d\sigma}{dt}$ im Pole verschwinden; dann aber ist es stets gleich Null, der bewegte Punkt hat also den Weg vom Anfangspunkt nach dem Pol auf einer Trajectorie zurückgelegt. Schliesst man also den besonders zu untersuchenden Fall aus, dass im Pol die Kräftefunction positiv unendlich wird, so kann der bewegte Punkt einen Pol nur dann erreichen, wenn er sich auf einer Trajectorie bewegt. Diese Punkte bilden also ebenfalls Grenzen für die Bewegung, sobald die Bewegung auf einer Trajectorie ausgeschlossen, also der Anfangswerth von $\frac{d\sigma}{dt}$ als von Null verschieden angenommen wird.

Macht man jetzt noch die weitere Annahme, dass die Trajectorien durch das Niveaufeld des Anfangspunktes der Bewegung, wenn überhaupt Pole vorhanden sind, nach beiden Seiten hin alle in je einem Pole sich schneiden — und dies soll als der reguläre Fall bezeichnet werden — so lässt sich der Lauf der Bewegung in folgender Weise beschreiben. Die Werthe von q_1, die zu Niveaufeldern des betrachteten Theils der Mannigfaltigkeit gehören, welcher zwischen den beiden Polen liegt, mögen die untere Grenze Q und die obere Grenze R haben, Grenzen, die so gewählt sein sollen, dass zu jedem Punkte der Mannigfaltigkeit nur ein Werth von q_1 gehört; existirt in einer der beiden Richtungen kein Pol, so ist der entsprechende Werth von Q oder R durch $\pm\infty$ zu ersetzen, und existiren Niveaufelder $\Pi = -\infty$, so sind die Grenzen Q und R so zu modificieren, als ob diese Felder Pole wären. Hat nun $\frac{dq_1}{dt}$ am Anfang der Bewegung etwa einen positiven Werth, so kann der bewegte Punkt nur dann beständig ein positives $\frac{dq_1}{dt}$ behalten, wenn der zur Richtung des positiven q_1 gehörige Grenzwerth, etwa Q, unendlich ist. Bei endlichem Q *muss*, bei unendlichem Q *kann* $\frac{dq_1}{dt}$ einmal verschwinden. Entweder tritt

dieses Verschwinden erst nach unendlich langer Zeit ein, und der bewegte Punkt nähert sich von einer Seite her *asymptotisch* einem bestimmten Niveaufelde, oder $\frac{dq_1}{dt}$ wechselt nach endlicher Zeit das Vorzeichen, und dann kehrt der Punkt in einem bestimmten Niveaufelde um, welches als *Umkehrfeld*, oder auch *Wendefeld*, bezeichnet werden kann. Nach der Umkehr ist $\frac{dq_1}{dt}$ negativ. Ist R unendlich, so kann $\frac{dq_1}{dt}$ unbeschränkt lange negativ bleiben, aber bei endlichem R muss, bei unendlichem R kann der bewegte Punkt entweder einem Niveaufelde sich asymptotisch nähern oder wieder umkehren. Nach der Umkehr wird $\frac{dq_1}{dt}$ wieder positiv, und es wiederholen sich dieselben Betrachtungen. Entsprechendes gilt, wenn man die Bewegung des Punktes betrachtet, wie sie sich abspielen musste, damit er einmal den Anfangspunkt mit den gegebenen Anfangswerthen von $\frac{dq_1}{dt}$, $\frac{dq_2}{dt}, \dots, \frac{dq_n}{dt}$ erreichen konnte.

Als typische Form der Bewegung des Punktes ergiebt sich somit, *dass der bewegte Punkt beständig zwischen zwei Niveaufeldern, den Umkehrfeldern, oscillirt.* Als Ausartungen dieses Typus ergeben sich: einmal, dass der Punkt beständig in derselben Richtung weitergeht, und dann dass er sich einem bestimmten Niveaufelde asymptotisch nähert; auf die Bedeutung der letzteren Erscheinung wird noch zurückzukommen sein.

Soviel lässt sich aus der blossen Annahme, dass für die Bewegung eine Kräftefunction Π existirt, welche der Gleichung $\Delta_1 \Pi = f(\Pi)$ genügt, erschliessen*). Bei einer ausgezeichneten Classe von Problemen lässt sich aber die Untersuchung noch weiter führen. Zu ihnen gelangt man durch folgende Ueberlegung. Die Integration der Differentialgleichungen der Bewegung:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \frac{dp_\mu}{dt}} - \frac{\partial T}{\partial p_\mu} - \frac{\partial \Pi}{\partial p_\mu} = 0$$

lässt sich nach Hamilton und Jacobi auf die Ermittelung einer vollständigen Lösung der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{1}{2}\Delta_1 W - (\Pi + \alpha_1) = 0$$

zurückführen, wo α_1 eine willkürliche Constante bedeutet. Ist nämlich W

*) Im Abschnitt II meiner Inaugural-Dissertation: *Ueber die Bewegung eines Punktes auf einer Fläche, Berlin* 1885, sind bereits ähnliche Betrachtungen für den besonderen Fall $n = 2$ durchgeführt worden.

eine *vollständige Lösung* dieser Gleichung, die also ausser der mit ihr additiv verbundenen Constanten noch $n - 1$ weitere selbständige Constanten $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ enthält, so sind:

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \tau - t, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \ldots, \frac{\partial W}{\partial \alpha_n} = \beta_n$$

die Integralgleichungen der Differentialgleichungen der Bewegung; in ihnen bedeuten $\tau, \beta_2, \ldots, \beta_n$ n neue Constanten. In den Abschnitten 4 bis 6 meiner bereits erwähnten Habilitationsschrift habe ich nun *eine Classe Hamilton-Jacobi'scher Differentialgleichungen in n Variabeln* angegeben, *für welche sich eine vollständige Lösung mittelst Quadraturen ergiebt,* und die daraus folgenden Integralgleichungen discutirt. Ich werde im nächsten Abschnitt zunächst die Resultate dieser Abhandlung mittheilen und dann die Untersuchung der Integralgleichungen soweit vervollständigen, wie dies für die Anwendung auf das vorliegende Problem nöthig erscheint.

II.

Ueber die Integration der Hamilton-Jacobi'schen Differentialgleichung mittelst Separation der Variabeln und ein Umkehrproblem, welches auf n-fach periodische Functionen von n reellen Veränderlichen führt.

Im Jahre 1838 gelang Jacobi die Bestimmung der *geodätischen Linien des dreiaxigen Ellipsoids*, als er elliptische Coordinaten einführte, bei deren Anwendung die Hamilton-Jacobi'sche Differentialgleichung, auf deren Integration das Problem zurückkommt, durch *Separation der Variabeln* integrirt werden kann. Liouville erkannte dann 1846, dass diese Integrationsmethode die Ermittelung der geodätischen Linien durch blosse Quadraturen, und ebenso die Lösung gewisser Bewegungsprobleme, bei der Familie von Flächen erlaubt, für welche das Quadrat des Linienelementes auf die Form:

$$ds^2 = \big(\varkappa(q_1) + \lambda(q_2)\big)\,(dq_1^2 + dq_2^2)$$

gebracht werden kann. Die Frage, wie weit die Tragweite dieser Methode reicht, oder mit andern Worten, welche Hamilton-Jacobi'schen Gleichungen:

$$A_{11}\Big(\frac{\partial W}{\partial q_1}\Big)^2 + A_{12}\frac{\partial W}{\partial q_1}\frac{\partial W}{\partial q_2} + A_{22}\Big(\frac{\partial W}{\partial q_2}\Big)^2 - 2\big(\Pi(q_1, q_2) + \alpha_1\big) = 0$$

Separation der Variabeln gestatten, habe ich dahin beantwortet, dass das Quadrat des Linienelementes jeder Fläche, für welche eine der zugehörigen Hamilton-Jacobi'schen Gleichungen durch Separation der Variabeln integrirt werden kann, mittelst einer Transformation der Variabeln:

$$p_1 = \Phi(q_1) + \Psi(q_2), \quad p_2 = X(q_1) + \Omega(q_2)$$

stets auf die Form von Liouville gebracht werden kann.*)

Jacobi**) hat später gezeigt, dass auch die geodätischen Linien gewisser n-facher Mannigfaltigkeiten, die dem dreiaxigen Ellipsoid entsprechen, mittelst allgemeiner elliptischer Coordinaten in n Veränderlichen bestimmt werden können, und im Anschluss daran hat Herr Rosochatius***) untersucht, wie beschaffen die Kräftefunction sein muss, damit die Hamilton-Jacobi'sche Gleichung in allgemeinen elliptischen Coordinaten Separation der Variabeln gestattet; ein Theil seiner Resultate findet sich bereits in einer Arbeit von Liouville.†)

Ein Theorem, welches im Gebiete der n-fachen Mannigfaltigkeiten genau dasselbe leistet, was Liouville's bekanntes Theorem für zweifache Mannigfaltigkeiten ermöglicht, habe ich in meiner schon erwähnten Habilitationsschrift bewiesen. Ich gelangte zu diesem Theorem, als ich untersuchte, in welchen Fällen die zu der speciellen quadratischen Differentialform von nicht verschwindender Determinante:

$$ds^2 = \sum_\varkappa \frac{dp_\varkappa^2}{A_\varkappa}$$

gehörige Hamilton-Jacobi'sche Differentialgleichung:

$$H^* = \frac{1}{2} \sum_\varkappa A_\varkappa \left(\frac{\partial W}{\partial p_\varkappa}\right)^2 - (\Pi + \alpha_1) = 0$$

Separation der Variabeln gestattet, das heisst, wann sie eine vollständige Lösung der Form:

$$W = \sum_\varkappa \int W_\varkappa(p_\varkappa;\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\, dp_\varkappa$$

besitzt. Setzt man in H^* für $\frac{\partial W}{\partial p_\varkappa}$ den verlangten Werth $W_\varkappa(p_\varkappa; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$

---

*) Eine charakteristische Eigenschaft der Flächen, deren Linienelement ds durch $ds^2 = (\varkappa(q_1) + \lambda(q_2))\,(dq_1^2 + dq_2^2)$ gegeben wird, diese Annalen, Bd. 35, S. 91 (1889). Die betreffenden Flächen habe ich dort kurz *Liouville'sche Flächen* genannt. Die im Text gebrauchte Bezeichnung: Flächen, deren Linienelement die Form von Liouville hat, dürfte indess vorzuziehen sein, da es einmal nur auf das Linienelement ankommt und dann die Bezeichnung *Liouville'sche Fläche* von Herrn G. Darboux (Leçons sur la théorie générale des surfaces, T. 2, 1889, S. 291) in anderem Sinne gebraucht worden ist.

**) C. G. J. Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, herausgegeben von A. Clebsch, 26te Vorlesung.

***) Ueber die Bewegung eines Punktes. Inaugural-Dissertation. Göttingen 1877.

†) Sur quelques cas particuliers où les équations du mouvement d'un point peuvent s'intégrer, Liouville's Journal, T. XII, S. 410 (1846).

ein, und differentiirt dann die so entstehende Identität partiell nach $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, so erhält man die n Gleichungen:

$$\sum_\varkappa A_\varkappa \frac{\partial (W_\varkappa^2)}{\partial \alpha_\mu} = 2\,\delta_{1\mu} \qquad \left(\delta_{1\mu} = \begin{cases} 1 & \mu = 1 \\ 0 & \mu \gtrless 1 \end{cases} \quad \mu = 1, 2, \cdots, n\right),$$

aus denen sich $A_1, A_2, \ldots, A_n$ in der Form:

$$A_\varkappa = 2\,\frac{Q_\varkappa}{Q}$$

ergeben, wenn man in der Bezeichnung von L. Kronecker einführt:

$$\left|\frac{\partial (W_\varkappa^2)}{\partial \alpha_\mu}\right|_{(\varkappa,\, \mu = 1, 2, \cdots, n)} = Q = \sum_\varkappa \frac{\partial (W_\varkappa^2)}{\partial \alpha_1}\, Q_\varkappa.$$

Substituirt man diese Werthe von $A_1, A_2, \ldots, A_n$ in H^*, so ergiebt sich:

$$\Pi = \frac{\sum\limits_\varkappa \left(W_\varkappa^2 - \alpha_1 \frac{\partial (W_\varkappa^2)}{\partial \alpha_1}\right) Q_\varkappa}{\sum\limits_\varkappa \frac{\partial (W_\varkappa^2)}{\partial \alpha_1} \cdot Q_\varkappa}.$$

Es lässt sich nun zeigen, dass die Determinante Q und ihre Unterdeterminanten $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ nicht identisch verschwinden können, und es ist daher möglich, den willkürlichen Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ bestimmte Werthe $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_n$ zu ertheilen, für welche diese Grössen nicht gleich Null sind. Dadurch möge übergehen:

$$\frac{\partial (W_\varkappa^2)}{\partial \alpha_\mu} \text{ in } 2\varphi_{\varkappa\mu}(p_\varkappa) \text{ und } W_\varkappa^2 - \alpha_1 \frac{\partial (W_\varkappa^2)}{\partial \alpha_1} \text{ in } 2\varphi_{\varkappa 0}(p_\varkappa).$$

Es sei jetzt noch:

$$|\varphi_{\varkappa\lambda}(p_\varkappa)|_{(\varkappa,\, \lambda = 1, 2, \cdots, n)} = \Phi = \sum_\varkappa \varphi_{\varkappa 1}(p_\varkappa)\, \Phi_\varkappa,$$

und:

$$\Phi' = \sum_\varkappa \varphi_{\varkappa 0}(p_\varkappa)\, \Phi_\varkappa,$$

dann lässt sich das gewonnene Resultat so aussprechen:

Wenn die Hamilton-Jacobi'sche Differentialgleichung:

$$H^* = \frac{1}{2} \sum_\varkappa A_\varkappa \left(\frac{\partial W}{\partial p_\varkappa}\right)^2 - (\Pi + \alpha_1) = 0$$

Separation der Variabeln gestattet, so giebt es nothwendig ein System von $n(n+1)$ Functionen einer Veränderlichen:

$$\varphi_{\varkappa\nu}(p_\varkappa) \qquad \begin{pmatrix} \varkappa = 1, 2, \ldots, n \\ \nu = 0, 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$$

von der Beschaffenheit, dass:

$$A_1 = \frac{\Phi_1}{\Phi}, \quad A_2 = \frac{\Phi_2}{\Phi}, \cdots, A_n = \frac{\Phi_n}{\Phi}; \quad \Pi = \frac{\Phi'}{\Phi}$$

gesetzt werden kann.

Wird jetzt umgekehrt das System der Functionen $\varphi_{\varkappa\nu}(p_\varkappa)$ ganz willkürlich angenommen bis auf die Beschränkung, dass keine der Determinanten $\Phi, \Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ identisch verschwindet, und bildet man die quadratische Differentialform nicht verschwindender Determinante:

$$ds^2 = \sum_\varkappa \frac{\Phi}{\Phi_\varkappa} dp_\varkappa^2 = \Phi \cdot \sum_\varkappa \frac{dp_\varkappa^2}{\Phi_\varkappa},$$

so gehört dazu die Hamilton-Jacobi'sche Gleichung:

$$\frac{1}{2} \sum_\varkappa \frac{\Phi_\varkappa}{\Phi} \left(\frac{\partial W_\varkappa}{\partial p_\varkappa}\right)^2 - (\Pi + \alpha_1) = 0.$$

Wenn noch die Kräftefunction Π auf die Form gebracht werden kann:

$$\Pi = \frac{\Phi'}{\Phi},$$

so besitzt diese Differentialgleichung die vollständige Lösung:

$$W = \sum_\varkappa \int \sqrt{2\varphi_{\varkappa 0}(p_\varkappa) + \sum_\lambda 2\varphi_{\varkappa\lambda}(p_\varkappa) \cdot \alpha_\varkappa} \cdot dp_\varkappa,$$

und hieraus ergeben sich als Integralgleichungen der Differentialgleichungen der Bewegung:

$$\sum_\varkappa \int \frac{\varphi_{\varkappa 1}}{\sqrt{2\varphi_{\varkappa 0} + \sum_\lambda 2\varphi_{\varkappa\lambda} \cdot \alpha_\lambda}} dp_\varkappa = \tau \div t,$$

$$\sum_\varkappa \int \frac{\varphi_{\varkappa\mu}}{\sqrt{2\varphi_{\varkappa 0} + \sum_\lambda 2\varphi_{\varkappa\lambda} \cdot \alpha_\lambda}} dp_\varkappa = \beta_\mu \qquad (\mu = 2, 3, \ldots, n),$$

sodass man zu folgendem Theorem der Dynamik geführt wird:

Lässt sich für ein dynamisches Problem die lebendige Kraft durch den Ausdruck:

$$T = \frac{1}{2} \sum_\varkappa \frac{\Phi}{\Phi_\varkappa} \left(\frac{dp_\varkappa}{dt}\right)^2$$

darstellen, während gleichzeitig die Kräftefunction die Form:

$$\Pi = \frac{\Phi'}{\Phi}$$

hat, so lassen sich die Differentialgleichungen der Bewegung durch blosse Quadraturen integriren.

Für $n = 2$ geht dieser Satz genau in den oben erwähnten Satz von Liouville über. Liouville leitet aus seinem Satz als Corollar sofort her, dass die geodätischen Linien gewisser Flächen, deren Linienelement nämlich durch:

$$ds^2 = \big(\varphi_{11}(p_1) \cdot \varphi_{22}(p_2) - \varphi_{12}(p_1) \cdot \varphi_{21}(p_2)\big) \cdot \Big(\frac{dp_1^2}{\varphi_{22}(p_2)} + \frac{dp_2^2}{\varphi_{11}(p_1)}\Big)$$

gegeben wird, sich durch Quadraturen bestimmen lassen; man wird diese Form des Linienelementes ohne Schwierigkeit auf die oben erwähnte Liouville'sche Form bringen. Genau ebenso ergiebt sich als Corollar des hier bewiesenen Theorems der Satz:

Lässt sich das Quadrat des Linienelementes ds einer n-fachen Mannigfaltigkeit in der Form:

$$ds^2 = \Phi \sum_{\varkappa} \frac{dp_\varkappa^2}{\Phi_\varkappa} \quad \Big(\Phi = |\varphi_{\varkappa\lambda}(p_\varkappa)| = \sum_{\varkappa} \varphi_{\varkappa 1}(p_\varkappa)\, \Phi_\varkappa\Big) \cdot$$

darstellen, so sind die Gleichungen der geodätischen Linien dieser Mannigfaltigkeit durch Quadraturen bestimmbar; sie lauten in den Veränderlichen $p_1, p_2, \ldots, p_n$:

$$\sum_{\varkappa} \int \frac{\varphi_{\varkappa\mu}\, dp_\varkappa}{\sqrt{\sum\limits_{\lambda} 2\varphi_{\varkappa\lambda} \cdot \alpha_\lambda}} = \beta_\mu \quad (\mu = 2, 3, \ldots, n).$$

Wenn es nun auf diese Weise auch gelungen ist für eine grosse Classe von dynamischen Problemen die Integration der Differentialgleichungen der Bewegung mittelst Quadraturen zu bewerkstelligen, so ist damit für die Erkenntniss der Abhängigkeit der Bestimmungsstücke $p_1, p_2, \ldots, p_n$ von der Zeit t noch sehr wenig gewonnen, und es bedarf dazu einer neuen Untersuchung, die sich ohne beschränkende Voraussetzungen über die Natur der Functionen $\varphi_{\varkappa\nu}$ nicht durchführen lässt.

Für $n = 1$ erhält man die Gleichung:

$$\int \frac{\varphi_{11}(p_1)\, dp_1}{\sqrt{2\varphi_{10} + 2\varphi_{11} \cdot \alpha_1}} = \tau - t.$$

Abel hat in einer nachgelassenen Abhandlung*) eine Gleichung der Form:

*) Propriétés remarquables de la fonction $y = \varphi(x)$ etc. Œuvres complètes, nouvelle édition par MM. L. Sylow et S. Lie, t. II, S. 40.

$$\int \frac{\varphi(p_1)\, dp_1}{\sqrt{\psi(p_1)}} = t_1$$

betrachtet und gezeigt, dass aus dieser Gleichung unter gewissen Voraussetzungen p_1 als periodische Function von t_1 bestimmt ist. Dieselbe Gleichung ist später von Herrn Weierstrass*) eingehend behandelt worden, und ich habe sie unter etwas allgemeineren Voraussetzungen und nach einer anderen Methode in Abschnitt IV meiner Inauguraldissertation untersucht.

Für $n = 2$ ergiebt sich, wenn zur Abkürzung:

$$2\varphi_{\varkappa 0} + 2\varphi_{\varkappa 1} \cdot \alpha_1 + 2\varphi_{\varkappa 2} \cdot \alpha_2 = \psi_\varkappa(p_\varkappa) \qquad (\varkappa = 1, 2)$$

gesetzt wird:

$$\int \frac{\varphi_{11}\, dp_1}{\sqrt{\psi_1(p_1)}} + \int \frac{\varphi_{21}\, dp_2}{\sqrt{\psi_2(p_2)}} = \tau - t,$$

$$\int \frac{\varphi_{12}\, dp_1}{\sqrt{\psi_1(p_1)}} + \int \frac{\varphi_{22}\, dp_2}{\sqrt{\psi_2(p_2)}} = \beta_2.$$

Dieses Umkehrproblem lässt sich auffassen als ein besonderer Fall eines allgemeineren, welches Herr Staude**) untersucht hat, woraus folgt, dass aus diesen Gleichungen unter gewissen Voraussetzungen *p_1 und p_2 als eindeutige, endliche, stetige, bedingt periodische Functionen der Zeit t definirt werden;* der von Herrn Staude eingeführte wichtige Begriff *bedingt periodischer Functionen* wird unten erörtert werden.

Dass auch für den allgemeinen Fall von n Veränderlichen ein entsprechender Satz gilt, habe ich in meiner Habilitationsschrift gezeigt. Ich ging dabei aus von den allgemeineren Integralgleichungen:

$$\sum_\varkappa \int \frac{\varphi_{\varkappa\lambda}(p_\varkappa)\, dp_\varkappa}{\sqrt{\psi_\varkappa(p_\varkappa)}} = t_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

zwischen den reellen Veränderlichen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ und $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Dabei wurde von den Functionen $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ vorausgesetzt, dass sie sich in der Form darstellen lassen:

$$\psi_\varkappa(p_\varkappa) = (p_\varkappa - a_\varkappa) \cdot (b_\varkappa - p_\varkappa) \cdot \chi_\varkappa(p_\varkappa),$$

wo $a_\varkappa$ und $b_\varkappa$ reelle Grössen sind, und $a_\varkappa$ kleiner als $b_\varkappa$ ist, und wo für den Bereich:

$$a_\varkappa \leqq p_\varkappa \leqq b_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n),$$

*) Ueber eine Gattung reell periodischer Functionen. Monatsberichte der Berliner Akademie, 1866, S. 97.

**) Ueber eine Gattung doppelt reell periodischer Functionen zweier Veränderlichen, Mathematische Annalen, Bd. 29, S. 468 (1887) und: Ueber bedingt periodische Functionen eines beschränkt veränderlichen complexen Argumentes und Anwendungen derselben auf die Mechanik, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 105, S. 298 (1888).

der im folgenden kurz mit $\mathfrak{B}$ bezeichnet werden möge, $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$ endliche positive Werthe haben. Wird dann noch weiter vorausgesetzt, dass in dem Bereiche $\mathfrak{B}$ die Determinante:

$$\left|\frac{\varphi_{\varkappa\lambda}(p_\varkappa)}{\sqrt{\psi_\varkappa(p_\varkappa)}}\right| = \frac{\Phi}{\sqrt{\psi_1 \cdot \psi_2 \cdots \psi_n}}$$

nicht identisch verschwindet, so definiren die Gleichungen:

$$\sum_\varkappa \int_{a_\varkappa}^{p_\varkappa} \frac{\varphi_{\varkappa\lambda}(p_\varkappa)\, dp_\varkappa}{\sqrt{(p_\varkappa - a_\varkappa)(b_\varkappa - p_\varkappa)} \cdot \sqrt{\chi_\varkappa(p_\varkappa)}} = t_\lambda,$$

in denen dem Zeichen $\sqrt{\chi_\varkappa(p_\varkappa)}$ der positive Werth beigelegt werde, während über das Vorzeichen von $\sqrt{(p_\varkappa - a_\varkappa)(b_\varkappa - p_\varkappa)}$ noch verfügt werden darf, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ für den Bereich $\mathfrak{B}$ als eindeutige, endliche, stetige Functionen von $t_1, t_2, \ldots, t_n$, wobei zu dem Werthsysteme $t_1 = 0$, $t_2 = 0, \ldots, t_n = 0$ das Werthsystem $p_1 = a_1$, $p_2 = a_2, \ldots, p_n = a_n$ gehört. Werden jetzt an Stelle der Veränderlichen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ neue Veränderliche $w_1, w_2, \ldots, w_n$ eingeführt durch:

$$p_\varkappa = \frac{a_\varkappa + b_\varkappa}{2} + \frac{a_\varkappa - b_\varkappa}{2} \cos w_\varkappa,$$

und wird festgesetzt, dass dem Werthsysteme $p_1 = a_1$, $p_2 = a_2, \ldots, p_n = a_n$ das Werthsystem $w_1 = 0$, $w_2 = 0, \ldots, w_n = 0$ entsprechen soll, so gehen die Integralgleichungen über in:

$$\sum_\varkappa \int_0^{w_\varkappa} h_{\varkappa\lambda}(w_\varkappa)\, dw_\varkappa = t_\lambda,$$

wo die Functionen $h_{\varkappa\lambda}(w_\varkappa)$ eindeutige, endliche, gerade Functionen der Periode 2π ihres Argumentes $w_\varkappa$ sind, welches als unbeschränkt veränderliche reelle Variable angesehen werden darf. Wird nun als letzte Voraussetzung hinzugenommen, dass die Functionen $\varphi_{\varkappa\lambda}(p_\varkappa)$ im Bereiche $\mathfrak{B}$ und damit auch die Functionen $h_{\varkappa\lambda}(w_\varkappa)$ für beliebige Werthe der $w_\varkappa$ ihr Zeichen nicht wechseln, so gilt folgender Satz:

Die Gleichungen:

$$\sum_\varkappa \int_{a_\varkappa}^{p_\varkappa} \frac{\varphi_{\varkappa\lambda}(p_\varkappa)\, dp_\varkappa}{\sqrt{(p_\varkappa - a_\varkappa)(b_\varkappa - p_\varkappa)} \cdot \sqrt{\chi_\varkappa(p_\varkappa)}} = t_\lambda \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

definiren $p_1, p_2, \ldots, p_n$ für den Bereich:

$$a_\varkappa \leqq p_\varkappa \leqq b_\varkappa \quad (\varkappa = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

als *eindeutige*, *endliche*, *stetige*, *gerade Functionen von*

$t_1, t_2, \ldots, t_n$, *welche n-fach periodisch* sind mit den Periodensystemen

$$2\omega_{\mu 1},\ 2\omega_{\mu 2},\ \ldots,\ 2\omega_{\mu n} \quad (\mu = 1, 2, 3, \ldots, n);$$

dabei werden die Perioden durch:

$$w_{\varkappa\lambda} = \int\limits_{a_\varkappa}^{b_\varkappa} \frac{\varphi_{\varkappa\lambda}(p_\varkappa)\, dp_\varkappa}{\sqrt{(p_\varkappa - a_\varkappa)(b_\varkappa - p_\varkappa)} \cdot \sqrt{\chi_\varkappa(p_\varkappa)}}$$

gegeben, wobei der Grösse $\sqrt{(p_\varkappa - a_\varkappa)(b_\varkappa - p_\varkappa)}$ das positive Vorzeichen zu ertheilen ist. Alle zu einem Werthsysteme $p_1, p_2, \ldots, p_n$ gehörigen Werthsysteme $t_1, t_2, \ldots, t_n$ sind dargestellt durch:

$$\pm t_\lambda^0 + \sum_\varkappa 2 m_\varkappa \omega_{\varkappa\lambda},$$

wobei $m_1, m_2, \ldots, m_n$ ganze Zahlen bedeuten; das Werthsystem $t_1^0, t_2^0, \ldots, t_n^0$ gehört dem Gebiete:

$$t_\lambda = \sum_\varkappa \tau_\varkappa \omega_{\varkappa\lambda} \quad (0 \leqq \tau_\varkappa \leqq 1,\quad \lambda = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

an und ist das einzige in diesem Gebiete, zu dem das Werthsystem $p_1, p_2, \ldots, p_n$ gehört.

Man überzeugt sich leicht, dass dieser Satz für $n = 2$ mit dem von Herrn Staude gefundenen übereinstimmt. Für diesen Fall hat Herr Staude die bedingt periodischen Functionen p_1 und p_2 von t_1 und t_2 durch zweifach unendliche trigonometrische Reihen dargestellt. Eine entsprechende Darstellung mittelst n-fach unendlicher trigonometrischer Reihen lässt sich in dem hier betrachteten allgemeinen Falle für $p_1, p_2, \ldots, p_n$ als Functionen von $t_1, t_2, \ldots, t_n$ finden, worauf jedoch hier nicht näher eingegangen werden soll.

Wie man die Ergebnisse der Untersuchung des soeben betrachteten allgemeineren Umkehrproblems auf die Discussion der früher gefundenen Integralgleichungen des dynamischen Problems anzuwenden hat, hatte ich in meiner Habilitationsschrift nur angedeutet; da aber gerade dieser Gesichtspunkt für die vorliegende Arbeit von wesentlicher Bedeutung ist, muss ich hier ausführlicher darauf eingehen.

Am Anfang der Bewegung zur Zeit $t = \bar{t}$ möge sich der bewegte Punkt an einer Stelle $(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_n)$ befinden. Die Richtung, in welcher er seine Bewegung beginnt, wird bestimmt durch die Anfangswerthe von $\frac{dp_1}{dt}, \frac{dp_2}{dt}, \ldots, \frac{dp_n}{dt}$, welche mit $\bar{p}_1', \bar{p}_2', \ldots, \bar{p}_n'$ bezeichnet werden sollen; auch die Werthe der Functionen $\varphi_{\varkappa\lambda}$ im Anfangspunkte der Bewegung sollen durch Ueberstreichen kenntlich gemacht werden.

Bei Festsetzung dieser Anfangsbedingungen der Bewegung erhalten die Integralgleichungen zunächst die Form:

$$\sum_\varkappa \int_{\bar{p}_\varkappa}^{p_\varkappa} \frac{\varphi_{\varkappa 1}\, dp_\varkappa}{\sqrt{2\varphi_{\varkappa 0} + \sum_\lambda 2\varphi_{\varkappa\lambda} \cdot \alpha_\lambda}} = \bar{t} - t,$$

$$\sum_\varkappa \int_{\bar{p}_\varkappa}^{p_\varkappa} \frac{\varphi_{\varkappa\mu}\, dp_\varkappa}{\sqrt{2\varphi_{\varkappa 0} + \sum_\lambda \varphi_{\varkappa\lambda} \cdot \alpha_\lambda}} = 0,$$

wobei noch die Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ auftreten. Zur Bestimmung dieser Constanten aus den Anfangsbedingungen erhält man aber durch Differentiation die n Gleichungen:

$$\sum_\varkappa \frac{\bar{\varphi}_{\varkappa\mu}\, \bar{p}_\varkappa'}{\sqrt{2\bar{\varphi}_{\varkappa 0} + \sum_\lambda 2\bar{\varphi}_{\varkappa\lambda} \cdot \alpha_\lambda}} = -\,\delta_{1,\mu}.$$

Man überzeugt sich leicht, dass vermöge dieser Gleichungen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ eindeutig durch die Anfangsbedingungen bestimmt sind.

Zur Abkürzung möge

$$2\varphi_{\varkappa 0} + \sum_\lambda 2\varphi_{\varkappa\lambda} \cdot \alpha_\lambda = \psi_\varkappa(p_\varkappa)$$

gesetzt werden. Es soll angenommen werden, dass die Functionen $\varphi_{\varkappa\mu}$ so beschaffen sind, dass die Anwendung der vorher entwickelten Sätze möglich ist, und dass das Werthsystem $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_n$ dem Bereiche $\mathfrak{B}$ angehört. Schreibt man dann die Integralgleichungen in der Form:

$$\sum_\varkappa \int_{a_\varkappa}^{p_\varkappa} \frac{\varphi_{\varkappa 1}\, dp_\varkappa}{\sqrt{\psi_\varkappa}} = \sum_\varkappa \int_{a_\varkappa}^{\bar{p}_\varkappa} \frac{\varphi_{\varkappa 1}\, dp_\varkappa}{\sqrt{\psi_\varkappa}} + \bar{t} - t,$$

$$\sum_\varkappa \int_{a_\varkappa}^{p_\varkappa} \frac{\varphi_{\varkappa\mu}\, dp_\varkappa}{\sqrt{\psi_\varkappa}} = \sum_\varkappa \int_{a_\varkappa}^{\bar{p}_\varkappa} \frac{\varphi_{\varkappa\mu}\, dp_\varkappa}{\sqrt{\psi_\varkappa}} \quad (\mu = 2, 3, \ldots n),$$

so ergeben sich $p_1, p_2, \ldots, p_n$ als Functionen der Zeit, wenn man in den vorher erhaltenen eindeutigen, endlichen, stetigen, geraden, n-fach periodischen Functionen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ von $t_1, t_2, \ldots, t_n$ beziehungsweise setzt:

$$t_1 = \sum_\varkappa \int_{a_\varkappa}^{\bar{p}_\varkappa} \frac{\varphi_{\varkappa 1}\, dp_\varkappa}{\sqrt{\psi_\varkappa}} + \bar{t} - t,$$

$$t_\mu = \sum_\varkappa \int_{a_\varkappa}^{\bar{p}_\varkappa} \frac{\varphi_{\varkappa\mu}\, dp_\varkappa}{\sqrt{\psi_\varkappa}}.$$

Es ist klar, dass diese Functionen der Zeit den Differentialgleichungen der Bewegung genügen, und dass gleichzeitig dabei die Anfangsbedingungen erfüllt sind.

Die Functionen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ von $t_1, t_2, \ldots, t_n$ bleiben unverändert, wenn ihre Argumente beziehungsweise um ein Periodensystem:

$$\sum_\varkappa 2 m_\varkappa \omega_{\varkappa\lambda} \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

vermehrt werden. Sollen nun $t_2, t_3, \ldots, t_n$ die eben angegebenen festen Werthe haben, so ist eine solche Hinzufügung nur statthaft, wenn für bestimmte Werthe der Zahlen $m_1, m_2, \ldots, m_n$ gerade

$$\sum_\varkappa 2 m_\varkappa\, \omega_{\varkappa\lambda} = 0 \quad (\lambda = 2, 3, \ldots, n)$$

ist. Nur, wenn es solche ganze Zahlen $m_1, m_2, \ldots, m_n$ giebt, sind $p_1, p_2, \ldots, p_n$ periodische Functionen der Zeit und zwar mit der Periode:

$$2\Omega = \sum_\varkappa 2 m_\varkappa\, \omega_{\varkappa 1}.$$

Solche Functionen der Zeit sind von Herrn Staude als bedingt periodische Functionen*) bezeichnet worden; sie treten bei ihm für den Fall $n = 2$ auf, in dem *eine* Bedingungsgleichung zwischen den Grössen $\omega_{\varkappa\lambda}$ bestehen muss, und Herr Staude spricht daher in diesem Falle von *einfach* bedingt periodischen Functionen. Bei analoger Bezeichnung würden die hier auftretenden Functionen als $(n-1)$-*fach* bedingt periodische zu charakterisiren sein.

Aus dem Vorhergehenden geht hervor, dass es bei den betrachteten dynamischen Problemen möglich ist, sobald die Anfangswerthe $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_n; \bar{p}_1', \bar{p}_2', \ldots, \bar{p}_n'$ gegeben sind, die n Bestimmungsstücke

*) In der Abhandlung: Ueber die Bewegung eines schweren Punktes auf einer Rotationsfläche, Acta mathematica, Bd. 11, S. 303 (1888) bemerkt Herr Staude, dass bereits Herr C. Neumann auf die bedingte Periodicität der hyperelliptischen Functionen zweier Variabeln, wenn beide Variable lineare Functionen einer dritten sind, aufmerksam gemacht hat (De problemate quodam mechanico quod ad primam integralium ultraellipticorum classem revocatur, Journal für Mathematik, Bd. 56, S. 46, 1859).

$p_1, p_2, \ldots, p_n$ als Functionen der Zeit darzustellen. Allein damit kann die Untersuchung dieser Probleme nicht als abgeschlossen gelten, es erhebt sich vielmehr jetzt die Frage nach dem Zusammenhange der verschiedenen Bewegungen, die verschiedenen Anfangsbedingungen entsprechen, und es ist also zu ermitteln, welche Modificationen der Verlauf der Bewegung erfährt, wenn die Anfangsbedingungen variirt werden. Diese Betrachtungsweise führt zu der wichtigen Erkenntniss, dass die Lösung des Umkehrproblems, wie sie im vorhergehenden auseinandergesetzt wurde, noch nicht ausreichend ist und einer wesentlichen Vervollständigung bedarf. Worum es sich handelt wird wohl am besten durch ein Beispiel klar. In den Abschnitten III—VI meiner Inaugural-Dissertation habe ich die Bewegung eines materiellen Punktes auf einer Rotationsfläche untersucht unter der Voraussetzung, dass eine Kräftefunction existirt, die in den Parallelkreisen constant ist.*) Hierbei ergab sich unter sehr allgemeinen Voraussetzungen über die Natur der Fläche und der Kräftefunction, dass der Typus des Bewegungsverlaufes die Oscillation des bewegten Punktes zwischen zwei festen Parallelkreisen ist, die man als Umkehrkreise oder auch als Wendekreise bezeichnen kann. Lässt man nun den materiellen Punkt von einem bestimmten Anfangspunkte aus seine Bewegung beginnen, variirt aber die Richtung und Grösse der Anfangsgeschwindigkeit, so zeigt sich, dass bei stetiger Aenderung der Anfangsgeschwindigkeit sich die Lage der Umkehrkreise im allgemeinen ebenfalls stetig ändert. Wenn jedoch die Anfangsgeschwindigkeit nach Richtung und Grösse gewisse von vornherein angebbare Werthe annimmt, so artet die Bewegung in asymptotische Annäherung an einen Parallelkreis aus, und sowie die Aenderung weiter getrieben wird, ändert sich die Lage des einen Umkehrkreises in *unstetiger* Weise, während sie bei den ferneren Variationen der Anfangsgeschwindigkeit zunächst wieder stetige Aenderungen erfährt. Die Aufklärung dieser und ähnlicher sonderbarer Erscheinungen hat Herr Staude**) gegeben. Ebenso nämlich wie eine Curve, wenn eine in ihrer Gleichung vorkommende Constante variirt

---

*) Dies Problem ist von Jacobi: De motu puncti singularis, Crelle's Journal, Bd. 24, S. 1, (1842) auf Quadraturen zurückgeführt worden; es ist merkwürdig, dass dasselbe Problem sich bereits bei Newton findet (Principia philosophiae naturalis mathematica, Lib. 1, Sect. 10 (1686)); es dürfte hier zum ersten Male die Bewegung eines Punktes auf einer Fläche behandelt worden sein.

**) Ueber verzweigte Bewegungen, Sitzungsberichte der Dorpater Naturforscher-Gesellschaft, Dez. 1887, und: Ueber die Bewegung eines schweren Punktes auf einer Rotationsfläche, Acta mathematica, Bd. 11 (1888); ich möchte noch ausdrücklich hervorheben, dass Herr Staude bei ähnlichen Untersuchungen, wie sie in meiner Dissertation (1885) behandelt sind, jedoch ohne diese zu kennen, zur Aufstellung des Begriffs der verzweigten Bewegung gelangt ist.

wird, die Verschmelzung zweier Zweige erfahren kann, wobei im Augenblicke des Ueberganges eine Singularität entsteht, so muss man auch eine Bewegung unter Umständen als *„verzweigt"* ansehen, und es können, bei Variation der Anfangsbedingungen, zwei Zweige der Bewegung miteinander verschmelzen. Es „schiebt sich dann zwischen die getheilte und ungetheilte Form der Bewegung eine singuläre Bewegungsform ein," z. B. die asymptotische Annäherung an einen Parallelkreis. „Auf diese Weise wird die im kritischen Parallelkreis mögliche Verzweigung der Bahncurve umgangen, denn nach Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik, I. Vorl. § 2, sind die Coordinaten x, y, z des bewegten Punktes für die Dauer der Bewegung einwerthige Functionen der Zeit."

Dass die oben gegebene Lösung des allgemeinen Umkehrproblems *nur einen Zweig des Gebildes* $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ *liefert*, habe ich schon in meiner Habilitationsschrift hervorgehoben. Sobald man aber die Nullstellen der Function $\psi_\varkappa(p_\varkappa)$ kennt, und sobald in den Gebieten $\mathfrak{B}$, welche durch solche Nullstellen in der oben angegebenen Weise definirt werden, die früheren Voraussetzungen erfüllt sind, ist es möglich durch dasselbe Verfahren auch die anderen Zweige des Gebildes zu erhalten. Geht man dann zu dem betrachteten dynamischen Problem über, so ist:

$$\psi_\varkappa(p_\varkappa) = 2\varphi_{\varkappa 0} + \sum_\lambda 2\varphi_{\varkappa\lambda}\cdot\alpha_\lambda,$$

wo die willkürlichen Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ in der früher angegebenen Weise von den Anfangswerthen der Grössen $p_1, p_2, \ldots, p_n$; $\frac{dp_1}{dt}, \frac{dp_2}{dt}, \ldots, \frac{dp_n}{dt}$ abhängen. Untersucht man also, welche Aenderungen der Verlauf der Bewegung erfährt, wenn man bei festgehaltenem Anfangspunkt die Anfangsgeschwindigkeit ändert, das heisst, wenn die Grössen $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_n$ als constant, die Grössen $\bar{p}_1', \bar{p}_2', \ldots, \bar{p}_n'$ als variabel angesehen werden, so kommt alles darauf an, wie sich die Wurzeln der Gleichungen $\psi_\varkappa(p_\varkappa) = 0$ ändern. Die Grössen $a_\varkappa$ und $b_\varkappa$ werden sich beide bei stetiger Aenderung von $\bar{p}_1', \ldots, \bar{p}_n'$ im Allgemeinen auch stetig ändern, und es wird die Bewegung ihren ursprünglichen Charakter beibehalten, bis eine dieser Wurzeln mit einer der anderen Wurzeln, wenn solche vorhanden sind, verschmilzt. In diesem Augenblicke erhält die betreffende Gleichung $\psi_\varkappa(p_\varkappa) = 0$ eine Doppelwurzel, und dies wird im Allgemeinen bewirken, dass zu dem betreffenden Werthsystem $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ein unendlich grosser Werth von t gehört, das heisst, dass der bewegte Punkt sich dieser Stelle asymptotisch nähert.

Diese Betrachtungen werden genügen, um bei der Untersuchung des speciellen Problems, welches im nächsten Abschnitte behandelt

werden soll, den einzuschlagenden Gedankengang anzugeben, wobei sich gleichzeitig eine Verification der allgemeinen Sätze ergeben wird.

III.

Ueber eine Classe von Bewegungen eines Punktes in einer n-fachen Mannigfaltigkeit, welche der Jacobi'schen Bewegung auf einer Rotationsfläche entspricht.

Es handelt sich jetzt darum Fälle zu finden, in denen die Differentialgleichungen der Bewegung des dynamischen Problems, welches den Gegenstand des ersten Abschnittes bildete, integrirt werden können. Um dafür die Ergebnisse des vorhergehenden Abschnittes anzuwenden, erinnere man sich, dass damals:

$$ds^2 = dq_1^2 + \sum_{h,k} b_{hk}\, dq_h\, dq_k$$

und die Kräftefunction Π eine Function von q_1 allein war. Man wird daher zunächst voraussetzen müssen, dass die Summe in ds^2 auf die einfachere Form:

$$\sum_h b_h\, dq_h^2$$

gebracht werden kann, und dann wird zu untersuchen sein, wann es möglich ist ein System von $n(n+1)$ Functionen:

$$\varphi_{\varkappa\mu}(q_\varkappa) \qquad \begin{pmatrix} \varkappa = 1, 2, \quad \ldots, n \\ \mu = 0, 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$$

zu finden, sodass, wenn:

$$\underset{(\varkappa,\lambda = 1, 2, \cdots, n)}{|\Phi_{\varkappa\lambda}|} = \Phi = \sum_\varkappa \varphi_{\varkappa 1}(q_\varkappa) \cdot \Phi_\varkappa,$$

$$\Phi' = \sum_\varkappa \varphi_{\varkappa 0}(q_\varkappa) \cdot \Phi_\varkappa$$

gesetzt wird, die Gleichungen gelten:

$$\Pi(q_1) = \frac{\Phi'}{\Phi}, \quad 1 = \frac{\Phi}{\Phi_1}, \quad b_2 = \frac{\Phi}{\Phi_2}, \cdots, b_n = \frac{\Phi}{\Phi_n}.$$

Bringt man aber die ersten beiden Relationen auf die Form:

$$\big(\varphi_{10} - \Pi(q_1)\big)\,\Phi_1 + \sum_h \varphi_{h0}\,\Phi_h = 0,$$

$$(\varphi_{11} - 1)\,\Phi_1 + \sum_h \varphi_{h1}\,\Phi_h = 0,$$

so erkennt man leicht, dass sie identisch erfüllt sind durch:

$$\varphi_{10} = \Pi(q_1), \quad \varphi_{20} = 0, \ldots, \varphi_{n0} = 0,$$

$$\varphi_{11} = 1, \qquad \varphi_{21} = 0, \ldots, \varphi_{n1} = 0,$$

während die übrig bleibenden $n(n-1)$ Functionen:

$$\varphi_{\varkappa h}(q_\varkappa) \qquad \begin{pmatrix} \varkappa = 1, 2, \ldots, n \\ h = 2, 3, \ldots, n \end{pmatrix}$$

ganz willkürlich bleiben bis auf die Beschränkung, dass $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ nicht identisch verschwinden dürfen. Ist dies der Fall, so gehört zu der quadratischen Differentialform:

$$ds^2 = \Phi_1 \sum_\varkappa \frac{dq_\varkappa^2}{\Phi_1}$$

und der Kräftefunction $\Pi = \Pi(q_1)$ die Hamilton-Jacobi'sche Differentialgleichung:

$$\frac{1}{2}\sum_\varkappa \frac{\Phi_\varkappa}{\Phi_1}\left(\frac{\partial W}{\partial q_\varkappa}\right)^2 - \left(\Pi(q_1) + \alpha_1\right) = 0,$$

welche sich durch Separation der Variabeln integriren lässt. Für das zugehörige dynamische Problem lauten daher die Integralgleichungen der Differentialgleichungen der Bewegung:

$$\int \frac{dq_1}{\sqrt{2\Pi(q_1) + \sum_\lambda 2\varphi_{1\lambda} \cdot \alpha_\lambda}} = \tau - t$$

$$\int \frac{\varphi_{1\mu}\, dq_1}{\sqrt{2\Pi(q_1) + \sum_\lambda 2\varphi_{1\lambda} \cdot \alpha_\lambda}} + \sum_h \int \frac{\varphi_{h\mu}\, dq_h}{\sqrt{2\sum_\lambda \varphi_{h\lambda} \cdot \alpha_\lambda}} = \beta_\mu$$

$$(\mu = 2, 3, \cdots, n).$$

Jetzt möge $n = 2$ gesetzt werden; dann wird:

$$ds^2 = dq_1^2 + b_2 dq_2^2;$$

es handelt sich also um die Bewegung eines Punktes auf einer Fläche, wenn die Linien $\Pi =$ const. oder die Niveaulinien geodätische Linien der Fläche sind. Soll für dieses Problem Separation der Variabeln eintreten, so muss:

$$\varphi_{10} = \Pi(q_1), \quad \varphi_{20} = 0; \quad \varphi_{11} = 1, \quad \varphi_{21} = 0$$

sein, während φ_{12} eine beliebige Function von q_1, φ_{22} eine beliebige Function von q_2 ist. Es wird jetzt $\Phi_1 = \varphi_{22}$, $\Phi_2 = \varphi_{12}$, und daher muss $b_2 = \frac{\varphi_{22}}{\varphi_{12}}$ sein. Dann aber kann man durch Einführung einer Function von q_2 an Stelle von q_2 stets bewirken, dass von vorn herein:

$$ds^2 = dq_1^2 + \frac{dq_2^2}{\varphi_{12}(q_1)}$$

wird, sodass ein Problem entsteht, welches man als das Problem der Bewegung eines Punktes auf einer Rotationsfläche, wenn die Kräfte-

function in den Parallelkreisen constant ist, interpretiren kann. Das Problem in n Veränderlichen lässt sich daher als die Verallgemeinerung des oben erwähnten Jacobi'schen Problems für zweifache Mannigfaltigkeiten bezeichnen; gleichzeitig ergiebt sich eine bemerkenswerthe Verallgemeinerung derjenigen Flächen, welche auf Rotationsflächen abwickelbar sind, denn ihnen entsprechen hiernach im Gebiete von n Veränderlichen die Mannigfaltigkeiten, für welche das Quadrat des Linienelementes auf die Form:

$$ds^2 = \Phi_1 \cdot \sum_{\varkappa} \frac{dq_\varkappa^2}{\Phi_\varkappa}$$

gebracht werden kann.

Die Integralgleichungen, auf welche die betrachtete Verallgemeinerung des Jacobi'schen Problems führt, sind deshalb von besonderer Einfachheit, weil bei ihnen die Abhängigkeit der Variabeln q_1 von der Zeit durch die Gleichung:

$$\int \frac{dq_1}{\sqrt{2\Pi(q_1) + \sum\limits_{\lambda} 2\varphi_{1\lambda} \cdot \alpha_\lambda}} = \tau - t$$

vermittelt wird, welche unabhängig von den übrigen Integralgleichungen untersucht werden kann und genau das Umkehrproblem für $n = 1$ ist, welches oben S. 549 erwähnt wurde. In den dort angeführten Abhandlungen sind Methoden entwickelt worden, mit deren Hilfe man sich die einzelnen Zweige der Umkehrungsfunction $q_1(t)$ herstellen kann, und es ist daher nur noch zu ermitteln, welche Modificationen diese Umkehrungsfunction bei Aenderung der Anfangsbedingungen erleidet.

Denkt man sich, dass der bewegte Punkt stets von einem bestimmten Anfangspunkte $(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \ldots, \bar{q}_n)$ seine Bewegung beginnt, dass aber die Anfangsgeschwindigkeit nach Richtung und Grösse geändert wird, also die Grössen $\bar{q}_1' \ldots, \bar{q}_n'$ als variabel angesehen werden, so wird jeder Zweig der Umkehrungsfunction, den man jetzt erhält, zu Bewegungen des Punktes gehören, die zwischen zwei Umkehrfeldern verlaufen, für welche die zugehörigen Werthe von q_1 etwa mit Q_ϱ und R_ϱ $(\varrho = 1, 2, 3 \ldots, r)$ bezeichnet werden mögen; diese Grössen will ich ihrer mechanischen Bedeutung wegen kurz ersten bez. zweiten *Umkehrwerth* nennen. Die Zahl r der Zweige von $q_1(t)$ hängt ab von der Anzahl der reellen Wurzeln der Gleichung:

$$P(q_1) = \Pi(q_1) + \sum_{\lambda} \varphi_{1\lambda}(q_1) \cdot \alpha_\lambda = 0,$$

in welcher die Grössen $\alpha_1 \ldots, \alpha_n$ als Functionen von $\bar{q}_1' \ldots, \bar{q}_n'$ anzusehen sind. Man überzeugt sich leicht, dass $\alpha_1 \ldots, \alpha_n$ lineare

Functionen von $\bar{q}_1'^2 \ldots, \bar{q}_n'^2$ sind, und darf daher die Gleichung $P = 0$ in der Form schreiben:

$$P(q_1) = P_0(q_1) + \sum_\lambda \bar{q}_\lambda'^2 \cdot P_\lambda(q_1) = 0,$$

wodurch die Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen in Evidenz gesetzt wird.

Um zu ermitteln, wie sich bei stetiger Aenderung von $\bar{q}_1' \ldots, \bar{q}_n'$ die Umkehrungsfunction $q_1(t)$ ändert, bediene ich mich einer Untersuchungsmethode, die auch bei anderen Betrachtungen von Nutzen sein dürfte. Die Variabeln $\bar{q}_1' \ldots, \bar{q}_n'$ sollen als Coordinaten eines Punktes in einer *ebenen n-fachen Mannigfaltigkeit* $\mathfrak{M}_n$ aufgefasst werden; es genügt hier diesen Grössen positive Werthe beizulegen, da nur ihre Quadrate in Betracht kommen werden. Betrachtet man q_1 in der Gleichung $P = 0$ als Parameter, so stellt sie eine Schar von ∞^1 $(n-1)$-fachen Mannigfaltigkeiten dar. Für $n = 2$ sind diese Felder Kegelschnitte in der Ebene, für $n = 3$ Flächen zweiter Ordnung im Raume, allgemein können sie *Felder zweiter Ordnung* genannt werden. Es genügt dem Parameter q_1 nur die Werthe beizulegen, welche für die Bewegung in Betracht kommen. Es sind hier die im ersten Abschnitte angestellten Betrachtungen von Wichtigkeit, denn sie zeigen, dass vermöge der Pole und der Niveaufelder $\Pi = -\infty$ der Bewegung von vorn herein gewisse unübersteigliche Grenzen gezogen sind. Es lässt sich daher ein Theil der gegebenen Mannigfaltigkeit abgrenzen, innerhalb dessen der ganze Bewegungsverlauf sich abspielen muss, ein Theil, den ich als *Bewegungsgebiet* bezeichnen werde. Bei Einführung dieser Bezeichnungsweise kann man kurz sagen, dass nur die Felder $P = 0$ für das folgende zu berücksichtigen sind, deren Parameter q_1 zu einer Stelle des Bewegungsgebietes gehört.

Durch jeden Punkt von $\mathfrak{M}_n$ wird eine gewisse Anzahl dieser Felder $P = 0$ gehen, die sich in einfache Beziehung zu der Anzahl r der Zweige bringen lässt, welche die Umkehrungsfunction $q_1(t)$ besitzt, wenn die Anfangswerthe von $\frac{dq_1}{dt}, \ldots, \frac{dq_n}{dt}$ gerade die Werthe $\bar{q}_1', \ldots, \bar{q}_n'$ der Coordinaten des betrachteten Punktes von $\mathfrak{M}_n$ haben. Wenn zunächst P für keinen reellen Werth von q_1 verschwindet, so besitzt $q_1(t)$ nur einen Zweig, und es ist $r = 1$. Hat aber $P = 0$ reelle Wurzeln, so ist es nöthig noch den Werth $q_1 = \pm\infty$ zu betrachten und ihn den Wurzeln hinzuzufügen, falls P hier das Zeichen wechseln sollte; dies gilt übrigens, wie ich hervorheben möchte, nur dann, wenn der Werth $q_1 = \pm\infty$ zu einem Punkte des Bewegungsgebietes gehört. Die Zahl der Wurzeln $P = 0$, in diesem Sinne genommen, ist, solange mehrfache Wurzeln ausgeschlossen werden, stets gerade; man darf jetzt sagen, dass die Anzahl r der Zweige gleich der halben Anzahl

der reellen Wurzeln von $P = 0$ ist, wenn man noch hinzufügt, dass ein Zweig dieser Function eventuell vom Endlichen über Unendlich ins Endliche zurückkehren darf.

Jedem Punkte von $\mathfrak{M}_n$ ist auf diese Weise eine ganze positive Zahl r zugeordnet, und die Punkte, zu denen dasselbe r gehört, bilden zusammenhängende *Gebiete*, die durch gewisse *Grenzgebilde* getrennt sind. Dabei sind die Stellen, für welche $r = 1$ ist, noch danach zu unterscheiden, ob $P = 0$ keine, oder zwei reelle Wurzeln hat und die Grenze zwischen diesen beiden Gebieten ist den Grenzgebilden zuzurechnen; bei der folgenden Darstellung ist der Einfachheit halber davon abgesehen worden, diese besonderen Grenzgebilde immer besonders zu berücksichtigen; man wird aber leicht erkennen, wie die folgenden Sätze zu modificiren sind, damit sie ganz allgemein gelten.

Eine Aenderung in der Anzahl der Zweige kann nur eintreten, indem entweder zwei bisher getrennte Zweige mit einander verschmelzen, oder indem ein Zweig sich in zwei neue spaltet. Das eine erfordert das Zusammenfallen zweier reellen Wurzeln, das andere das Auftreten einer neuen Wurzel, also das Zusammenfallen von zwei complexen Wurzeln. In beiden Fällen muss also die Gleichung:

$$\frac{\partial P}{\partial q_1} = 0$$

erfüllt sein. Man erhält daher die Grenzgebilde, indem man die *Enveloppe der Felder* $P = 0$ bildet; diese Enveloppe kann übrigens auch zum Theil nicht zu den Grenzgebilden gehören, was wohl keiner Erläuterung bedarf.

Hat man mit Hilfe der Enveloppe der Felder $P = 0$ $\mathfrak{M}_n$ in die oben definirten Gebiete getheilt, so ist leicht anzugeben, wie die Umkehrungsfunction $q_1(t)$ sich ändert, wenn die Anfangsbedingungen $\bar{q}_1', \ldots, \bar{q}_n'$ stetig variirt werden, wenn also der repräsentirende Punkt in $\mathfrak{M}_n$ eine stetige Curve beschreibt. Geht man aus von einem Punkte A, zu dem die Zahl r und also r Paare von Umkehrwerthen gehören, so werden beim Durchlaufen der Curve diese Umkehrwerthe zunächst sich stetig ändern. Ihr Abnehmen oder Wachsen kann nur dann in Wachsen oder Abnehmen übergehen, wenn die Curve eins der Felder $P = 0$ berührt. Erreicht die Curve einen Theil der Enveloppe, der zu den Grenzgebilden gehört, so geht die Bewegung des Punktes in asymptotische Annäherung an das Niveaufeld über, in welchem q_1 den Parameterwerth des betreffenden Feldes hat; denn das Eintreten einer Doppelwurzel von $P = 0$ bewirkt, dass t unendlich gross wird, es sei denn, dass, während der ganzen Bewegung $dq_1 = 0$ ist, das heisst, dass die Bewegung gerade in diesem Niveaufelde vor sich geht, eine Möglichkeit, auf die sogleich zurückzukommen sein wird. Beim Durchgang durch die Enveloppe erfährt die Zahl r eine Aenderung; diese

wird dadurch hervorgebracht, dass jetzt einer der Umkehrwerthe sich unstetig ändert, nämlich plötzlich wächst, wenn zwei Zweige verschmelzen, plötzlich abnimmt, wenn ein neuer Zweig auftritt. Es ist klar, wie diese Betrachtung beim weiteren Durchlaufen der Curve fortzusetzen ist.

Zu der Enveloppe der Felder $P = 0$ gelangt man auch durch die Frage, *wann der bewegte Punkt während einer ganzen Bewegung auf dem Niveaufelde* $q_1 = \bar{q}_1$ *verbleiben kann.* Soll dies stattfinden, so muss die Anfangsgeschwindigkeit, ihrer Richtung nach, in diesem Niveaufelde liegen, also $\bar{q}_1' = 0$ sein. Dies genügt jedoch noch nicht, es muss ausserdem die Kraft, die zur Zeit $t = \bar{t}$ auf den Punkt wirkt, ihre Richtung senkrecht zur orthogonalen Trajectorie haben, also auch $d\frac{dq_1}{dt}$ für $t = \bar{t}$ verschwinden. Dies liefert aber die Bedingung:

$$\frac{\partial P}{\partial q_1} = 0,$$

welche oben für die Enveloppe auftrat. Die repräsentirenden Punkte von $\mathfrak{M}_n$, welche gleichzeitig in dem Felde $\bar{q}_1' = 0$ und in der Enveloppe liegen, liefern also, nach Richtung und Grösse, die Anfangsgeschwindigkeiten, bei denen Bewegung im Niveaufelde $q_1 = \bar{q}_1$ stattfinden kann. Da in jedem Niveaufelde die Kräftefunction constant ist, so beschreibt der Punkt in ihm eine geodätische Linie, und zwar mit constanter Geschwindigkeit.

Es bleibt übrig die Variabeln $q_2, q_3, \ldots, q_n$ in den Kreis der Betrachtung zu ziehen. Zunächst kann man alle n Integralgleichungen als *ein* Umkehrproblem auffassen und wird dann bei Anwendung der Resultate des zweiten Abschnittes $q_1, q_2, \ldots, q_n$ als $(n-1)$-fach bedingt periodische Functionen der Zeit erhalten. In diesem besonderen Falle wird:

$$\omega_{11} = \omega_{11}, \quad \omega_{21} = 0, \ldots \omega_{n1} = 0.$$

Ist die Bewegung periodisch, so ist also ihre Periode:

$$2\Omega = 2\omega_{11} = 2\cdot\int_{a_1}^{b_1} \frac{dq_1}{\sqrt{2\Pi(q_1) + \sum_\lambda \varphi_{1\lambda}\cdot\alpha_\lambda}}\,.$$

gleich der Periode des betreffenden Zweiges der Umkehrfunction $q_1(t)$.

In diesem Falle besitzt die Bahncurve gewisse Eigenschaften der Symmetrie, welche ich für $n = 2$ in meiner Inauguraldissertation hergeleitet habe, und deren allgemeine Gültigkeit in derselben Weise, wie es dort geschehen ist, dargethan werden kann.

Sieht man aber, auf Grund der vorhergehenden Betrachtungen, q_1 als bekannte Function der Zeit an, so erfordert die Ermittelung

von $q_2, q_3, \ldots, q_n$ nur die Lösung des Umkehrproblems in $n - 1$ Variabeln:

$$\sum_h \frac{\varphi_{h\mu}(q_h)\, dq_h}{\sqrt{\sum_\lambda 2\varphi_{h\lambda}(q_h)\cdot \alpha_\lambda}} = dt_\mu \qquad (\mu = 2, 3, \ldots n).$$

Will man zur Lösung dieses Umkehrproblems die Sätze des zweiten Abschnittes verwerthen, so dürfen die Functionen $\varphi_{h\mu}$ in dem Bereiche $\mathfrak{B}$ ihr Vorzeichen nicht wechseln. Da dieser Bereich $\mathfrak{B}$ aber von der Wahl der Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ abhängt, so muss diese Voraussetzung für alle Werthsysteme $q_2, q_3, \ldots, q_n$ erfüllt sein, welche innerhalb des *Bewegungsgebietes* vorkommen. Ferner darf für dieselben Werthsysteme $q_2, q_3, \ldots, q_n$ eine gewisse Determinante nicht verschwinden. Sind aber die Functionen

$$\varphi_{h\lambda}(q_n) \qquad (h, \lambda = 2, 3, \ldots, n)$$

so beschaffen, dass sie für alle Werthsysteme $q_2, q_3, \ldots, q_n$ des Bewegungsgebietes bestimmte endliche Werthe haben und ihr Vorzeichen nicht wechseln, so ist die Forderung für jene Determinante von selbst erfüllt. Diesen bemerkenswerthen Satz erkennt man sofort, wenn man die Determinante wirklich bildet. Man findet dann, dass Φ_1 im Bewegungsgebiete nicht verschwinden darf. Nun war:

$$ds^2 = dq_1^2 + \Phi_1 \sum_h \frac{dq_h^2}{\Phi_h},$$

daher kann die Gleichung $\Phi_1 = 0$ nur erfüllt sein, wenn ein Niveaufeld sich auf einen Punkt reducirt, also in den Polen der Mannigfaltigkeit. Man gelangt so auf einem neuen Wege zur Einführung der *Pole* und erkennt, dass beim Ueberschreiten eines Poles im allgemeinen die Eindeutigkeit von $q_1, q_2, \ldots, q_n$ als Functionen der Zeit aufhören würde, weil diese Punkte *Verzweigungsstellen* des Umkehrproblems sind. Nur wenn während der ganzen Dauer der Bewegung $dq_2, dq_3, \ldots, dq_n$ beständig gleich Null sind, wird das Verschwinden der Determinante Φ_1 irrelevant. Das Passiren eines Poles ist also nur statthaft, wenn sich der Punkt in einer Trajectorie bewegt, womit ein Satz des ersten Abschnittes, welcher sich auf die Pole bezog, auf ganz anderem Wege wieder erhalten worden ist.

Halle a./S. Januar 1893.

Zur gruppentheoretischen Grundlegung der automorphen Functionen.

Von

ROBERT FRICKE in Göttingen.

In den nachfolgenden Zeilen erlaube ich mir, den Lesern der Annalen ein allgemeines gruppentheoretisches Princip vorzulegen, das, wie ich hoffe, für den weiteren Ausbau der Theorie der automorphen Functionen von Vortheil sein soll. Es handelt sich um die allgemeine Formulirung einer gewissen Classe von eigentlich discontinuirlichen Substitutionsgruppen einer Veränderlichen η, von denen ich Specialfälle in den letzten Bänden der Annalen wiederholt betrachtet habe*). Das Charakteristische dieses Ansatzes ist, dass die Coefficienten der linearen η-Substitutionen ganze algebraische Zahlen eines gewissen endlichen Zahlenkörpers sind, wobei wegen der Auswahl dieser ganzzahligen Coefficienten eine Reihe sehr einfacher Vorschriften festzusetzen ist, von denen sogleich im ersten der folgenden Paragraphen die Rede sein soll. Je nachdem der zu Grunde liegende Zahlkörper reell oder imaginär ist, hat man mit einer sogenannten Hauptkreisgruppe oder mit einer Polyedergruppe zu thun, wenn anders eigentliche Discontinuität der Gruppe vorliegt. Als Polyedergruppen bezeichne ich hierbei jene Classe von Gruppen, deren Theorie Herr Poincaré in Bd. 3 der Acta mathematica pag. 49ff. begründet hat, und über welche Hr. Bianchi neuerdings mehrere interessante Abhandlungen in den Annalen veröffentlichte**).

Es sei endlich noch erlaubt, eine kurze Notiz zu erwähnen, die in Nr. 13 der Göttinger Nachrichten vom laufenden Jahre Aufnahme fand, und in welcher ich einige Hauptresultate der vorliegenden Abhandlung vorläufig mittheilte. Der damals skizzirte Beweisgang enthält, wie ich später bemerkt habe, eine Lücke (l. c. pag. 456); indessen berührt dieselbe in keiner Weise die aufgestellten Resultate und hat sich leicht ergänzen lassen. —

---

*) Band 38, pag. 50 und 461, Band 39 pag. 62, Band 41 pag 443.

**) Band 38, pag. 313 und Band 40 p. 332.

§ 1.

Definition der zu untersuchenden Gruppen.

Es sei ein Zahlkörper n^{ten} Grades K_n vorgelegt, den wir bis auf weiteres als *reell* voraussetzen. Aus diesem Körper wählen wir die beiden *positiven ganzen* Zahlen P und Q von vornherein fest aus und nehmen um des Folgenden willen sogleich an, *dass weder P noch PQ innerhalb K_n rein quadratisch ist.* Indem wir dem Körper K_n die beiden Quadratwurzeln $\sqrt{P}$, $\sqrt{Q}$ adjungiren und im übrigen unter A, B, C, D ganze Zahlen von K_n verstehen, bilden wir die Substitution der Veränderlichen η:

$$(1) \qquad U(\eta) = \frac{(A+B\sqrt{P})\eta + (C\sqrt{Q}+D\sqrt{PQ})}{(-C\sqrt{Q}+D\sqrt{PQ})\eta + (A-B\sqrt{P})},$$

die wir sogleich als *unimodulare* Substitution, d. i. als solche der Determinante 1 fixirt denken:

$$(2) \qquad A^2 - PB^2 + QC^2 - PQD^2 = 1.$$

Bei einmal gewählten K_n, P, Q ist die Substitution U durch das Zahlquadrupel A, B, C, D offenbar eindeutig bestimmt und kann kurz durch das Symbol (A, B, C, D) bezeichnet werden. Ein gleichzeitiger Zeichenwechsel von A, B, C, D kann natürlich die Substitution U nicht ändern.

Man combinire nunmehr zwei Substitutionen unserer Art:

$$U = (A, B, C, D), \qquad U' = (A', B', C', D').$$

Die entspringende Substitution $U'' = UU'$ weist zufolge leichter Rechnung wieder die Gestalt (1) auf; schreibt man in diesem Sinne:

$$UU' = U'' = (A'', B'', C'', D''),$$

so ergiebt sich ohne weiteres:

$$(3) \qquad \begin{cases} A'' = AA' + PBB' - QCC' + PQDD', \\ B'' = AB' + BA' + QCD' - QDC', \\ C'' = AC' + PBD' + CA' - PDB', \\ D'' = AD' + BC' - CB' + DA'. \end{cases}$$

Die A'', B'', ... sind also wieder ganze Zahlen des Körpers K_n, und U'' hat selbstverständlich die Determinante 1; es folgt: *Die Substitutionen U bilden in ihrer Gesammtheit eine Gruppe.*

Die Gruppe der Substitutionen U wird durch die einzelne Operation $T(\eta) = \frac{-1}{\eta}$ in sich selbst transformirt. Man fasse daraufhin die Substitutionen UT unter der besonderen Benennung V zusammen und findet explicite:

$$(4) \qquad V(\eta) = \frac{(C\sqrt{Q} + D\sqrt{PQ})\,\eta + (A + B\sqrt{P})}{(-A + B\sqrt{P})\,\eta + (C\sqrt{Q} - D\sqrt{PQ})},$$

zu bilden für alle Auflösungen der quaternären Gleichung (2) in ganzen Zahlen A, B, C, D des Körpers K_n. Ist Q das Quadrat einer dem Körper K_n angehörenden ganzen Zahl der Norm ± 1, so sind die Substitutionen V mit den U identisch, da alsdann die zur Transformation angewandte Substitution T bereits in der Gruppe der U enthalten ist. Man hat also den Satz: *Die Gesammtheit der Substitutionen U und V bildet eine Gruppe, etwa $\Gamma(K_n;\, P, Q)$ oder $\Gamma(P, Q)$ genannt, die im genannten Specialfall mit der Gruppe der U identisch ist, für alle übrigen Fälle aber die Gruppe der U als ausgezeichnete Untergruppe des Index zwei in sich enthält.*

Zufolge einer oben gemachten Annahme haben wir hier nur mit reellen Substitutionscoefficienten zu thun. Daraufhin beweist man leicht, dass unsere Gruppe Γ durch Zusatz der Spiegelung an der imaginären η-Axe, $\eta' = -\bar{\eta}$, in bekannter Weise der Erweiterung fähig ist. Die solchergestalt entspringende erweiterte Gruppe heisse $\bar{\Gamma}(P, Q)$ oder kurz $\bar{\Gamma}$, und ihre Operationen zweiter Art mögen durch $\bar{U}$ und $\bar{V}$ bezeichnet sein.

Es ist nun vor allem die Frage, welche Bedingungen für K_n, P und Q vorzuschreiben sind, damit die Gruppe $\Gamma(P, Q)$ eigentlich discontinuirlich ist, d. h. damit sie in der η-Halbebene einen endlichen Discontinuitätsbereich aufweist. Um hierüber zu entscheiden, sind vorab einige Erörterungen über Einheiten in Zahlkörpern höheren Grades einzuschalten. —

§ 2.

Hilfssätze aus der Theorie der Einheiten.

Jede ganze Zahl eines endlichen Körpers, deren Norm gleich $+1$ ist, wird als eine *Einheit* dieses Körpers bezeichnet. Der Zusammenhang unter den verschiedenen Einheiten des einzelnen Körpers wird durch ein grosses, von Dirichlet*) entdecktes Theorem beherrscht über die Anzahl „unabhängiger Einheiten" eines endlichen Körpers; betreffs des Inhalts sowie der Ableitung dieses Theorems ist auf die eben genannten Darstellungen zu verweisen.

Um die Anwendung des Dirichlet'schen Satzes auf den anfänglich vorgelegten Zahlenkörper K_n durchzuführen, benennen wir die n mit K_n conjugirten Körper durch:

---

*) Man vergl. die Monatsberichte der Berliner Akademie von 1846 oder auch die Darstellung Dedekind's in Dirichlet's Vorlesungen über Zahlentheorie, pag. 555ff. der 3ten Aufl.

(1) $$K_n,\ K_n^{(1)},\ K_n^{(2)},\ldots,K_n^{(n-1)}$$

und nehmen an, dass unter denselben insgesammt λ Körper reell sind. Da K_n selbst reell sein soll, so ist:

(2) $$1 \leqq \lambda \leqq n,$$

und die Differenz $n - \lambda$ muss eine gerade Zahl 2μ sein, indem ja die übrigen $n - \lambda = 2\mu$ Körper (1) paarweise conjugirt imaginär ausfallen. Hierbei ist übrigens keineswegs vorausgesetzt, dass die Körper (1) sämmtlich von einander verschieden sind.

Setzt man nunmehr:

(3) $$\nu = \lambda + \mu - 1 = \frac{n+\lambda-2}{2},$$

so giebt es nach dem Dirichlet'schen Satze genau ν (und nicht mehr) von einander unabhängige Einheiten $E_1, E_2, \ldots, E_\nu$ im Körper K_n. Dieselben heissen aber in dem Sinne von einander unabhängig, dass eine Gleichung von der Gestalt:

$$E_1^{a_1}\cdot E_2^{a_2}\cdots E_\nu^{a_\nu} = 1$$

vermöge ganzer rationaler, nicht durchgängig verschwindender Zahlen a in keiner Weise befriedigt sein kann.

In dem nach Willkür aufgegriffenen System unabhängiger Einheiten $E_1,\ldots,E_\nu$ lässt sich *jede* Einheit E des reellen Körpers K_n in der Gestalt:

(4) $$E = \pm E_1^{\frac{a_1}{d}}\cdot E_2^{\frac{a_2}{d}}\cdots E_\nu^{\frac{a_\nu}{d}}$$

darstellen, wo die a ganze rationale (positive oder negative) Zahlen sind und d gleichfalls eine ganze rationale Zahl $\gtrless 0$ bedeutet, welche letztere mit der Auswahl des Systems $E_1,\ldots,E_\nu$ fest bestimmt ist. In diesem Sinne soll das System $E_1,\ldots,E_\nu$ eine *Basis* für die gesammten Einheiten von K_n heissen und durch

(5) $$[E_1, E_2,\ldots,E_\nu]$$

bezeichnet werden; die ganze Zahl d aber heisse die *Discriminante* der Basis (5). Man könnte insbesondere eine Minimalbasis (5) auswählen, d. h. eine Basis von der Discriminante $d = 1$; doch legen wir hierauf keinerlei Gewicht.

Nunmehr sei Δ eine positive ganze algebraische Zahl des Körpers K_n, von der wir annehmen, dass sie nicht das Quadrat einer ganzen Zahl von K_n sei. Demgemäss wird $\sqrt{\Delta}$ nicht in K_n enthalten sein, vielmehr wird K_n durch Adjunction von $\sqrt{\Delta}$ auf einen reellen Zahlkörper K_{2n} vom $2n^{\text{ten}}$ Grade erweitert. Die Zahlen desselben lassen sich auf die Gestalt:

(6) $$\Omega = \frac{A + B\sqrt{\Delta}}{G}$$

bringen, wo A, B, σ ganze Zahlen von K_n sind; insbesondere nennen wir zwei Zahlen (6), die nur im Vorzeichen des Gliedes $B\sqrt{\Delta}$ sich unterscheiden, mit einander innerhalb des Körpers K_{2n} conjugirt. Soll Ω eine ganze Zahl sein, so muss $2A$ durch σ theilbar sein und $4\Delta B^2$ durch σ^2. Ist die Anzahl der Idealclassen in K_n gleich 1, so würde für ganzzahlige Ω die Zahl σ nothwendig ein Theiler von 2 sein müssen, falls wir noch die zusätzliche Annahme machten, dass Δ keine quadratische Theiler enthielte; dann müsste nämlich σ in $2A$ und in $2B$ aufgehen. Hat man indessen mehrere Idealclassen, so würde die Annahme, Δ habe keinen „realen" quadratischen Theiler, leicht ersichtlich immer noch die Möglichkeit eines nicht in $2B$ aufgehenden σ überlassen, falls nur Δ einen idealen Theiler in höherer als erster Potenz enthält. Ohne indessen über Δ irgend neue Voraussetzungen zu machen, werden wir jedenfalls sagen dürfen, *dass σ bei festem Δ für ganzzahlige Ω nur eine beschränkte Anzahl von Werthen annehmen kann;* denn alle diese Werthe theilen die Discriminante der Basis:

$$[\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \omega_1\sqrt{\Delta}, \omega_2\sqrt{\Delta}, \ldots, \omega_n\sqrt{\Delta}],$$

die wir durch Zusatz von $\sqrt{\Delta}$ aus einer „Minimalbasis" $[\omega_1, \ldots, \omega_n]$ des Körpers K_n herstellen mögen und der Darstellung der Zahlen (6) von K_{2n} zu Grunde legen.

Um die Einheiten des Körpers K_{2n} näher zu untersuchen, müssen wir die zu K_{2n} conjugirten Körper einführen; dieselben sollen durch:

$$K_{2n}, K_{2n}^{(1)}, \ldots, K_{2n}^{(2n-1)} \tag{7}$$

bezeichnet werden; sie werden natürlich an Paaren identisch sein, insofern der Zeichenwechsel von $\sqrt{\Delta}$ den einzelnen Körper $K_{2n}^{(i)}$ in sich selbst überführt. Sind unter den Körpern (7) insgesammt $2\varkappa$ reelle, so werden die zugehörigen $\varkappa$ Körper (1) gleichfalls reell sein, und also trifft die Ungleichung zu:

$$1 \leq \varkappa \leq \lambda. \tag{8}$$

Nach dem Dirichlet'schen Theorem giebt es alsdann im ganzen $(n+\varkappa-1)$ unabhängige Einheiten im Körper K_{2n}. Eine zugehörige Einheitenbasis wollen wir so auswählen, dass an erster Stelle die ν Einheiten (5) wieder benutzt werden. Die noch übrig bleibenden:

$$m = n + \varkappa - \nu - 1 = \frac{n + 2\varkappa - \lambda}{2} \tag{9}$$

Einheiten der zu construirenden Basis werden alsdann Zahlen (6) sein, deren A, B immer zugleich von Null verschieden sind. Wir wählen uns m unabhängige Einheiten dieser Art aus und bezeichnen sie jetzt insbesondere durch $e_1, e_2, \ldots, e_m$; die gewünschte Basis ist dann gegeben durch:

$$[E_1, E_2, \ldots, E_\nu, e_1, e_2, \ldots, e_m]. \tag{10}$$

Es lassen sich übrigens die $e_1, \ldots, e_m$ in einer für die Folge besonders zweckmässigen Art auswählen. Ist nämlich die mit e_i innerhalb K_{2n} conjugirte Einheit durch $\bar{e}_i$ bezeichnet, so wird $e_i\bar{e}_i = E$ eine Einheit von K_n ergeben. Daraufhin beweist man sofort, dass $e_i' = e_i^2 E^{-1}$ eine dem Körper K_{2n} angehörende Einheit ist, *die mit ihrer conjugirten Einheit* $\bar{e}_i'$ *multiplicirt das Product* $e_i'\bar{e}_i' = 1$ *liefert.* Die Einheit e_i lässt sich aber in die Gestalt setzen $e_i = \sqrt{e_i' E}$, so dass wir aus (10) auch dann noch eine Einheitenbasis gewinnen, wenn wir die letzten m Einheiten e_i durch e_i' ersetzen. Man kann demnach auch von vornherein annehmen, die Basis (9) sei so gewählt, *dass die einzelne der letzten* m *Einheiten* e_i, *mit ihrer conjugirten* $\bar{e}_i$ *multiplicirt, das Product* 1 *liefert.* —

§ 3.

Von den Auflösungen der Pell'schen Gleichung innerhalb des Körpers K_n.

Die letzten Entwicklungen geben wichtige Sätze über die Auflösbarkeit der Pell'schen Gleichung im Zahlkörper K_n. Wir meinen mit letzterer Benennung nach Analogie der gewöhnlichen Zahlentheorie die Gleichung:

$$A^2 - \Delta B^2 = \sigma^2; \tag{1}$$

jedoch soll hierbei σ ein Theiler der Discriminante δ der im vorigen Paragraphen für den Körper K_{2n} zu Grunde gelegten Basis sein, und es soll sich nur um solche ganzzahlige Auflösungen A, B der Gleichung (1) handeln, für welche:

$$\frac{A + B\sqrt{\Delta}}{\sigma} \quad \text{und} \quad \frac{A - B\sqrt{\Delta}}{\sigma} \tag{2}$$

ganze Zahlen des Körpers K_{2n} sind.

Hat man (immer bei fest gegebenem Δ) zwei Lösungen A, B und A', B' Pell'scher Gleichungen (1) die zu den Theilern σ und σ' von δ gehören, so wird man nach der bekannten Vorschrift:

$$\frac{A + B\sqrt{\Delta}}{\sigma} \cdot \frac{A' + B'\sqrt{\Delta}}{\sigma'} = \frac{A'' + B''\sqrt{\Delta}}{\sigma''}$$

eine dritte Lösung A'', B'' berechnen können. Insbesondere sind mit einer Lösung immer gleich einfach unendlich viele durch die Regel:

$$\left(\frac{A + B\sqrt{\Delta}}{\sigma}\right)^{\varkappa} = \frac{A_\varkappa + B_\varkappa\sqrt{\Delta}}{\sigma_\varkappa}, \quad \varkappa = -\infty, \cdots, +\infty, \tag{3}$$

gegeben, wo die $\sigma_\varkappa$ immer wieder Theiler von δ sind.

Ueber die Gesammtzahl der Auflösungen von (1) gewinnen wir aber auf Grund der Entwicklungen des vorigen Paragraphen sofort eine bündige Angabe. Es gestattet nämlich die erste Zahl (2) als eine Einheit des Körpers K_{2n} in der Basis (10) § 2 die Darstellung:

$$\frac{A+B\sqrt{\Delta}}{\sigma}=E^{\frac{a}{d}}\cdot e_1^{\frac{a_1}{d}}\cdot e_2^{\frac{a_2}{d}}\cdots e_m^{\frac{a_m}{d}}, \tag{4}$$

wenn d die Discriminante dieser Einheitenbasis bedeutet und E eine Einheit von K_n ist. Man bilde nun die zu (4) innerhalb K_{2n} conjugirte Gleichung und multiplicire dieselbe mit (4). Es folgt $E^{2a}=1$, und da wir mit einem *reellen* Körper K_{2n} zu thun haben, so ergiebt sich:

$$\frac{A+B\sqrt{\Delta}}{\sigma}=\pm e_1^{\frac{a_1}{d}}\cdot e_2^{\frac{a_2}{d}}\cdots e_m^{\frac{a_m}{d}}, \tag{5}$$

wo die $a_1, \ldots, a_m$, d ganze rationale Zahlen sind. Umgekehrt liegt hier jedenfalls immer dann eine Auflösung von (1) vor, wenn wir alle m Zahlen a als Multipla von d wählen. Man hat also das Resultat: *Für eine positive ganze algebraische Zahl Δ des Körpers K_n, die innerhalb K_n nicht rein quadratisch ist, giebt es immer m-fach unendlich viele Auflösungen der Pell'schen Gleichung* (1), *m hierbei im Sinne* (9) *des vorigen Paragraphen gebraucht.*

Es gilt jetzt weiter zu zeigen, dass in der einzelnen einfach unendlichen Reihe (3) immer auch bereits solche Lösungen vorkommen, die $\sigma_\varkappa=1$ haben, wobei natürlich gemeinsame reale Factoren von $A_\varkappa$, $B_\varkappa$, $\sigma_\varkappa$ stets fortgehoben sein sollen. Man betrachte nämlich die unterschiedenen Auflösungen (3) bezüglich des Zahlmoduls δ^2, unter δ wie vorhin die Discriminante der für K_{2n} ausgewählten Basis verstanden. Es wird nur eine begrenzte Anzahl modulo δ^2 unterschiedener Lösungen (3) geben, und insbesondere mögen für die beiden Potenzen k und $l>k$ die Congruenzen zutreffen:

$$A_k\equiv A_l,\quad B_k\equiv B_l \pmod{\delta^2}. \tag{6}$$

Man hat dann zunächst:

$$\left(\frac{A+B\sqrt{\Delta}}{\sigma}\right)^{l-k}=\frac{(A_kA_l-\Delta B_kB_l)+(A_kB_l-A_lB_k)\sqrt{\Delta}}{\sigma_k\sigma_l}. \tag{7}$$

Da nun δ^2 durch $\sigma_k\sigma_l$ theilbar ist, so folgt aus (6) erstlich:

$$A_kB_l-A_lB_k\equiv 0 \pmod{\sigma_k\sigma_l};$$

andrerseits aber gilt modulo δ^2:

$$A_kA_l-\Delta B_kB_l\equiv A_k^2-\Delta B_k^2\equiv A_l^2-\Delta B_l^2,$$

und also folgt durch Recursion auf (1):

$$A_kA_l-\Delta B_kB_l\equiv 0 \quad (\text{modulis } \sigma_k^2 \text{ und } \sigma_l^2).$$

Die auf der linken Seite dieser Congruenz stehende Zahl ist somit

auch durch $\sigma_k \cdot \sigma_l$ theilbar, so dass die in (7) zum Exponenten $(l-k)$ gehörende Zahl $\sigma_{l-k} = 1$ ist. Mit *einer* derartigen Auflösung (3) finden sich dann aber in der Reihe (3) gleich unendlich viele, und also ergiebt sich das Resultat: *Ist Δ irgend eine positive nicht quadratische ganze Zahl des Körpers K_n, so giebt es insgesammt m-fach unendlich viele Auflösungen der Pell'schen Gleichung:*

$$A^2 - \Delta B^2 = 1 \tag{8}$$

durch ganze Zahlen A, B von K_n.

Der bekannte Satz von Lagrange über die Auflösbarkeit der Pell'schen Gleichung für positive Determinanten in der rationalen Zahlentheorie ist im vorstehenden Theoreme enthalten. Die Uebertragung der entsprechenden Sätze für negative Determinanten aus der rationalen Zahlentheorie in diejenige eines Körpers höheren Grades werden wir späterhin nur unter sehr beschränkten Voraussetzungen betreffs K_n leisten können.

§ 4.

Die drei Bedingungen eigentlich discontinuirlicher Gruppen $\Gamma(K_n;\, P,\, Q)$.

Aus der in § 1 aufgestellten Gruppe $\Gamma(K_n;\, P,\, Q)$ sondere man alle hyperbolischen Substitutionen U aus, welche die imaginäre η-Axe in sich selbst transformiren. Es sind das die Substitutionen der Gestalt $U = (A, B, 0, 0)$; und hier kommen für A und B alle ganzzahligen Lösungen der Pell'schen Gleichung:

$$A^2 - PB^2 = 1$$

zur Geltung. Man hat also ∞^m Substitutionen U der gewünschten Art, wo m die zu $\Delta = P$ gehörende Zahl (9) § 2 ist. Fürs zweite suchen wir alle hyperbolischen Substitutionen U der Gruppe auf, welche $\eta = \pm 1$ zu Fixpunkten haben, und die demgemäss die Gestalt $U = (A, 0, 0, D)$ darbieten. Es giebt $\infty^{m'}$ solche Substitutionen, wenn m' die zu $\Delta = PQ$ gehörende Zahl (9) § 2 ist.

Soll nun die Gruppe $\Gamma(K_n;\, P,\, Q)$ keine infinitesimale Substitutionen besitzen, so müssen alle Substitutionen $U = (A, B, 0, 0)$ eine cyklische Untergruppe bilden, die sich aus *einer* unter diesen Substitutionen erzeugen lässt, und ein Gleiches wird von den Substitutionen $U = (A, 0, 0, D)$ gelten. Demzufolge müssen die beiden eben genannten Zahlen m und m' nothwendig auf die Werthe 0 oder 1 eingeschränkt sein. Nun aber war $m = n + \varkappa - 1 - \nu$, und es ist $\varkappa \geqq 1$ und $n > \nu$; die Möglichkeit $m = 0$ ist demnach ausgeschlossen. Nehmen wir demgemäss $m = 1$, so wird nach den Formeln des § 2:

$$n + 2\varkappa = \lambda + 2, \quad n \geqq \lambda, \quad 2\varkappa \geqq 2.$$

Hier muss also beide Male das Gleichheitszeichen gelten, d. h. wir haben $\varkappa = 1$ und $n = \lambda$. Indem wir dieses Resultat einmal für $\Delta = P$ sodann für $\Delta = PQ$ in Worte kleiden, finden sich folgende drei nothwendige Bedingungen für eine eigentlich discontinuirliche Gruppe $\Gamma(K_n;\ P, Q)$:

I. *Die sämmtlichen mit* K_n *conjugirten Körper müssen reell sein.*

II. *Alle mit* P *conjugirten Zahlen,* P *selbst allein ausgenommen müssen negative Zahlwerthe haben*,

III. *Alle mit* Q *conjugirte Zahlen müssen positiv sein.*

Es lässt sich nun auf der anderen Seite der Nachweis führen, dass die aufgestellten Bedingungen für die eigentliche Discontinuität unserer Gruppe $\Gamma(K_n;\ P, Q)$ auch hinreichend sind. Man unterscheide zu diesem Ende die mit $A, B, \ldots$ conjugirten Zahlen durch untere Indices und bilde die $(n-1)$ mit (2) § 1 conjugirten Gleichungen:

$$(1)\quad \begin{cases} A_1^2 - P_1 B_1^2 + Q_1 C_1^2 - P_1 Q_1 D_1^2 = 1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{n-1}^2 - P_{n-1} B_{n-1}^2 + Q_{n-1} C_{n-1}^2 - P_{n-1} Q_{n-1} D_{n-1}^2 = 1. \end{cases}$$

Hier ist es eine Folge der Bedingungen I, II, III, dass linker Hand in allen $(n-1)$ Gleichungen (1) jeweils Summen von vier *positiven* Gliedern stehen. Es werden also bei den gesammten Substitutionen unserer Gruppe nur solche Zahlen A, B, C, D zum Gebrauch kommen, deren conjugirte Zahlen $A_1, \ldots$ den absoluten Werthen nach kleiner als 1 sind.

Hiervon sogleich eine Anwendung auf die Frage nach den *elliptischen* Substitutionen der Gruppe. Eine elliptische Substitution U ist durch $-1 < A < 1$ angezeigt. Bildet man demnach in einem solchen Falle die Norm von A:

$$N(A) = A \,.\, A_1 \ldots A_{n-1},$$

die doch eine rationale ganze Zahl ist, so folgt aus dem gerade Gesagten, dass $-1 < N(A) < 1$ ist; man hat also nothwendig $N(A) = 0$ und somit $A = 0$, so dass U von der Periode zwei ist. Bei den Substitutionen V könnte demzufolge neben der Periode zwei auch noch die Periode vier vertreten sein. Letztere würde aber für $C\sqrt{Q}$ den Werth $\frac{1}{\sqrt{2}}$ fordern, und also wäre $C\sqrt{Q}$ keine ganze algebraische Zahl. Es ergiebt sich somit das Resultat: *An elliptischen Substitutionen kommen in der Gruppe* $\Gamma(K_n;\ P, Q)$ *nur solche der Periode zwei vor*, die Bedingungen I, II, III hier und in der Folge stets als erfüllt vorausgesetzt.

Auf der anderen Seite machen wir Gebrauch von den Spiegelungen, die in der erweiterten Gruppe $\overline{\Gamma}$ enthalten sind. Die zugehörigen

Symmetriekreise werden einander im Innern der η-Halbebene nur unter rechtem Winkel schneiden können, und in jedem solchen Schnitte hat man den Fixpunkt einer elliptischen Substitution der Gruppe Γ vor sich. Insbesondere gehören zu den Symmetrielinien von $\bar{\Gamma}$ die imaginäre η-Axe und der Einheitskreis der η-Ebene, und deren Schnittpunkte $\eta = \pm i$ liefern die Fixpunkte der Substitution T. Die imaginäre Axe wird aber jedenfalls noch von unendlich vielen weiteren Symmetriekreisen orthogonal gekreuzt, und ein Gleiches gilt vom Einheitskreise; denn wir fanden zu Beginn des Paragraphen, dass die dort durch m und m' bezeichneten Zahlen die Werthe 1 haben. Aber in den beiden gedachten Kreissystemen werden die aufeinanderfolgenden Kreise zwischen einander *endliche* Intervalle lassen, weil sonst augenscheinlich spitze Schnittwinkel zwischen Symmetriekreisen auftreten würden. Auch aus der Arithmetik hätten wir leicht folgern können, dass die erzeugenden Substitutionen $U = (A, B, 0, 0)$ bez. $(A, 0, 0, D)$ der beiden wiederholt genannten cyklischen Untergruppen jedenfalls nicht infinitesimal sind.

Soll bei dieser Sachlage überhaupt eine infinitesimale Substitution in Γ vorkommen, so würde dieselbe den Punkt $\eta = i$ in einen sehr nahe gelegenen Punkt η_0 transformiren, der jedenfalls weder auf der imaginären η-Axe noch auf dem Einheitskreise sich finden dürfte. Dann würden aber durch η_0 zwei Symmetriekreise von $\bar{\Gamma}$ hindurchgehen, die mit den beiden jetzt eben wiederholt genannten Symmetriekreisen durch $\eta = i$ ein Viereck von vier rechten Winkeln bilden müssten. Solches ist aber bekanntlich unmöglich, und also ist das Auftreten infinitesimaler Substitutionen in Γ ausgeschlossen.

Zu dem gleichen Resultate hätten wir arithmetisch noch directer gelangen können. Es wäre dabei der nachfolgende bekannte Satz zur Verwendung gekommen: In einem Körper endlichen Grades giebt es nur eine beschränkte Anzahl derartiger ganzer Zahlen, dass sie selbst und ihre sämmtlichen conjugirten Zahlen dem absoluten Werthe nach eine fest gewählte endliche Constante nicht überschreiten*). Sollen wir das wesentliche Resultat nochmals zusammenfassen, so hat sich herausgestellt, *dass die drei Bedingungen I, II, III für die eigentliche Discontinuität der Gruppe* $\Gamma(K_n; P, Q)$ *nicht nur nothwendig, sondern auch hinreichend sind.* Hat man übrigens im Einzelfalle zur Definition reeller Zahlkörper eine ganzzahlige algebraische Gleichung mit lauter reellen Wurzeln, so wird man nach kurzer Betrachtung gewahr, dass sich vorschriftsmässige Auswahlen von Zahlen P, Q noch in der allermannigfaltigsten Weise treffen lassen.

---

*) Siehe Dirichlet-Dedekind, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, p. 556.

§ 5.

Theorie der zur Gruppe $\Gamma(K_n;\ P, Q)$ gehörenden binären quadratischen Formen.

Wie zur Modulgruppe die gewöhnliche Theorie der ganzzahligen binären quadratischen Formen gehört, so können wir jeder einzelnen Gruppe $\Gamma(K_n;\ P, Q)$ eine gewisse Classe von binären quadratischen Formen zuweisen, deren Coefficienten dem durch K_n, $\sqrt{P}$, $\sqrt{Q}$ festgelegten Rationalitätsbereich angehören. Die allgemeine Gestalt der in Rede stehenden Formen ist:

$$(1)\qquad (c\sqrt{Q}-d\sqrt{PQ})x^2+2b\sqrt{P}\,xy+(c\sqrt{Q}+d\sqrt{PQ})y^2,$$

wo b, c, d ganze Zahlen des Körpers K_n bedeuten, und P und Q in der bisherigen Bedeutung gebraucht sind. Die Determinante der Form (1):

$$(2)\qquad \Delta = Pb^2 - Qc^2 + PQd^2$$

ist eine ganze Zahl aus K_n, und man hat eine definite oder indefinite Form (1), je nachdem Δ negativ oder positiv ist. Der Fall $\Delta = 0$ sei zuvörderst ausgeschlossen.

Zur Gruppe $\Gamma(K_n;\ P, Q)$ stehen die Formen (1) in der Beziehung, dass es eben die Substitutionen von der Gestalt:

$$(3)\qquad \begin{aligned} x' &= (A+B\sqrt{P})x+(C\sqrt{Q}+D\sqrt{PQ})y,\\ y' &= (-C\sqrt{Q}+D\sqrt{PQ})x+(A-B\sqrt{P})y \end{aligned}$$

sind, welche die Formen (1) wieder in gleichartige Formen transformiren. Speciell werden die unimodularen Substitutionen (3) die einzelne Form (1) in eine „äquivalente" Form überführen. Bei Ausführung der Theorie der Aequivalenz der Formen (1) bietet die zur Gruppe Γ gehörende Polygontheilung der η-Halbebene gerade die nämlichen Dienste, wie die Modultheilung in der Theorie der rationalganzzahligen Formen*). Es soll dies hier nach einer Richtung weiter verfolgt werden, indem wir fragen, welche Substitutionen eine einzelne Form (1) in sich selbst transformiren. Hierbei mögen wir der Kürze halber die Substitutionen V der Gruppe Γ ausser Betracht lassen; wir werden in der That alle wesentlichen Resultate bereits allein beim Gebrauche der Substitutionen U gewinnen.

Indem wir die geometrische Repräsentation der Formen (1) genau wie in der Theorie der Modulfunctionen l. c. einführen, ergiebt sich zunächst, dass eine definite Form im allgemeinen nur durch die identische Substitution U in sich selbst transformirt wird. Eine

*) Man vergl. die „*Vorlesungen über Modulfunct.*" Bd. I, p. 243 ff.

Ausnahme findet nur statt, wenn der repräsentirende Punkt der Form mit dem Fixpunkte einer elliptischen Substitution U zusammenfällt; dann wird eben ausser der Identität auch noch diese Substitution U, die die Periode zwei hat, die Form in sich transformiren.

Um jetzt ganz allgemein für eine definite oder indefinite Form (1) die Substitutionen (3) der Determinante 1 zu berechnen, welche die Form in sich transformiren, müssen wir A, B, C, D so bestimmen, dass die beiden Gleichungen:

$$(4)\quad \begin{aligned} &(c\sqrt{Q} - d\sqrt{PQ})\eta^2 + 2b\sqrt{P}\eta + (c\sqrt{Q} + d\sqrt{PQ}) = 0,\\ &(C\sqrt{Q} - D\sqrt{PQ})\eta^2 + 2B\sqrt{P}\eta + (C\sqrt{Q} + D\sqrt{PQ}) = 0 \end{aligned}$$

linker Hand bis auf einen Factor übereinstimmen. Diese Forderung kleidet sich in die drei Gleichungen:

$$(5)\qquad \sigma B = ub, \quad \sigma C = uc, \quad \sigma D = ud,$$

wo σ und u zwei ganze Zahlen des Körpers K_n sind, die wir ohne gemeinsamen realen Theiler annehmen dürfen. Schreibt man noch $\sigma A = t$ und benutzt für die Determinante der Form die in (2) eingeführte Bezeichnung, so entspringt die Gleichung:

$$\sigma^2(PB^2 - QC^2 + PQD^2) = \sigma^2(A^2 - 1) = \Delta u^2,$$

die sich mit Hülfe der Bezeichnung $\sigma A = t$ umsetzt in:

$$(6)\qquad t^2 - \Delta u^2 = \sigma^2.$$

Hiermit ist der Anschluss an die schon oben untersuchte Pell'sche Gleichung gewonnen. Aus dem inzwischen Abgeleiteten entspringt für die *definiten* Formen, dass abgesehen vom Falle $\Delta = -1$, stets nur die Lösung $t = \pm\sigma$, $u = 0$ von (6) eine ganzzahlige Substitution U liefert; nur für $\Delta = -1$ liefert die Lösung $t = 0$, $u = \pm\sigma$ die elliptischen Substitutionen der Periode zwei. Wesentlich mannigfaltigere Verhältnisse werden sich für die definiten Formen weiter unten ergeben, wo wir neben ganzen Zahlen auch die Hälften ganzer algebraischer Zahlen als Substitutionscoefficienten einführen.

Bei den indefiniten Formen mögen wir uns zunächst an der Hand der Gleichung (2) überzeugen, dass die sämmtlichen mit Δ conjugirten Zahlen *negative* Zahlwerthe haben, von Δ selber allein abgesehen. Es ist das eine Folge der Bedingungen I, II und III, des vorigen Paragraphen, die ja überall als erfüllt gelten, falls nicht das Gegentheil angegeben ist. Hier mag man nun in (6), um Weitläufigkeiten zu vermeiden, die Zahl σ direct mit 1 identisch nehmen und hat alsdann zufolge § 3 noch gerade *einfach* unendlich viele ganzzahlige Auflösungen t, u der Pell'schen Gleichung (6). Die Anwendbarkeit der früheren Sätze verlangt indessen, dass Δ nicht das Quadrat einer ganzen Zahl von K_n sei; wir haben also das Resultat: *Jede indefinite Form* (1)

einer in K_n nicht quadratischen Determinante Δ wird durch unendlich viele, eine cyklische Untergruppe von $\Gamma(K_n;\ P,\ Q)$ bildende, hyperbolische Substitutionen U in sich selbst transformirt. —

Wir wenden uns endlich zu den *parabolischen* Substitutionen der Gruppe, denen im Schema der eben durchlaufenen Entwicklung $\Delta = 0$, $t = \sigma$, $A = 1$ entsprechen würde. Die Gleichung (2) § 1 liefert in diesem Falle:

$$-PB^2 + QC^2 - PQD^2 = 0; \tag{7}$$

die $(n-1)$ conjugirten Gleichungen, $n > 1$ zunächst vorausgesetzt, seien:

$$-P_iB_i^2 + Q_iC_i^2 - P_iQ_iD_i^2 = 0. \tag{8}$$

Die Bedingungen I bis III in § 4 haben zur Folge, dass in jeder Gleichung (8) die Summe dreier „nicht negativer" reeller Zahlen mit Null identisch gesetzt ist. Demnach ist z. B. $B_1 = 0$, $C_1 = 0$, $D_1 = 0$, und damit haben auch die drei Zahlen B, C, D übereinstimmend den Werth Null, so dass $A = 1$ nur bei der identischen Substitution vorliegt. Da übrigens jede Substitution V der Gruppe mit sich selbst combinirt ein U liefert, so hat man als Resultat: *Sobald $n > 1$ ist, kommen in der Gruppe $\Gamma(K_n;\ P,\ Q)$ sicher keine parabolische Substitutionen vor; $\Gamma(K_n;\ P,\ Q)$ kann somit insbesondere nie mit der Modulgruppe commensurabel sein, und also können die zu $\Gamma(K_n;\ P,\ Q)$ gehörenden automorphen Functionen bei $n > 1$ niemals Modulfunctionen sein.*

Im Falle $n = 1$ kommen Gleichungen (8) nicht vor, und man hat somit direct die Möglichkeit der Auflösung der Gleichung (7) in ganzen Zahlen B, C, D zu untersuchen. Hierbei darf man P und Q ohne quadratische Theiler voraussetzen; übrigens nenne man T den grössten gemeinsamen Theiler von P und Q und schreibe:

$$P = TP_0, \qquad Q = TQ_0.$$

Zufolge (7) muss dann B durch Q_0 und C durch P_0 theilbar sein; schreibt man dieserhalb $B = B_0Q_0$, $C = C_0P_0$, so ergiebt sich:

$$Q_0B_0^2 - P_0C_0^2 + TD^2 = 0,$$

und hier sind die drei Coefficienten Q_0, P_0, T positiv, und keine zwei unter ihnen haben einen Factor gemeinsam. Eine bekannte Regel der Zahlentheorie liefert daraufhin das Resultat: *In einer bei $n = 1$ auftretenden Gruppe $\Gamma(K_1;\ P,\ Q)$ finden sich parabolische Substitutionen stets und nur dann, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind: P muss quadratischer Rest von Q_0 sein, — Q von P_0 und endlich P_0Q_0 von T. Sind diese Bedingungen erfüllt, so ist die Gruppe $\Gamma(K_1;\ P,\ Q)$ mit der Modulgruppe commensurabel, und die gemeinsame Untergruppe ist eine sogenannte Congruenzgruppe**).

*) Man vergl. die in der Einleitung genannten Abhandlungen, insbesondere Math. Ann. Bd. 38, pag. 79.

§ 6.

Vom Discontinuitätsbereich der $\Gamma(K_n;\ P,\ Q)$. Classificationsprincipien für die Gruppen Γ.

Um über den Discontinuitätsbereich der Gruppe $\Gamma(K_n;\ P,\ Q)$ einige Angaben zu machen, wird man zweckmässig zuvörderst das System aller Symmetriekreise der in der erweiterten Gruppe $\bar{\Gamma}$ enthaltenen Spiegelungen untersuchen. Hierbei bedienen wir uns der von Poincaré für Betrachtungen unserer Art eingeführten nicht-euklidischen Massbestimmung.

Es sollen zuvörderst alle Symmetriekreise untersucht werden, welche die imaginäre η-Axe kreuzen; alle diese Kreise sind concentrisch und haben $\eta = 0$ zum Mittelpunkt. Die fraglichen Kreise folgen auf einander in stets gleichen Intervallen. Dieses Intervall selbst aber hängt ab von der kleinsten positiven Auflösung der Pell'schen Gleichung (8) § 3 für $\Delta = P$, welche durch $A = a$, $B = b$ gegeben sein mag. Es wird alsdann:

$$\eta' = \frac{a + b\sqrt{P}}{a - b\sqrt{P}} \cdot \eta \tag{1}$$

die erzeugende Substitution U derjenigen cyklischen Untergruppe aus Substitutionen U, welche $\eta = 0$ und $\eta = \infty$ zu Fixpunkten haben. Unter Vorbehalt einer gleich zu erwähnenden Ausnahme ergiebt sich nun leicht, *dass der auf den Einheitskreis in der Richtung wachsender η nächstfolgende Symmetriekreis um $\eta = 0$ den Punkt $\eta = i(a + b\sqrt{P})$ auf der imaginären Axe ausschneidet;* die zugehörige Spiegelung ist gegeben durch:

$$\eta' = \frac{a + b\sqrt{P}}{(a - b\sqrt{P})\,\bar{\eta}} \quad \text{oder} \quad \eta'\bar{\eta} = (a + b\sqrt{P})^2.$$

Hierbei ist indessen eines Ausnahmefalles nicht gedacht, der bei $Q \gtrless 1$ eintreten kann. Man muss hier in der That die Möglichkeit einer Substitution V:

$$\eta' = \frac{c\sqrt{Q} + d\sqrt{PQ}}{c\sqrt{Q} - d\sqrt{PQ}} \cdot \eta \tag{2}$$

discutiren, die einmal wiederholt auf die unter (1) angegebene Substitution U führt. In diesem Falle hat man

$$Q(c + d\sqrt{P})(c - d\sqrt{P}) = 1, \quad c^2 - Pd^2 = Q^{-1}; \tag{3}$$

es muss also Q eine Einheit sein, und es muss sich überdies Q^{-1} in der Gestalt $c^2 - Pd^2$ vermöge ganzer Zahlen c, d aus K_n darstellen lassen. Hier liegt thatsächlich eine Ausnahme vor, falls Q nicht auch noch

das *Quadrat* einer in K_n enthaltenen ganzen Zahl der Norm ± 1 ist; indes kommen wir hierauf erst weiter unten zurück.

Es sollen jetzt zweitens alle diejenigen Symmetriekreise ausfindig gemacht werden, welche den Einheitskreis der η-Halbebene (unter rechtem Winkel) kreuzen. Hierher gehört natürlich die imaginäre Axe, und die übrigen Kreise folgen auf einander immer in gleichen Intervallen. Betreffs der letzteren ist die kleinste positive Lösung der Pell'schen Gleichung (8) § 3 für $\Delta = PQ$ massgeblich; wir denken diese Lösung gegeben durch $A = \alpha$, $B = \delta$, und es wird alsdann:

$$(4) \qquad \eta' = \frac{\alpha\eta + \delta\sqrt{PQ}}{\delta\sqrt{PQ}\cdot\eta + \alpha}$$

die erzeugende Substitution aller hyperbolischen U mit den Fixpunkten $\eta = \pm 1$. Durch leichte Rechnung ergiebt sich nun wieder: *Der auf die imaginäre Axe in der Richtung nach $\eta = -1$ nächstfolgende Symmetriekreis der fraglichen Reihe schneidet auf dem Einheitskreise den Punkt:*

$$(5) \qquad \eta = \frac{-\delta\sqrt{PQ} + i}{\alpha}$$

aus (man vergl. die sogleich folgende Figur).

Indessen kann auch hier wieder für $Q \gtrless 1$ ein Ausnahmefall des eben formulirten Satzes auftreten. Derselbe besteht darin, dass eine hyperbolische Substitution V mit den Fixpunkten $\eta = \pm 1$:

$$(6) \qquad \eta' = \frac{C\sqrt{Q}\,\eta + B\sqrt{P}}{B\sqrt{P}\,\eta + C\sqrt{Q}}$$

vorkommen kann, deren zweite Potenz die Substitution (4) ist. Offenbar gelten dann die Formeln:

$$(7) \quad P = \frac{\alpha-1}{2B^2}, \quad Q = \frac{\alpha+1}{2C^2}, \quad V = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\alpha+1}{2}}, & \sqrt{\frac{\alpha-1}{2}} \\ \sqrt{\frac{\alpha-1}{2}}, & \sqrt{\frac{\alpha+1}{2}} \end{pmatrix}.$$

Um kurz zu sein, berufen wir uns auf leicht herbeizuschaffende Einzelbeispiele mit der Behauptung, dass der in (7) vorliegende Fall nicht stets eintritt. Es sei demnach wieder angenommen, dass der fragliche Ausnahmefall nicht vorliegt; im übrigen werden wir späterhin zeigen, wie sich derselbe in die allgemeine Untersuchung einordnen lässt. —

Um nunmehr nach Ausschaltung der beiden Specialfälle (3) und (7) unsere Betrachtung zu verallgemeinern, schreiben wir erstlich die beiden Arten von Symmetriekreisen an, welche bei der erweiterten Gruppe $\bar{\Gamma}(K_n; P, Q)$ überhaupt auftreten. Die *Symmetriekreise der ersten Art* sind gegeben durch die Gleichungen:

(8) $(C\sqrt{Q} - D\sqrt{PQ})(x^2 + y^2) + 2Ax - (C\sqrt{Q} + D\sqrt{PQ}) = 0,$

zu bilden für alle innerhalb K_n ganzzahligen Darstellungen der rationalen Einheit 1 in der Gestalt:

(9) $$1 = A^2 + QC^2 - PQD^2;$$

hierher gehört insbesondere die imaginäre η-Axe. Die *Symmetriekreise der zweiten Art* haben die Gleichungen:

(10) $$(A - B\sqrt{P})(x^2 + y^2) + 2C\sqrt{Q}\,x - (A + B\sqrt{P}) = 0,$$

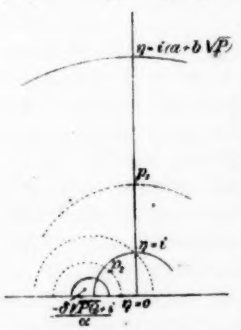
zu bilden für alle Darstellungen von 1 in der Gestalt:

(11) $$1 = A^2 - PB^2 + QC^2;$$

speciell gehört hierher der Einheitskreis der η-Halbebene.

Um die linken Seiten der Formeln (8) und (10) zu binären quadratischen Formen von der Art (1) § 5 auszugestalten, müssen wir die Factoren $\sqrt{P}$ bez. $\sqrt{PQ}$ linker Hand bei (8) und (10) hinzusetzen; wir erhalten alsdann Formen der Determinante $\Delta = P$ bei den Kreisen erster Art und von der Determinante $\Delta = PQ$ bei denen von der zweiten Art. Wendet man nun die in § 5 entwickelte Theorie der indefiniten Formen auf die vorliegenden Verhältnisse an, so zeigt sich vermöge der Gleichungen (9), (11) leicht, dass die damals mit σ bezeichnete ganze Zahl des Körpers K_n gegenwärtig eine Einheit ist. Durch Fortsetzung des Schlussverfahrens ergeben sich aber die Sätze: *Ein einzelner Symmetriekreis* (8) *oder* (10) *wird entweder längs seiner ganzen Ausdehnung in der η-Halbebene von keinem zweiten Symmetriekreise gekreuzt oder er wird von unendlich vielen solchen Kreisen geschnitten; im letzteren Falle folgen diese Schnittkreise auf einander in den Intervallen*

(12) $$i_1 = \log(a + b\sqrt{P}) \quad \textit{bez.} \quad i_2 = \log(\alpha + \delta\sqrt{PQ}),$$



je nachdem der zuerst gemeinte Kreis zur ersten oder zweiten Art gehört. —

Um diese Verhältnisse noch näher zu erläutern, sind in der nebenstehenden Zeichnung die imaginäre Axe und der Einheitskreis, sowie die nächsten beiderseits folgenden Symmetriekreise aufgenommen. Dabei ist das Intervall i_1 durch den Punkt p_1, das Intervall i_2 durch p_2 gehälftet, und beide Male sind die dortselbst orthogonal stehenden Kreise punktirt angedeutet. *Die beiden zu diesen Kreisen gehörenden Spiegelungen, die wir S_1 und S_2 nennen, transformiren die Gruppe $\bar{\Gamma}$ in sich, ohne derselben anzugehören.* Man beweist dies dadurch, dass man an Stelle von S_1 und S_2 lieber mit den Operationen erster Art:

$$(13)\quad \begin{pmatrix} \sqrt{a+b\sqrt{P}}, & 0 \\ 0, & \sqrt{a-b\sqrt{P}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\alpha+1}{2}}, & \sqrt{\frac{\alpha-1}{2}} \\ \sqrt{\frac{\alpha-1}{2}}, & \sqrt{\frac{\alpha+1}{2}} \end{pmatrix}$$

transformirt, was, wie man leicht nachweist, auf dasselbe hinauskommt. Durch Combination von S_1 und S_2 entspringt die Substitution erster Art:

$$(14)\quad W = S_1 S_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\alpha-1}{2}}\sqrt{a+b\sqrt{P}}, & \sqrt{\frac{\alpha+1}{2}}\sqrt{a+b\sqrt{P}} \\ -\sqrt{\frac{\alpha+1}{2}}\sqrt{a-b\sqrt{P}}, & -\sqrt{\frac{\alpha-1}{2}}\sqrt{a-b\sqrt{P}} \end{pmatrix},$$

und diese Substitution W transformirt die Gruppe $\bar{\Gamma}$ und also auch das System ihrer gesammten Symmetriekreise in sich selbst.

Man wende nun wiederholt W und W^{-1} auf Einheitskreis und imaginäre Axe an und betrachte das durch die entstehenden Symmetriekreise eingegrenzte Stück der η-Halbebene. Die Grenze ist *eine halbreguläre rechtwinklige Kreisbogenkette*, insofern die Seiten abwechselnd die Längen i_1 und i_2 besitzen. Ist Q das Quadrat einer Einheit, so liegt sogar völlige Regularität vor, indem nun auch der durch $\eta = i$ punktirt angedeutete Kreis der Figur die Gruppe $\bar{\Gamma}$ in sich selbst spiegelt. *Ueber die in Rede stehende Kreisbogenkette dringt kein neuer Symmetriekreis von $\bar{\Gamma}$ in das abgetrennte Stück der Halbebene ein.*

Hier hat man augenscheinlich eine dreifache Fallunterscheidung zu treffen, je nachdem die Substitution W elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch ist, d. h. jenachdem man:

$$(15)\qquad (a-1)(\alpha-1) \lesseqgtr 4$$

hat. Der parabolische Fall kann nur bei $n = 1$ eintreten; denn bei $n > 1$ würde die conjugirte Gleichung $(a_1 - 1)(\alpha_1 - 1) = 4$ nicht bestehen können, da hier a_1 und α_1 dem absoluten Betrage nach kleiner als 1 sind. Bei $n = 1$ sind die einzigen parabolischen Fälle durch $P = 2$, $Q = 1$ und $P = 3$, $Q = 2$ gegeben, die sich leicht direct behandeln lassen; wir dürfen also den Fall einer parabolischen Substitution W ausser Acht lassen. *Ist W hyperbolisch, so gehört stets eine endliche Potenz dieser Substitution der Gruppe Γ an;* zufolge (14) kommen wir nämlich hier auf die cyklische Untergruppe der indefiniten quadratischen Form:

$$(16)\qquad \begin{aligned} &\delta\left[bP\sqrt{Q} - (a-1)\sqrt{PQ}\right]\eta^2 + 2b(\alpha-1)\sqrt{P}\eta \\ &\quad + \delta\left[bP\sqrt{Q} + (a-1)\sqrt{PQ}\right], \end{aligned}$$

die sich dem allgemeinen Ansatze (1) § 5 subsumiren lässt.

Man denke jetzt die sämmtlichen Symmetriekreise der in $\bar{\Gamma}$ enthaltenen Spiegelungen construirt, wodurch die η-Halbebene in unendlich viele rechtwinklige Kreisbogenpolygone getheilt wird, die aus einem unter ihnen nach dem Symmetriegesetz entstehen. Dasjenige Polygon, welches ausserhalb des Einheitskreises und zur linken Seite der imaginären Axe an $\eta = i$ heranragt, soll als Ausgangspolygon bezeichnet werden. Nur der Fall einer hyperbolischen Substitution W erfordert hier eine besondere Besprechung. Da wird offenbar die von $\eta = i$ zu beschreibende Berandung des Ausgangspolygons in den beiden Fixpunkten von W zwei *„Grenzpunkte“* darbieten, gegen welche sich die einzelnen Glieder der halbregulären Kreisbogenkette, euklidisch zu reden, immer dichter und dichter zusammendrängen. Aber man wolle hier gleich bemerken, *dass jedenfalls kein endlicher Theil der reellen Axe an der Berandung des Ausgangspolygons theilhaben kann.* Es ergiebt sich dies leicht aus dem Umstande, dass man immer innerhalb K_n ganzzahlige Formen (1) § 5 angeben kann, deren drei Coefficienten dem Verhältnisse nach von drei willkürlich zu wählenden reellen Constanten a, b, c positiver Determinante $b^2 - ac$ um weniger abweichen, als man will; man muss nur noch hinzunehmen, dass für jede indefinite Form (1) § 5 hyperbolische Substitutionen der Form in sich innerhalb $\Gamma(K_n;\ P, Q)$ vorkommen. Das Ausgangspolygon wird demnach in der That die reelle Axe immer nur in einzelnen Punkten erreichen können, und alle diese Punkte sollen fortan als *Grenzpunkte* jenes Polygons bezeichnet werden.

Für die Gruppen unserer Art entspringen aus dem Bisherigen die nachfolgenden Eintheilungsprincipien:

Erster Fall: *Das Ausgangspolygon ist ein rechtwinkliges halbreguläres bez. reguläres Polygon von endlicher Seitenanzahl.* Es giebt alsdann eine (aus W entspringende) cyklische Gruppe elliptischer Substitutionen des Polygons in sich, und eine Untergruppe dieser cyklischen Gruppe ist in Γ enthalten. Durch Zusatz dieser Untergruppe lässt sich leicht aus dem Polygon der Discontinuitätsbereich von $\Gamma(K_n;\ P, Q)$ herstellen; das Geschlecht von Γ ergiebt sich zu $p = 0$.

Zweiter Fall: *Das halb-reguläre rechtwinklige Ausgangspolygon besitzt einen Grenzpunkt.* Dieser Fall setzt $n = 1$ voraus; die Gruppe aller Substitutionen des Polygons in sich ist cyklisch und entspringt aus der parabolischen Substitution W. Gehört W^ν als niederste Potenz von W der Gruppe Γ an, so lässt sich $\bar{\Gamma}$ aus ν Spiegelungen und der einen parabolischen Substitution W^ν erzeugen; die Gruppe Γ ist vom Geschlechte $p = 0$.

Dritter Fall: *Das halb-reguläre Ausgangspolygon hat zwei Grenzpunkte (nämlich die Fixpunkte von W).* Das Polygon ist jetzt nach unten entweder durch einen Halbkreis (mit den Grenzpunkten

als Fusspunkten) oder wieder durch eine rechtwinklige unendliche Kreisbogenkette abgeschlossen, die alsdann wieder die Fixpunkte von W zu Grenzpunkten hat. Die Gruppe aller Substitutionen erster Art des Polygons in sich ist cyklisch und hat W zur Erzeugenden; das Geschlecht von $\Gamma(K_n;\, P,\, Q)$ ist $p = 1$, da wieder eine endliche Potenz von W in Γ enthalten ist.

Vierter Fall: *Das halb-reguläre (bez. reguläre) rechtwinklige Ausgangspolygon hat unendlich viele Grenzpunkte.* Dabei bildet das System aller Grenzpunkte des einzelnen Polygons eine solche Punktmannigfaltigkeit, deren sämmtliche Ableitungen (im Sinne von Cantor) immer wieder Systeme zu unendlich vielen Punkten vorstellen. Dies hängt natürlich mit der Structur der Gruppe aller Substitutionen des Ausgangspolygons in sich zusammen. Diese Gruppe ist nämlich jetzt keineswegs mehr cyklisch; *sie zeigt vielmehr die Structur jener Hauptkreisgruppen, bei denen der Hauptkreis nicht zugleich die Rolle eines Grenzkreises spielt.* Um den Discontinuitätsbereich von $\Gamma(K_n;\, P, Q)$ zu bestimmen, muss man noch feststellen, welche Untergruppe Γ mit der eben in Rede stehenden Gruppe gemeinsam hat. Das Geschlecht von Γ lässt sich jetzt nicht allgemein angeben.

§ 7.

Bemerkungen über zwei besondere Arten von Gruppen Γ.

Die letzten Entwicklungen galten noch nicht ohne Weiteres in den beiden durch (3) und (7) § 6 angezeigten besonderen Fällen. Im ersten dieser beiden Fälle war Q eine Einheit von K_n und es gab ganze Zahlen c, d, welche der Gleichung (3) § 6 genügten. Hier wird man nun versuchen, die Gruppe vermöge:

$$(1)\qquad \begin{pmatrix} \sqrt[4]{a+b\sqrt{P}}, & 0 \\ 0, & \sqrt[4]{a-b\sqrt{P}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{c\sqrt{Q}+d\sqrt{PQ}}, & 0 \\ 0, & \sqrt{c\sqrt{Q}-d\sqrt{PQ}} \end{pmatrix}$$

zu transformiren. Aber dabei geht Γ nicht in sich selbst über; vielmehr liefert eine Substitution U nach der Transformation:

$$(2)\qquad \begin{pmatrix} A+B\sqrt{P}, & Q[(cC-dDP)+(cD-dC)\sqrt{P}] \\ Q[-(cC-dDP)+(cD-dC)\sqrt{P}], & A-B\sqrt{P} \end{pmatrix},$$

während eine Substitution V unter Forthebung des gemeinsamen Factors $\sqrt{Q}$ aus den vier neuen Coefficienten die Gestalt darbietet:

$$(3)\qquad \begin{pmatrix} A+B\sqrt{P}, & (cA-dBP)+(cB-dA)\sqrt{P} \\ -(cA-dBP)+(cB-dA)\sqrt{P}, & A-B\sqrt{P} \end{pmatrix}.$$

Die Substitutionen (2) bilden die Gruppe $\Gamma(K_n;\, P, 1)$; dieselbe ist erweitert durch Zusatz der Substitutionen (3), die übrigens genau die Gestalt der U zeigen, nur dass sie nicht unimodular sind, *sondern als Determinante die Einheit Q^{-1} des Körpers K_n darbieten.* Die hierin liegende Verallgemeinerung unseres ursprünglichen Ansatzes soll im folgenden Paragraphen allgemein untersucht werden.

Der zweite Ausnahmefall war durch die Möglichkeit der Gleichung:

$$\beta\sqrt{P}+\gamma\sqrt{Q}=\sqrt{\alpha+\delta\sqrt{PQ}} \tag{4}$$

mit ganzen Zahlen β, γ von K_n angezeigt; hier wird man durch

$$\begin{pmatrix} 1+\gamma\sqrt{Q}, & -\beta\sqrt{P} \\ -\beta\sqrt{P}, & 1+\gamma\sqrt{Q} \end{pmatrix} \tag{5}$$

transformiren wollen, und dabei liefert ein U:

$$\begin{pmatrix} A+(\gamma B-\beta C)\sqrt{PQ}, & (\gamma CQ-\beta BP)+D\sqrt{PQ} \\ -(\gamma CQ-\beta BP)+D\sqrt{PQ}, & A-(\gamma B-\beta C)\sqrt{PQ} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

während eine Substitution V übergeht in:

$$\begin{pmatrix} C\sqrt{Q}+(\gamma DQ-\beta A)\sqrt{P}, & (\gamma A-\beta DP)\sqrt{Q}+B\sqrt{P} \\ -(\gamma A-\beta DP)\sqrt{Q}+B\sqrt{P}, & C\sqrt{Q}-(\gamma DQ-\beta A)\sqrt{P} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Die Substitutionen (6) bilden die Gruppe $\Gamma(K_n;\, PQ, 1)$, während in (7) ein neuer Typus von unimodularen Substitutionen vorliegt. Die hiermit aufgefundene Gruppenerweiterung lässt sich bei einer $\Gamma(K_n;\, P, 1)$ stets vornehmen, falls sich P in das Product zweier Factoren P_0, Q_0 spalten lässt, die den oft genannten Bedingungen II und III § 4 genügen.

§ 8.

Erweiterung von $\Gamma(K_n;\, P, Q)$ durch Substitutionen, deren Determinante eine Einheit von K_n ist.

Die Frage nach der umfassendsten Gruppe, innerhalb welcher eine vorgelegte $\Gamma(K_n;\, P, Q)$ ausgezeichnet enthalten ist, würde auf folgendem Wege systematisch gelöst werden können. Man hat das System aller Symmetriekreise von $\bar{\Gamma}(K_n;\, P, Q)$ aufzustellen und sodann die Gruppe aller Substitutionen zu bilden, welche ein einzelnes der entspringenden Polygone in sich selbst transformiren. Setzt man diese letztere Gruppe, von der in § 6 wiederholt die Rede war, zu $\bar{\Gamma}(K_n;\, P, Q)$ hinzu, so entspringt offenbar die umfassendste Gruppe, in der $\Gamma(K_n;\, P, Q)$ ausgezeichnet ist. Man bemerke von hieraus sogleich, dass die fragliche Gruppe jedenfalls wieder eigentlich discontinuirlich sein muss.

Neben diese allgemeine geometrische Vorschrift reihen wir eine arithmetische Massnahme, eine Gruppe Γ' aufzustellen, in welcher Γ ausgezeichnet ist, wenn dieselbe auch noch nicht die gerade gedachte umfassendste Gruppe ist. Zu diesem Ende stellen wir neben die U, V neue Substitutionen, die genau die Bauart der U, V zeigen, abgesehen von dem einen Umstande, dass die Determinante nicht gerade gleich 1, sondern gleich irgend einer Einheit E von K_n sein soll:

$$(1)\qquad A^2 - PB^2 + QC^2 - PQD^2 = E.$$

Inzwischen bedarf diese Massnahme sogleich der Ergänzung. Man muss nämlich, so oft E einen negativen Werth hat, an Stelle der ursprünglichen U, V die beiden nachfolgenden Typen treten lassen:

$$(2)\qquad \begin{aligned} &\begin{pmatrix} A + B\sqrt{P}, & C\sqrt{Q} + D\sqrt{PQ} \\ C\sqrt{Q} - D\sqrt{PQ}, & -A + B\sqrt{P} \end{pmatrix}, \\ &\begin{pmatrix} C\sqrt{Q} + D\sqrt{PQ}, & A + B\sqrt{P} \\ A - B\sqrt{P}, & -C\sqrt{Q} + D\sqrt{PQ} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wie man sieht, sind gegen die ursprüngliche Fixirung der U, V rechter Hand die Vorzeichen der Nenner geändert. Wäre dies nicht geschehen, so würde eine zu einem negativen E gehörende Substitution die beiden η-Halbebenen mit einander vertauschen. An Stelle von (1) muss demnach:

$$(3)\qquad A^2 - PB^2 + QC^2 - PQD^2 = \pm E$$

gesetzt werden, wo das fragliche Vorzeichen so zu fixiren ist, dass die rechte Seite von (3) positiv ist. Man sieht, *dass jedenfalls nur solche Einheiten E Substitutionen liefern können, für welche alle mit $\pm E$ conjugirten Einheiten positive Zahlwerthe haben.* Im übrigen zeigt eine leichte Rechnung, *dass jede hier eintretende Substitution thatsächlich die Gruppe $\Gamma(K_n;\, P, Q)$ in sich transformirt.*

Vor allem gilt es, das nachfolgende Resultat aufzustellen: *Die zu den verschiedenen Einheiten E gehörenden Substitutionen U, V bez. U', V' bilden in ihrer Gesammtheit eine Gruppe, in welcher Γ eine ausgezeichnete Untergruppe von endlichem Index ist.* Um letzteren Punkt darzuthun, stelle man folgende Ueberlegung an:

Giebt es für vorgelegtes E überhaupt eine Lösung von (3), so giebt es gleich unendlich viele, die aus jener einen durch Combination mit den Substitutionen von Γ hervorgehen. Für $n = 1$ kommt neben $E = 1$ nur noch $E = -1$ zur Geltung. Für $n > 1$ giebt es ∞^{n-1} Einheiten E, die wir durch eine „Minimalbasis" $[E_1, E_2, \ldots, E_{n-1}]$ darstellen mögen. Hier ist evident, dass irgend zwei Einheiten E und E', deren Quotient $E'E^{-1}$ als *Quadrat* einer Einheit von K_n dar-

gestellt werden kann, die gleichen Substitutionen liefern; denn indem wir die vier Coefficienten einer unserer Substitutionen mit einer Einheit von K_n als gemeinsamen Factor versehen, wird weder ihre specifische Bauart, noch ihr Charakter als ganzer algebraischer Zahlen irgend gestört.

Bei dieser Sachlage brauchen wir nur die 2^n Einheiten

$$E = \pm E_1^{\nu_1} . E_2^{\nu_2} \ldots E_{n-1}^{\nu_{n-1}} \tag{4}$$

heranzuziehen, bei denen die Exponenten ν auf 0 und 1 eingeschränkt sind. Dabei sind dann alle diejenigen Einheiten (4) herauszugreifen, für welche die mit $\pm E$ conjugirten Zahlen positiv sind. Aber hier ist noch eine weitere Reduction vorzunehmen. Ist nämlich im Einzelfall $\sqrt{\pm E}$ noch eine ganze Zahl von K_n (und zwar dann natürlich von der Norm -1), so werden ersichtlich die zu $\pm E$ gehörenden Substitutionen doch nur wieder die Gruppe $\Gamma(K_n;\, P, Q)$ liefern. In einem solchen Falle wird man aber versuchen, in (3) an Stelle von $\pm E$ die Zahl $\pm\sqrt{\pm E}$ einzutragen und neue Substitutionen von hieraus zu gewinnen.

Ohne hierbei noch länger zu verweilen, ist aus der *endlichen* Anzahl zu gebrauchender Einheiten E evident, dass $\Gamma(K_n;\, P, Q)$ innerhalb der fraglichen umfassenderen Gruppe einen *endlichen* Index μ aufweist. Betreffs der zugehörigen endlichen Gruppe G_μ sei nur noch hinzugesetzt, *dass dieselbe* $\mu - 1$ *mit einander vertauschbare Substitutionen der Periode zwei enthält.* —

§ 9.

Erweiterung der Gruppe $\Gamma(K_n;\, P, Q)$ durch Substitutionen der Determinante vier.

Es soll nunmehr eine neue erweiterte Gruppe $\Gamma'(K_n;\, P, Q)$ besprochen werden, in welcher Γ zwar als Untergruppe, aber nicht nothwendig als ausgezeichnete Untergruppe enthalten ist. Die zu discutirende Erweiterung stützt sich auf den Gebrauch von Substitutionen, die genau so gebaut sind, wie die U, V, *nur dass ihre Determinante nicht* 1, *sondern gleich* 4 *ist;* wir haben also Substitutionen U, V für Auflösungen von:

$$A^2 - PB^2 + QC^2 - PQD^2 = 4 \tag{1}$$

in ganzen Zahlen A, B, C, D von K_n zu bilden. Darunter finden sich natürlich auch die U, V der Gruppe Γ wieder; sie entsprechen offenbar allen Auflösungen von (1) in Zahlen A, B, C, D, die zugleich durch 2 theilbar sind.

Hier ist nun zuvörderst eine Schwierigkeit hinwegzuräumen. Zwei Substitutionen der Determinante vier geben durch Combination eine

solche von der Determinante 16, und dabei werden wenigstens nicht stets die vier Coefficienten der neuen Substitution zugleich durch 2 theilbar sein. Demgemäss bilden die Substitutionen U, V der Determinante 4 in ihrer Gesammtheit noch keineswegs eine Gruppe; es müssen vielmehr noch einschränkende Bedingungen für die Lösungen A, B, C, D von (1) hinzukommen, welche fähig sind, eine Gruppe zu definiren. Es genügt hier, von der Gruppe der Substitutionen U allein zu handeln, indem nach Klarstellung der Verhältnisse für die U die Gesammtgruppe späterhin einfach durch Zusatz der einzelnen Substitution $\begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix}$ hergestellt wird.

Sollen nun zwei Substitutionen U, U' in $U'' = UU'$ wieder eine Substitution für eine Lösung von (1) liefern, so müssen, wie schon bemerkt, die Coefficienten von U'' durch 2 theilbar werden, und also schreiben wir an Stelle des Formelsystems (3) § 1 nunmehr das folgende:

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} 2A'' &= AA' + PBB' - QCC' + PQDD', \\ 2B'' &= AB' + BA' + QCD' - QDC', \\ 2C'' &= AC' + PBD' + CA' - PDB', \\ 2D'' &= AD' + BC' - CB' + DA'. \end{aligned}\right.$$

Die zu benutzenden Zahlquadrupel A, B, C, D müssen aber solche Bedingungen erfüllen, *dass einmal* A'', B'', C'', D'' *ganze Zahlen von* K_n *sind, und dass ferner für diese Zahlen wiederum jene Bedingungen in Gültigkeit sind, falls sie für die beiden Quadrupel* A, B, C, D *und* A', B', C', D' *bestehen.* Die auf diesen Punkt bezügliche Untersuchung hat nun das nachfolgende Resultat gehabt: *Lassen sich im Körper* K_n *zwei ganze Zahlen* μ *und* ν *finden, welche der Congruenz:*

$$(3)\qquad \mu^2 + Q\nu^2 \equiv P \pmod{4}$$

genügen, so kann man gewünschte Bedingungen in Form von Congruenzen modulo 2 wie folgt angeben:

$$(4)\qquad A \equiv \mu B + \nu QD, \quad C \equiv \nu B + \mu D, \quad (\text{mod. } 2).$$

In der That kann man zuvörderst zeigen, dass unter diesen Bedingungen die vier Zahlen A'', B'', C'', D'' ganz werden; so z. B. findet man als eine mod. 2 gültige Congruenz:

$$2D'' \equiv (\mu B + \nu QD)\,D' + BC' + (\nu B + \mu D)\,B' + DA',$$
$$2D'' \equiv B(C' + \nu B' + \mu D') + D(A' + \mu B' + \nu QD'),$$

und hier sind die beiden rechter Hand in Klammern stehenden Zahlen in der That durch 2 theilbar. In ähnlicher Weise zeigt man, dass A'', B'', C'' ganze Zahlen sind.

Weiter muss man nachweisen, dass für A'', B'', C'', D'' wieder die Congruenzen (4) gelten. Z. B. berechnet man:

$$\begin{aligned}2(A''+\mu B''+\nu QD'') = {} & A(A'+\mu B'+\nu QD') \\ & + B(PB'+\mu A'+\nu QC') \\ & + C(-QC'+\mu QD'-\nu QB') \\ & + D(PQD'-\mu QC'+\nu QA');\end{aligned}$$

hier stehen rechter Hand in allen vier Klammern zufolge (3) und (4) durch 2 theilbare Zahlen, wir werden also eine modulo 4 gültige Congruenz erhalten, wenn wir A und C auf Grund von (4) ersetzen. Ordnet man alsdann nach B und D, so kommt:

$$\begin{aligned}2(A''+\mu B''+\nu QD'') \equiv {} & B[2\mu A'+(\mu^2-Q\nu^2+P)B'+2\mu\nu QD'] \\ & + QD[2\nu A'-2\mu C'+(\mu^2+Q\nu^2+P)D'], \quad (\text{mod. } 4).\end{aligned}$$

Benutzt man hier noch die Congruenz (3), so folgt (mod. 2):

$$\begin{aligned}A''+\mu B''+\nu QD'' \equiv {} & \mu B(A'+\mu B'+\nu QD') \\ & + QD(\nu A'+\mu C'+PD'),\end{aligned}$$

und hier stehen zufolge (4) rechter Hand in beiden Klammern durch 2 theilbare Zahlen, so dass die erste Congruenz (4) auch für U'' gilt. Genau so zeigt man auch die Gültigkeit der zweiten Congruenz (4).

Vereinigen wir nunmehr alle, die Bedingungen (3), (4) erfüllenden Substitutionen U, V der Determinante 4 in die Gruppe $\Gamma'(K_n; P, Q)$, so lässt sich zeigen, *dass* $\Gamma(K_n; P, Q)$ *innerhalb* $\Gamma'(K_n; P, Q)$ *eine Untergruppe von endlichem Index ist.* Es genügt wieder, wenn wir dies von den beiden Gruppen der Substitutionen U allein zeigen, und wir nennen zu diesem Ende zwei Substitutionen U, U' der Gruppe Γ' modulo 4 einander congruent, wenn die Zahlen A', B', C', D' bez. mit A, B, C, D oder mit $-A$, $-B$, $-C$, $-D$ modulo 4 congruent sind. Da es nur 4^n modulo 4 incongruente ganze Zahlen in K_n giebt, so giebt es auch nur eine begrenzte Anzahl mod. 4 incongruenter Substitutionen der Γ'. Nun aber liefern jene beiden mod. 4 congruenten Substitutionen U, U' zufolge leichter Rechnung in $U'U^{-1}$ eine Substitution der ursprünglichen Gruppe $\Gamma(K_n; P, Q)$; die letztere besitzt somit in der That innerhalb Γ' einen endlichen Index.

Die arithmetischen Ueberlegungen des vorliegenden Paragraphen sind ganz unabhängig davon, ob die Bedingungen I bis III der eigentlichen Discontinuität erfüllt sind oder nicht. Aber aus dem eben festgestellten endlichen Index ist sogleich evident, *dass* $\Gamma'(K_n; P, Q)$ *stets eigentlich discontinuirlich ist, falls dies von* $\Gamma(K_n; P, Q)$ *gilt.* Endlich über die Gruppen Γ' noch die folgende Bemerkung: Es ist die Bedingung einer elliptischen Substitution U der Periode m und der Determinante 4 angegeben durch:

(5) $$A = e^{\frac{i\pi}{m}} + e^{-\frac{i\pi}{m}},$$

und dieses A ist eine ganze algebraische Zahl eines gewissen reellen Körpers vom Grade $\frac{1}{2}\varphi(m)$, welcher in der Kreistheilung m^{ten} bez. $2m^{\text{ten}}$ Grades auftritt, je nachdem m ungerade oder gerade ist. Während demnach innerhalb $\Gamma(K_n; P, Q)$ nur elliptische Substitutionen der Periode *zwei* anzutreffen waren, *können sich innerhalb* $\Gamma'(K_n; P, Q)$ *elliptische Substitutionen der beliebigen Periode* m *finden, falls jener Körper* $K_{\frac{1}{2}\varphi(m)}$ *in* K_n *enthalten ist.* Die in der Beschränkung auf die Periode zwei bestehende Besonderheit von Γ kommt also bei den Gruppen Γ' zum Fortfall. —

§ 10.

Bemerkung über Polyedergruppen.

Die wesentliche Grundlage aller vorangegangenen Ueberlegungen war die Annahme, K_n sei ein *reeller* Zahlkörper. Aber auch, wenn wir diese Voraussetzung fallen lassen, bleiben die gruppentheoretischen Ansätze des § 1 in Kraft; nur tritt dann auf's Neue die Frage nach den Bedingungen der eigentlichen Discontinuität ein. Nun bin ich schon vor einiger Zeit durch Hrn. Bianchi darauf aufmerksam gemacht, *dass man für* $n = 2$, *d. i. im Falle eines imaginären quadratischen Körpers unter allen Umständen, d. i. für jede Auswahl der ganzen Zahlen* P, Q *eigentlich discontinuirliche Polyedergruppen gewinnt.* Der Beweis liegt einfach in dem Umstande, dass die ganzen Zahlen eines *imaginären* quadratischen Körpers durch die Gitterpunkte einer Rechtecktheilung der complexen Ebene geliefert sind, und dass dieserhalb infinitesimale ganze Zahlen nicht vorkommen. Die einfache Folge ist, dass auch infinitesimale Substitutionen in der Gruppe nicht vorkommen.

Irgend ein näheres Eingehen auf die in Rede stehenden Gruppen würde hier zu weit führen; es mag nur noch die Bemerkung Platz finden, dass sich für $P = Q = 1$ diejenigen Gruppen einordnen, denen Hr. Bianchi in Bd. 40 der Annalen p. 332 ff. eine ausführliche Behandlung widmete.

§ 11.

Die erzeugenden Substitutionen der Gruppe der Dreiecksfunction $(2, 3, m)$.

Die Tragweite der entwickelten allgemeinen Ansätze soll hier wenigstens an einem einzelnen Beispiele aufgewiesen werden. Ich wähle zu diesem Ende die Gruppe des Kreisbogendreiecks von den drei Winkeln $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{m}$, die ich kurz als die Gruppe $(2, 3, m)$ bezeichne. Dabei soll die Zahl m der Ungleichung $m > 6$ genügen, da die fünf Fälle $m = 2, 3, \ldots, 6$ von elementarem Charakter sind.

Die Ecken des Kreisbogendreiecks $(2, 3, m)$ sollen in sofort verständlicher Zuordnung p_2, p_3, p_m heissen, und dementsprechend mögen die Seiten $(p_2, p_3) \ldots$ genannt werden. Das Ausgangsdreieck soll die reelle Axe zum Orthogonalkreise haben, und seine Ecke p_2 soll bei $\eta = i$ liegen; der Punkt p_m liege auf der imaginären η-Axe oberhalb $\eta = i$, p_3 dagegen auf dem Einheitskreise zur Linken von $\eta = i$. Die Seite (p_2, p_m) liegt somit auf der imaginären η-Axe, (p_2, p_3) aber auf dem Einheitskreise. Indem wir dem fraglichen Dreieck sein Spiegelbild längs der imaginären Axe anfügen, entstehe dasjenige Doppeldreieck, welches wir als Ausgangsraum für die Gruppe $(2, 3, m)$ wählen. Diese Gruppe wird sich demnach aus zwei Substitutionen S und T erzeugen lassen, die elliptisch von der Periode m bez. 2 sind; dabei möge S die Seite (p_m, p_3) in der Richtung wachsender Winkel um den Betrag $\frac{2\pi}{m}$ drehen.

Die Substitution T hat die bekannte Gestalt $\begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix}$. Die Substitution S setzen wir *unimodular* mit den Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ an und benutzen zuvörderst den Umstand, dass der Fixpunkt von S auf der imaginären Axe liegt, und zwar oberhalb $\eta = i$; folglich muss erstlich $\delta = \alpha$ sein, des ferneren müssen, wenn wir α positiv wählen, auch β und $-\gamma$ positiv sein, und endlich muss $\beta > -\gamma$ zutreffen. Man benutze weiter, dass die Substitution ST elliptisch von der Periode drei ist; dies liefert $\beta - \gamma = 1$. Mit Hülfe einer zwischen 0 und 1 liegenden reellen Constanten, die wir zum sofortigen Anschluss an frühere Bezeichnungen $\sqrt{P}$ nennen, setzen wir auf Grund der letzten Gleichung für β und γ die Ausdrücke:

$$\beta = \frac{1 + \sqrt{P}}{2}, \quad \gamma = \frac{-1 + \sqrt{P}}{2}$$

an, wodurch die sämmtlichen an β und γ gestellten Forderungen erfüllt werden. Die Zahl α berechnet sich nun aus:

$$\alpha^2 - \beta\gamma = \alpha^2 + \frac{1 - P}{4} = 1 \quad \text{zu} \quad \alpha = \frac{\sqrt{P + 3}}{2}.$$

Nun ist aber S von der Periode m; man hat also $\alpha = \cos \frac{\pi}{m}$.

Führen wir demgemäss die reelle ganze algebraische Zahl j durch

$$(1) \qquad j = e^{\frac{2i\pi}{m}} + e^{-\frac{2i\pi}{m}}$$

ein, so berechnet sich:

$$(2) \qquad 2\alpha = \sqrt{j + 2}, \quad P = j - 1.$$

Schreibt man endlich S als Substitution der Determinante 4, so gilt das Resultat: *Die Gruppe des Kreisbogendreiecks* $(2, 3, m)$ *lässt sich erzeugen aus den beiden Substitutionen:*

(3) $$S=\begin{pmatrix} \sqrt{j+2}, & 1+\sqrt{j-1} \\ -1+\sqrt{j-1}, & \sqrt{j+2} \end{pmatrix}, \quad T=\begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix},$$

wo j die in (1) *eingeführte Irrationalität ist.* Die für uns in Betracht kommenden j bilden eine discrete Reihe unendlich vieler Zahlen, die reell, >1 und ≤ 2 sind; sie haben bei $j=2$ eine Häufungsstelle, und der Grenzwerth $j=2$ liefert in $(2, 3, \infty)$ den Fall der Modulgruppe.

§ 12.

Subsumtion der Gruppe $(2, 3, m)$ unter den allgemeinen Ansatz $\Gamma'(K_n; P, Q)$. Die elf besonderen Fälle m.

Um die Gruppe des Kreisbogendreiecks $(2, 3, m)$ unter das allgemeine anfänglich entworfene Schema zu ordnen, schreiben wir die irreducibele Gleichung vom Grade $\frac{1}{2}\varphi(m)$:

(1) $$j^{\frac{1}{2}\varphi(m)} + a_1 j^{\frac{1}{2}\varphi(m)-1} + \cdots + a_{\frac{1}{2}\varphi(m)} = 0$$

an, welcher die ganze algebraische Zahl j genügt. Wir haben hier mit der bekannten *Resolvente der zweigliedrigen Perioden der irreducibelen Kreistheilungsgleichung vom m^{ten} Theilungsgrade* zu thun. Mit dem durch (1) definirten Abel'schen Zahlkörper $K_{\frac{1}{2}\varphi(m)}$ müssen wir sonach K_n identificiren und haben nach bekannten Sätzen in:

(2) $$\left[1, j, j^2, \ldots, j^{\frac{\varphi-2}{2}}\right]$$

eine Basis von kleinster Discriminante für die ganzen Zahlen des Körpers.

Ist nun zuvörderst m eine *ungerade* Zahl, so gilt:

$$\sqrt{j+2} = e^{\frac{\pi i}{m}} + e^{-\frac{\pi i}{m}} = -\left(e^{\frac{m+1}{2}\cdot\frac{2i\pi}{m}} + e^{-\frac{m+1}{2}\cdot\frac{2i\pi}{m}}\right),$$

und hier steht rechter Hand in der Klammer eine mit j conjugirte Zahl, die also nach den voraufgesandten Bemerkungen selbst wieder dem Körper K_n als ganze Zahl angehört; sie werde etwa A genannt. Indem wir übrigens die Bezeichnung $P=j-1$ wieder aufnehmen, ergeben sich für S und T die Formeln:

(3) $$S=\begin{pmatrix} A, & 1+\sqrt{P} \\ -1+\sqrt{P}, & A \end{pmatrix}, \quad T=\begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix}.$$

Hat man demgegenüber eine *gerade* Zahl m, so ist $\sqrt{j+2}$ innerhalb K_n noch nicht rational, und wir schreiben demnach $Q = j + 2$, so dass sich den Formeln (3) die folgenden anreihen:

$$(4) \qquad S = \begin{pmatrix} \sqrt{Q}, & 1+\sqrt{P} \\ -1+\sqrt{P}, & \sqrt{Q} \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix}.$$

Bei S liegt beide Male die Determinante 4 vor; es gilt also nach (3) § 9 für die beiden eben unterschiedenen Fälle ungerader und gerader m Lösungen μ, ν der Congruenz:

$$\mu^2 + Q\nu^2 \equiv P \pmod{4}$$

aufzustellen. Für ungerades m hat man $Q = 1$, $P = j - 1$ und findet dann in $\mu = 1$, $\nu = \sqrt{j+2}$ eine brauchbare Lösung; bei geradem m ist $Q = j + 2$, $P = j - 1$, und man hat die Lösung $\mu = \nu = 1$. Die allgemeinen Voraussetzungen für die (die Gruppe $\Gamma'(K_n;\, P, Q)$ bildenden) Substitutionen U, V der Determinante 4 specialisiren sich also hier wie folgt:

I. *für ungerades m*

$$K_n = \left[1, j, \ldots, j^{\frac{\varphi-2}{2}}\right], \quad P = j - 1, \quad Q = 1,$$
$$A \equiv B + \sqrt{j+2}\, D, \quad C \equiv \sqrt{j+2}\, B + D, \pmod{2};$$

II. *für gerades m*

$$K_n = \left[1, j, \ldots, j^{\frac{\varphi-2}{2}}\right], \quad P = j - 1, \quad Q = j + 2,$$
$$A \equiv B + jD, \quad C \equiv B + D, \pmod{2}.$$

Man stellt sofort fest, dass die unter (3) und (4) gegebenen Substitutionen den eben aufgestellten Congruenzen mod. 2 genügen; man wolle dabei nur beachten, dass in (4) beide Male eine Substitution V vorliegt.

Aus dem Bisherigen ergiebt sich, dass die Gruppe des Kreisbogendreiecks $(2, 3, m)$ in der durch die Angaben I bez. II specificirten Gruppe $\Gamma'(K_n;\, P, Q)$ sicher als Untergruppe enthalten ist. Es ist weiter zu untersuchen, ob die Untergruppe $(2, 3, m)$ vielleicht geradezu mit der Gesammtgruppe $\Gamma'(K_n;\, P, Q)$ identisch ist oder nicht. Damit der erstere Fall vorliegt, müssen wir vor allem die Forderung aufstellen, dass $\Gamma'(K_n;\, P, Q)$ eigentlich discontinuirlich ist, und dieser Gegenstand ist nun zunächst zu untersuchen.

Unter den in § 4 aufgestellten Bedingungen I, II und III der eigentlichen Discontinuität ist die erste hier stets erfüllt; denn wir haben durchweg mit reellen Abel'schen Körpern K_n zu thun. Auch

die Bedingung III macht keine Schwierigkeit; man hat in der That $Q = 1$ für ungerades m, während man bei geradem m beachten wolle, dass alle mit j conjugirten Zahlen dem absoluten Werthe nach kleiner als 2 sind.

Nun aber trifft es sich, dass die Bedingung II nur in einer sehr beschränkten Anzahl von Fällen m erfüllt ist. Wir müssen hier die $\frac{1}{2}\varphi(m)$ Zahlen:

$$P_{k-1} = 2\cos\frac{2k\pi}{m} - 1 \tag{5}$$

auf ihr Vorzeichen untersuchen, wobei k alle $\frac{1}{2}\varphi(m)$ gegen m primen Zahlen aus der Reihe:

$$k = 1, 2, 3, \cdots \frac{m-1}{2} \text{ bez. } \frac{m-2}{2}$$

zu durchlaufen hat; die Zahlen (5) müssen alsdann, abgesehen von der ersten unter ihnen $P_0 = P$, negativ sein, d. h. für alle in Betracht kommenden Werthe k muss:

$$\frac{2k\pi}{m} > \frac{2\pi}{6} \quad \text{oder} \quad m < 6k \tag{6}$$

sein, wenn wir nur wieder $k = 1$ ausschliessen. Man bezeichne nun die Primzahlen 1, 2, 3, 5, ... der Reihe nach durch $q_0, q_1, q_2, \cdots$ und nehme an, q_ν sei die kleinste in m nicht aufgehende Primzahl, so dass man schreiben kann:

$$m = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots q_{\nu-1} \,.\, m_0,$$

wo m_0 prim gegen q_ν ist. Weiter nehme man erstlich $q_\nu > 7$ an und bemerke, dass in diesem Falle $(5 \,.\, 7 \ldots q_{\nu-1} - 6)$ eine positive von 1 verschiedene Zahl vorstellt, die kleiner als $\frac{m-1}{2}$ ist und durch keine der Zahlen $2, 3, 5, \ldots, q_{\nu-1}$ getheilt werden kann. Es giebt also eine gewisse kleinste Primzahl q_ν, welche der Ungleichung:

$$5 \,.\, 7 \ldots q_{\nu-1} > q_\nu > q_{\nu-1}$$

genügt, und welche zugleich $< \frac{m-1}{2}$ ist, so dass $k = q_\nu$ der erste für k zu nehmende Zahlwerth ist. Dieser genügt dann der Ungleichung $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots q_{\nu-1} \,.\, m_0 > 6k$, d. h. es ist $m > 6k$, im Gegensatz zu der zu fordernden Bedingung (6). Bei dieser Sachlage hat man q_ν auf die vier Möglichkeiten 2, 3, 5, 7 einzuschränken und hat sonach folgende vier Ungleichungen:

$$m = 1 \,.\, m_0 < 12,$$
$$m = 1 \,.\, 2 \,.\, m_0 < 18,$$
$$m = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, m_0 < 30,$$
$$m = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, m_0 < 42,$$

wobei m_0 relativ prim zu 2 bez. 3, 5, 7 zu wählen ist. Die leichte Discussion dieser Bedingungen führt auf folgendes Resultat: *Die zu den unter* I *und* II *gemachten Angaben gehörenden Gruppen* $\Gamma'(K_n; P, Q)$ *sind eigentlich discontinuirlich nur in den elf Fällen:*

(7) $$m = 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 16, 18, 24, 30.$$

Nur in den hiermit bezeichneten elf Fällen haben wir die Frage aufzuwerfen, ob die Gruppe $(2, 3, m)$ mit $\Gamma'(K_n; P, Q)$ coincidirt oder in ihr eine Untergruppe eines von 1 verschiedenen Index ist. Es trifft hier nun der erste Fall zu, *d. h. die Gruppe des Kreisbogendreiecks* $(2, 3, m)$ *ist in den Fällen* (7) *als die zu den Angaben* I *bez.* II *gehörenden Gruppe* $\Gamma'(K_n; P, Q)$ *arithmetisch erschöpfend erklärt.* Ohne den Beweis dieser Behauptung in alle Einzelheiten zu verfolgen, was nicht ganz wenig Worte erfordern würde, sei es erlaubt, hier nur die Hauptgesichtspunkte des fraglichen Nachweises zu nennen. — Man stelle zunächst fest, welche elliptische Substitutionen in $\Gamma'(K_n; P, Q)$ vorkommen mögen. Dieselben müssen von endlicher Periode sein (wegen der eigentlichen Discontinuität von Γ'); und es können dieserhalb zufolge der Eigenart des Körpers K_n als Perioden nur $2, 3, m$ und Theiler von m auftreten. — Das System der Symmetriekreise der erweiterten Gruppe $\bar{\Gamma}'$ wird jedenfalls die Dreieckstheilung $(2, 3, m)$ in sich enthalten. Weitere Symmetriekreise können aber bei $\bar{\Gamma}'$ überhaupt nicht vorkommen; denn es ist leicht zur geometrischen Evidenz zu bringen, dass jeder neue zur reellen Axe orthogonale Kreis durch das Ausgangsdreieck $(2, 3, m)$ auf dessen Seiten elliptische Fixpunkte einer nicht vorkommenden Periode im Gefolge haben würde. — Gäbe es nun noch zwei bezüglich $\bar{\Gamma}'$ äquivalente Punkte im Ausgangsdreieck, so würde dieses Dreieck durch eine von der Identität verschiedene Substitution in sich transformirt, was sicher unmöglich ist. Die obige Behauptung ist demnach bestätigt. —

Endlich mögen noch die nachfolgenden Einzelangaben Platz finden: Quadratische Zahlkörper K_n liegen in den drei Fällen $m = 8, 10, 12$ vor; hier hat man bez. $j = \sqrt{2}$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\sqrt{3}$. Zu cubischen Körpern gehören die vier Fälle $m = 7, 9, 14, 18$, zu biquadratischen aber $m = 16, 24, 30$, und endlich haben wir bei $m = 11$ einen Körper fünften Grades. Die in § 6 mit W bezeichnete Substitution wird elliptisch für $m = 7$ und $m = 10$, und zwar weist sie in diesen Fällen die Periode 7 bez. 3 auf. Die zugehörigen Gruppen der unimodularen U, V führen dementsprechend auf Halbebenentheilungen in reguläre Siebenecke bez. halbreguläre Sechsecke, welche aus 63 bez. 15 Kreisbogendreiecken $(2, 3, m)$ zusammengesetzt sind. Eine ausführliche Behandlung der Siebeneckgruppe findet sich in Bd. 41 der Annalen pag. 443 ff.

Das Beispiel des Kreisbogendreiecks $(2, 3, m)$ hat auf's Neue den begrenzten Gültigkeitsbereich unseres gruppentheoretischen Ansatzes dargethan. Auch für alle von den elf besonderen Werthen (7) verschiedenen m zeigen die Substitutionen der Gruppe $(2, 3, m)$ den Typus der Substitutionen U, V der Gruppe Γ'; aber für alle diese m ist Γ' nicht mehr eigentlich discontinuirlich, und man hat demnach neue Bedingungen für die Substitutionscoefficienten A, B, C, D von Γ' aufzustellen, welche innerhalb Γ eigentlich discontinuirliche Untergruppen ausscheiden.

Man kann das hier vorliegende Sachverhältniss auch im Anschluss an die quadratischen Formen (1) § 5 bezeichnen. Die Theorie dieser Formen gestaltet sich analog der bekannten Gauss'schen Theorie nur im Falle des Zutreffens der Bedingungen I, II, III § 4. Hier entspringt nun, falls diese Bedingungen nicht mehr vollständig erfüllt sind, die Frage, *wie man den Begriff der Aequivalenz der Formen einzuschränken hat, damit die Theorie der Formen wieder die bekannte Gestalt annimmt.* Indessen habe ich diese Frage bislang noch in keinem Falle beantworten können.

Endlich dürfte es hier am Platze sein, eine Bemerkung über die Tragweite anzufügen, welche die entwickelten gruppentheoretischen Ansätze für sonstige Zwecke der Theorie der automorphen Functionen gewinnen mögen. Die unmittelbarste Verwendung der fraglichen Ansätze scheint im Gebiete der *Transformationstheorie* der automorphen Functionen zu liegen. In der That lässt sich diese Theorie, sobald man die Gruppen arithmetisch beherrscht, auf eine Theorie der Untergruppen systematisch basiren. Hier ist es nun, wo wir mit unseren Fragestellungen den unmittelbarsten Anschluss an die Idealtheorie der Körper n^{ten} Grades K_n nehmen können, und es bieten zumal die elf oft genannten Fälle der Dreiecksgruppen $(2, 3, m)$ interessante neue Ansätze, insofern man hier in einfachster Weise die Idealtheorie durch eine Theorie der höheren Congruenzen ableisten kann. Indessen muss die ausführliche Behandlung der hiermit formulirten Fragestellung einer gesonderten Arbeit vorbehalten bleiben. —

Braunschweig, im December 1892.

Bemerkung zur Theorie der regelmässigen Configurationen n_3.

Von

A. Schönflies in Göttingen.

In meiner in Bd. XXXI dieser Annalen enthaltenen Arbeit über die Cfg. n_3 habe ich am Schluss (S. 69) die Frage aufgeworfen, unter welchen Bedingungen die dort abgeleiteten Cf. erster und zweiter Art identisch sind. Diese Frage ist damals unerledigt geblieben und soll im Folgenden beantwortet werden.

Ich habe zu diesem Zweck zunächst ein Resultat richtig zu stellen, das, wie Herr Sturm mir mitgetheilt hat, fehlerhaft ist, und zwar deswegen, weil in der Herleitung von einer bestimmten Stelle an ein Summand aus Versehen weggeblieben ist. Es handelt sich um die Bedingung, unter der die Cfg. n_3 erster Art, deren Gruppe im Allgemeinen nur n Substitutionen enthält, $2n$ Substitutionen gestattet. Ich benutze hierzu die a. a. O. S. 62 mit $\mathfrak{T}$ bezeichnete Substitution, deren erster Cyklus

$$T = \{0_0 l_1' l_2'' \dots l_q^{(q)} (r - 1 + l^{(q)})_0 \dots\}$$

ist. Setzt man noch

$$r - 1 + l^{(q)} = \lambda,$$

so erhält er die übersichtlichere Form

$$T = \{0_0 l_1' l_2'' \dots l_q^{(q)} \lambda_0 (\lambda + l')_1 \dots (2\lambda)_0 (2\lambda + l_1') \dots\}.$$

Soll nun die Cfg. n_3 $2n$ Substitutionen zulassen, so gestattet sie (a. a. O. S. 63) auch eine Substitution $\mathfrak{U}$, die je zwei Punkte vertauscht, für die

$$h_i + k_i \equiv l^{(i)} \text{ mod. } p + 1,$$

und daraus folgt nun auf die a. a. O. angegebene Weise die Congruenz

$$(r + \lambda + l^{(i)})_i \equiv l_i^{(i)} \text{*)}$$

oder einfacher

$$2r + l^{(q+1)} \equiv 0 \text{ mod. } p + 1.$$

*) a. a. O. fehlt der Summand λ (S. 62), und daraus ist irrthümlich die Bedingung $r = 0$ gefolgert. In dem besonderen auf S. 67 betrachteten Fall ist jedoch $r = 0$ die richtige Bedingung.

Dies ist die Bedingung, unter der die bezüglichen Cfg. n_3 erster Art $2n$ Substitutionen enthalten.

Ich bemerke noch, dass für die Cfg. n_3 zweiter Art die analoge Bedingung

$$2r - l^{(q+1)} \equiv 0 \text{ mod. } p + 1$$

stets erfüllt ist; sie kann aus den definirenden Relationen

$$r + l \equiv rl \quad \text{und} \quad l^{q+1} \equiv -1$$

leicht abgeleitet werden. Dies stimmt auch damit überein, dass zu den Cfg. n_3 zweiter Art stets eine Gruppe von $2n$ Substitutionen, darunter eine Substitution $\mathfrak{U}$ von der Periode 2 gehört.

Soll nun eine Cfg. erster Art zugleich eine Cfg. zweiter Art sein, so muss sie $2n$ Substitutionen enthalten, d. h. es ist

$$2r + l^{(q+1)} \equiv 0;$$

ausserdem ist $q + 1$ ungerade (a. a. O. S. 69). Für die bezügliche Cfg. zweiter Art ist dann, wenn r' und l' die zugehörigen Zahlen sind,

$$l + l' \equiv 0, \quad l'^{q+1} \equiv -1, \quad 2r' - l'^{(q+1)} \equiv 0.$$

Aus den beiden Congruenzen für r und r' folgt

$$2(r - r') + l^{(q+1)} - l'^{(q+1)} \equiv 0,$$

d. h.

$$r' \equiv r - (l^2 + l^4 + \cdots + l^q).$$

Nun verificirt man leicht, dass die so bestimmten Werthe r' und l' die charakteristische Bedingung

$$r' + l' \equiv r'l'$$

befriedigen, und daraus folgt, dass *jede Cfg. erster Art mit $2n$ Substitutionen bei ungeradem $q + 1$ zugleich eine Cfg. zweiter Art ist.*

Umgekehrt lässt sich zeigen, dass *bei ungeradem $q + 1$ jede Cfg. zweiter Art als Cfg. erster Art betrachtet werden kann.* Für eine Cfg. zweiter Art bestehen die Congruenzen

$$l'^{q+1} \equiv -1, \quad r' + l' \equiv r'l', \quad 2r' - l'^{(q+1)} \equiv 0.$$

Soll diese Cfg. eine solche erster Art sein, so bestimmen sich l und r aus

$$l + l' \equiv 0, \quad r \equiv r' + l'^2 + l'^4 + \cdots + l'^q$$

und die so bestimmten Werthe l und r genügen wieder den charakteristischen Relationen

$$r(l - 1) \equiv 0 \quad \text{und} \quad 2r + l^{(q+1)} \equiv 0.$$

Beispiel. Für $p = 8$, $q = 2$, $l = 4$, $r = 3$ ist

$$2r + l^{(q+1)} \equiv -15,$$

die zugehörige Cfg. hat daher nur $n = 27$ Substitutionen. Dagegen liefern die Zahlen $p = 8$, $q = 2$, $l = 4$, $r = 6$ eine Cfg., für welche

$$2r + l^{(q+1)} \equiv 0$$

ist; die Cfg. ist daher gleichzeitig eine Cfg. zweiter Art, und zwar ist $l' = 5$, $r' = 8$. In der That erfüllen diese Zahlen die Bedingung $5 + 8 \equiv 5 \cdot 8 \bmod. 9$.

Schliesslich füge ich noch folgende Bemerkung an. Im Beginn meiner Arbeit habe ich (a. a. O. S. 44) die Cfg. danach eingetheilt, in wie viel Dreiecken jeder Configurationspunkt vorkommen kann. Es hat sich herausgestellt, dass es fünf allgemeine Classen dieser Art giebt, je nachdem die Zahl dieser Dreiecke 9, 6, 4, 3, 2 beträgt. Herr Sturm hat mich darauf aufmerksam gemacht, dass ich selbst eine specielle Cfg. mit 7 Dreiecken abgeleitet habe, nämlich die S. 58 betrachtete Cfg. 9_3. Die allgemeine Cfg. classe mit 6 Dreiecken besteht nämlich aus gewissen Cyklen von ein- und umschriebenen Polygonen; in dem besonderen Fall, dass ein Cyklus von drei Dreiecken vorliegt, ergiebt sich die genannte Cfg. mit 7 Dreiecken.

Ueber das Product zweier Determinanten.

Von

C. Weltzien in Berlin.

Betrachtet man zwei Systeme von je n^2 Grössen u_{ik}, v_{ik}, so lässt sich jede der Functionen

$$\text{I.} \quad \overline{M}_{gh} = \sum_i v_{gi} u_{ih} - \delta_{gh} \quad \left(g, h, i = 1, 2, \dots n, \quad \delta_{gh} = \begin{cases} 0 \text{ für } g \gtrless h \\ 1 \;\; ,, \;\; g = h \end{cases}\right)$$

des einen Gleichungssystems

$$\overline{M}_{gh} = 0$$

als ganze, lineare, homogene Function der Functionen

$$\text{II.} \quad M_{gh} = \sum_i u_{gi} v_{ih} - \delta_{gh}$$

des andern Systems

$$M_{gh} = 0$$

und zwar so darstellen, dass die Coefficienten ganze, ganzzahlige Functionen der $2n^2$ Variabeln u_{ik}, v_{ik} werden (cf. Kronecker: Kronecker's Journal CVII, 254 flgde.). Die hierauf bezüglichen Relationen sind von Kronecker aufgestellt und von Herrn Netto (Kronecker's Journal CVIII, 144 flgde.) vereinfacht worden. „Hierdurch ist die Aequivalenz der beiden Gleichungssysteme vollständig bewiesen und für den besonderen Fall der orthogonalen Systeme ($v_{gi} = u_{ig}$) auch diejenige befriedigendste Art der Darlegung gewonnen, welche Euler (Problema algebraicum ob affectiones prorsus singulares memorabile. Bd. I der Commentationes arithmeticae collectae) gewünscht zu haben scheint."

Wegen der grossen Bedeutung dieses Problems erlaube ich mir, n Relationen anderer Art zwischen den Functionen $\overline{M}_{gh}$ und M_{gh} anzugeben, welche von den erwähnten dadurch unterschieden sind, dass sie die Veränderlichen u_{ik}, v_{ik} nicht enthalten und von der Form

$$f(M_{gh}) = f(\overline{M}_{gh})$$

sind. Der einfacheren Schreibweise halber beschränke ich mich auf den Fall $n = 4$. Hier bestehen die 4 Formeln:

$$(1)\qquad M_{11} + M_{22} + M_{33} + M_{44} = \overline{M}_{11} + \overline{M}_{22} + \overline{M}_{33} + \overline{M}_{44}.$$

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} M_{11} & M_{13} \\ M_{31} & M_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} M_{11} & M_{14} \\ M_{41} & M_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} M_{22} & M_{23} \\ M_{32} & M_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} M_{22} & M_{24} \\ M_{42} & M_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} M_{33} & M_{34} \\ M_{43} & M_{44} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \overline{M}_{11} & \overline{M}_{12} \\ \overline{M}_{21} & \overline{M}_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overline{M}_{11} & \overline{M}_{13} \\ \overline{M}_{31} & \overline{M}_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overline{M}_{11} & \overline{M}_{14} \\ \overline{M}_{41} & \overline{M}_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overline{M}_{22} & \overline{M}_{23} \\ \overline{M}_{32} & \overline{M}_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overline{M}_{22} & \overline{M}_{24} \\ \overline{M}_{42} & \overline{M}_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overline{M}_{33} & \overline{M}_{34} \\ \overline{M}_{43} & \overline{M}_{44} \end{vmatrix}.$$

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{24} \\ M_{41} & M_{42} & M_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} M_{11} & M_{13} & M_{14} \\ M_{31} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{43} & M_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \overline{M}_{11} & \overline{M}_{12} & \overline{M}_{13} \\ \overline{M}_{21} & \overline{M}_{22} & \overline{M}_{23} \\ \overline{M}_{31} & \overline{M}_{32} & \overline{M}_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overline{M}_{11} & \overline{M}_{12} & \overline{M}_{14} \\ \overline{M}_{21} & \overline{M}_{22} & \overline{M}_{24} \\ \overline{M}_{41} & \overline{M}_{42} & \overline{M}_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overline{M}_{11} & \overline{M}_{13} & \overline{M}_{14} \\ \overline{M}_{31} & \overline{M}_{33} & \overline{M}_{34} \\ \overline{M}_{41} & \overline{M}_{43} & \overline{M}_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overline{M}_{22} & \overline{M}_{23} & \overline{M}_{24} \\ \overline{M}_{32} & \overline{M}_{33} & \overline{M}_{34} \\ \overline{M}_{42} & \overline{M}_{43} & \overline{M}_{44} \end{vmatrix}.$$

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overline{M}_{11} & \overline{M}_{12} & \overline{M}_{13} & \overline{M}_{14} \\ \overline{M}_{21} & \overline{M}_{22} & \overline{M}_{23} & \overline{M}_{24} \\ \overline{M}_{31} & \overline{M}_{32} & \overline{M}_{33} & \overline{M}_{34} \\ \overline{M}_{41} & \overline{M}_{42} & \overline{M}_{43} & \overline{M}_{44} \end{vmatrix}.$$

In diesen Formeln kann man, wie unmittelbar ersichtlich ist, überall M_{gh}, $\overline{M}_{gh}$ durch $M_{gh} + \delta_{gh}$, $\overline{M}_{gh} + \delta_{gh}$ ersetzen. Führt man dies aus, so stellen die beiden Seiten der Gleichung (4) das Product der aus den 4^2 Elementen u_{ig} gebildeten Determinante in die aus den 4^2 Elementen v_{gh} gebildete Determinante dar, woraus ihre Gleichheit hervorgeht. Von den übrigen Formeln ist die erste ohne Weiteres evident, während die 2[te] und 3[te] durch Zerlegung der Determinanten in

derselben Weise hergeleitet werden können, wie die entsprechenden für die orthogonalen Systeme ($v_{gi} = u_{ig}$), welche ich früher angegeben habe (Zur Theorie der homogenen, linearen Substitutionen. Programm der Friedrichs-Werder'schen Oberrealschule zu Berlin. Ostern 1886).

Bildet man zu $|u_{ik}|$, $|v_{ik}|$ $(i, k = 1, 2, 3, 4)$ die adjungirten Determinanten und aus deren Elementen U_{ik}, V_{ik} durch dieselbe Definition die Functionen $\overline{m}_{gh}$ und m_{gh}, so sind $\overline{m}_{gh} + \delta_{gh}$, $m_{gh} + \delta_{gh}$ die Elemente der zu $\overline{M}_{gh} + \delta_{gh}$, $M_{gh} + \delta_{gh}$ adjungirten Determinanten, und es bestehen zwischen ihnen gleichfalls die vier Relationen. Diese letzteren sind jedoch, wie aus bekannten Sätzen über adjungirte Determinanten folgt, eine unmittelbare Folge der früheren.

Allgemein gilt der Satz: Bildet man aus den $2n^2$ Elementen u_{ik}, v_{ik} die Determinanten $|u_{ik}|$, $|v_{ik}|$ $(i, k = 1, 2, \ldots n)$ die Functionen $\overline{M}_{gh}$, M_{hg} durch die Formeln I und II, so ist $|\overline{M}_{gh} + \delta_{gh}|$ gleich $|M_{gh} + \delta_{gh}|$ $(g, h = 1, 2, \ldots n)$; ebenso sind auch die Summen der diagonalen Subdeterminanten ν^{ter} Ordnung $(\nu = 1, 2, \ldots n-1)$ beider Determinanten einander gleich. — Bildet man ebenso aus den $2n^2$ Elementen U_{ik}, V_{ik} der den $|u_{ik}|$, $|v_{ik}|$ adjungirten Determinanten in derselben Weise die Functionen $\overline{m}_{gh}$, m_{gh}, so bestehen zwischen diesen dieselben n Gleichungen; ferner sind $|\overline{m}_{gh} + \delta_{gh}|$, $|m_{gh} + \delta_{gh}|$ die zu $|\overline{M}_{gh} + \delta_{gh}|$, $|M_{gh} + \delta_{gh}|$ adjungirten Determinanten.

Zehlendorf bei Berlin, im December 1892.

On Noether's fundamental theorem.

By

H. J. Baker in Cambridge.

In the Math. Annalen Bd. 6. Noether has stated and proved that if three algebraic plane curves F, Φ, Ψ be such that at every intersection $x = a$, $y = b$ of Φ and Ψ it be possible to find two infinite power series in $x - a$, $y - b$: A', B' so as to make $F = A'\Phi + B'\Psi$, up to any dimension in $x - a$, $y - b$, then there exist two algebraic curves K, M such that F is identically equal to $K\Phi + M\Psi$. In the Annalen Bd. 34, p. 447, Bertini has stated that such series A', B' can be found provided that for the intersection (say $x = 0 = y$) — where Φ has its lowest terms of order k and Ψ has its lowest terms of order l and β is a positive integer more precisely defined below — there exist two curves A, B (respectively of orders $l-2+\beta$, $k-2+\beta$) such that the lowest terms in $F_1 = F - (A\Phi + B\Psi)$ are of order $k + l - 1 + \beta$. In the Annalen Bd. 40, p. 143, at the conclusion of a new proof of his theorem, Noether has restated this result — referring to Bertini's note for the proof. The following proof of Bertini's result differs from Bertini's and is a development of Brill's note in the Annalen Bd. 39.

The proof of Lemma III is added in § 2 (an extension of Voss' proof of the 'simple case', Math. Annalen Bd. 27, p. 532).

Lemma I. At the intersection $x = 0 = y$ of the curves Φ, Ψ, where Φ has its lowest terms of order k, the term y^k occurring and Ψ has its lowest terms of order l, the term y^l occurring, it is possible to find two infinite power series $\varkappa$, λ, convergent in sufficiently near neigbourhood of $x=0=y$ and not vanishing for $x=0=y$, such that

$$\varkappa\Phi (= \varphi, \text{ say}) \text{ is equal to } y^k + y^{k-1}x \cdot a_1 + y^{k-2}x^2 \cdot a_2 + \cdots + x^k \cdot a_k$$
$$= (1, x a_1, x^2 a_2, \ldots x^k a_k \between y, 1)^k,$$
$$\lambda\Psi (= \psi, \text{ say}) \text{ is equal to } y^l + y^{l-1}x \cdot b_1 + y^{l-2}x^2 \cdot b_2 + \cdots + x^l \cdot b_l$$
$$= (1, x b_1, x^2 b_2, \ldots x^l b_l \between y, 1)^l,$$

where a_i, b_j denote ordinary (convergent) power series in x, not becoming infinite for $x = 0$ (Weierstrass, Abh. a. d. Functionentheorie p. 112).

Lemma II. If (for $r > p - 1$)

$$y^r + e_1 y^{r-1} + e_2 y^{r-2} + \cdots + e_r$$

be divided by

$$y^p + g_1 y^{p-1} + g_2 y^{p-2} + \cdots + g_p,$$

where e_i, g_j are ordinary power series in positive powers of x which vanish to the respective orders i, j, then the remainder will be of the form

$$x^{r-p+1}(c_0 y^{p-1} + c_2 y^{p-2}x + \cdots + c_{p-1}x^{p-1}),$$

where $c_0, \ldots c_{p-1}$ are power series in x not becoming infinite for $x = 0$. This is readily proved by 'induction'.

Lemma III. If

$$f = y^{k+l-1}c_0 + y^{k+l-2}xc_1 + \cdots + x^{k+l-1}c_{k+l-1},$$

where $c_0, c_1, \ldots$ are ordinary power series finite for $x = 0$, then the Sylvester y-resultant of φ, ψ [defined here as that determinant of $k + l$ rows whose first two rows are $1, xa_1, x^2a_2, \ldots x^k a_k, 0, \ldots$ and $0, 1, xa_1, x^2a_2, x^3a_3, \ldots$ respectively] divides identically by x^{kl}, and denoting it by $x^{kl}\Delta$ we have $\Delta f = P\varphi + Q\psi$ where P, Q are polynomials in y of orders $l - 1$, $k - 1$ respectively, the coefficients being functions of x not becoming infinite for $x = 0$ and Δ is an integral expression in the functions $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$.

§ 1.

Supposing then that $\Delta = x^\beta \Delta_1$, where Δ_1 does not become infinite for $x = 0$ (so that the intersection of Φ, Ψ at $x = 0 = y$ counts for $kl + \beta$ intersections) and supposing that in the curve

$$F_1 = F - (A\Phi + B\Psi)$$

the term $y^{k+l-1+\beta}$ actually occurs in the lowest terms (which as explained, are now supposed to be of order $k + l - 1 + \beta$) and 'reducing' F_1 as above, viz. writing

$$\mu F_1 = f_1 = (1, xd_1, x^2d_2, \ldots \between y, 1)^{k+l-1+\beta}$$

and dividing f_1 (in case $k + l - 1 + \beta > k + l - 1$ or $\beta > 0$) by $\varphi\psi$, we obtain by Lemma II

$$\begin{aligned}\mu F_1 = f_1 &= \varrho\varphi\psi + x^\beta(y^{k+l-1}c_0 + y^{k+l-2}xc_1 + \cdots + x^{k+l-1}c_{k+l-1}) \\ &= \varrho\varphi\psi + x^\beta f \text{ say}\end{aligned}$$

and thence by Lemma III

$$\mu F_1 = \varrho\varphi\psi + \frac{x^\beta}{\Delta}(P\varphi + Q\psi) = \varrho\varphi\psi + \frac{1}{\Delta_1}(P\varphi + Q\psi)$$

therefore

$$F = A\Phi + B\Psi + \frac{\varrho\varkappa\lambda}{\mu}\Phi\Psi + \frac{\varkappa P}{\mu\Delta_1}\Phi + \frac{\lambda Q}{\mu\Delta_1}\Psi$$

and this *is* of the form $A'\Phi + B'\Psi$: in fact we may take

$$A' = \frac{\varkappa P}{\mu\Delta_1} + A + \frac{\varrho\varkappa\lambda}{\mu}\Psi, \quad B' = \frac{\lambda Q}{\mu\Delta_1} + B.$$

(But these functions are only defined for sufficiently small values of x, y. The series $\varkappa$, λ con clearly become infinite for large values of x, y).

§ 2.

Proposition I. The determinant

$$\begin{vmatrix} p_0 & a_0 & a_1 e & a_2 e^2 & \dots & a_m e^m & & \\ p_1 & a_0^{(1)} & a_1^{(1)} e & a_2^{(1)} e^2 & & a_m^{(1)} e^m & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n-1} & & a_0^{(n-1)} & & & & a_m^{(n-1)} e^m & \\ q_0 & b_0 & b_1 e & b_2 e^2 & \dots & b_n e^n & & \\ q_1 & b_0^{(1)} & b_1^{(1)} e & \dots & & b_n^{(1)} e^n & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{m-1} & & b_0^{(m-1)} & \dots & & & b_n^{(m-1)} e^n & \\ k & c_0 & c_1 e & c_2 e^2 & \dots & & & c_{m+n-1} e^{m+n-1} \end{vmatrix}$$

is of the form

$$e^{mn}[k\nabla + p_0 P_0 + p_1 P_1 e + \cdots + p_{n-1} P_{n-1} e^{n-1} \\ + q_0 Q_0 + q_1 Q_1 e + \cdots + q_{m-1} Q_{m-1} e^{m-1}]$$

where $\nabla, P_0, \dots P_{n-1}, Q_0, \dots Q_{m-1}$

are rational integral expressions in

$$a_0 \dots a_m, \; a_0^{(1)} \dots a_m^{(1)} \dots b_0 b_1 \dots c_0 \dots c_{m+n-1}$$

and do not contain e. — To see this, write it in the form

$$Te^{-\frac{1}{2}n(n-1)-\frac{1}{2}m(m-1)}$$

where T differs from the original determinant only in the fact that its second row is multiplied by e, its third row by $e^2 \dots$, its $n\,th$ row by e^{n-1}, its $(n+2)\,th$ row by e, its $(n+3)\,th$ row by $e^2 \dots$, its $(n+m)\,th$ row by e^{m-1}. And denote the $(j+1)\,th$ element of the $i\,th$ row of T for $i < n+1$, by $A_{i,j}$, the $(j+1)\,th$ element of the $(n+i)\,th$ row, for $i < m+1$, by $A_{n+i,j}$ and the $(j+1)\,th$ element of the last row by $A_{n+m+1,j}$.

Then the general term in the expansion of T is

$$A_{1,j_1} A_{2,j_2} A_{3,j_3} \dots A_{n+m+1,j_{n+m+1}}$$

where $j_1, j_2, \dots j_{n+m+1}$ are in some order the numbers $0, 1, 2, \dots (n+m)$. And $A_{\lambda,j}$ has the factor e^{j-1} unless $j=0$, while for $j=0$

$$A_{\lambda,j} = p_{\lambda-1} e^{\lambda-1}, \text{ or } q_{i-1} e^{i-1}, \text{ or } k$$

according as

$$\lambda < n+1, \; \lambda = n+i \; (i < m+1) \quad \text{or} \quad \lambda = n+m+1.$$

Thus the general term of the expansion has the factor e^{μ} where

$$\mu = \sum(j-1) + \lambda, \quad \sum(j-1) + i, \quad \sum(j-1) + 1$$

in these three cases respectively. Hence

$$\mu = \tfrac{1}{2}(n+m)(n+m+1) - (n+m+1) + \nu$$

where $\nu = \lambda$ or i or 1 in these three cases,

$$= \tfrac{1}{2} n(n-1) + \tfrac{1}{2} m(m-1) + mn + \nu - 1.$$

Hence the general term in

$$Te^{-\frac{1}{2} n(n-1) - \frac{1}{2} m(m-1)}$$

is $\qquad p_{\lambda-1} P_{\lambda-1} e^{mn+\lambda-1}$ or $q_{i-1} Q_{i-1} e^{mn+i-1}$ or $k \nabla e^{mn}$

proving our theorem. [And we may say, $P_{\lambda-1}$ is isobaric in a, b, c together and of weight $mn + \lambda - 1$, etc.]

Proposition II. Returning to the notation of lemma III and writing for shortness $x = ey$, we have if Ω denote the y-resultant of φ, ψ

$$\Omega f = \begin{vmatrix} 0 & 1 & xa_1 & x^2a_2 \ldots x^ka_k & & \\ 0 & 0 & 1 & xa_1 & x^ka_k & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & x^ka_k \\ 0 & 1 & xb_1 & x^2b_2 \ldots x^lb_l & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & & & & & x^lb_l \\ f & c_0 & c_1x & c_2x^2 \ldots & & c_{k+l-1}x^{k+l-1} \end{vmatrix} + 1$$

by multiplying second column by y^{k+l-1}, third column by $y^{k+l-2}, \ldots$ last column by y^0, and subtracting from first column

$$\Omega f = \begin{vmatrix} -\varphi \cdot y^{l-1} & 1 & xa_1 & x^2a_2 \ldots \\ -\varphi \cdot y^{l-2} & 0 & 1 & xa_1 \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\psi \cdot y^{k-1} & 1 & xb_1 & x^2b_2 \ldots \\ -\psi \cdot y^{k-2} & 0 & 1 & xb_1 \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & c_0 & c_1x & c_2x^2 \ldots \end{vmatrix}$$

$$= x^{kl} \{ -\varphi [y^{l-1}P_0 + y^{l-2}xP_1 + \cdots + x^{l-1}P_{l-1}]$$
$$-\psi [y^{k-1}Q_0 + y^{k-2}xQ_1 + \cdots + x^{k-1}Q_{k-1}] \}$$

by Proposition I (viz putting therein $m = k$, $n = l$, $p_0 = -\varphi y^{l-1}$, $p_1 = -\varphi y^{l-2}, \cdots a_0 = a_0^{(1)} = 1$, $a_2^{(1)} = a_2$ etc.).

Thus $\Omega = x^{kl}\Delta$ where Δ is not infinite for $x = 0$ and

$$\Delta f = P\varphi + Q\psi,$$

which is lemma III and here

$$P = -(y^{l-1}P_0 + y^{l-2}xP_1 + \cdots + x^{l-1}P_{l-1}),$$
$$Q = -(y^{k-1}Q_0 + y^{k-2}xQ_1 + \cdots + x^{k-1}Q_{k-1})$$

where $P_0, P_1, \ldots$ are algebraic rational integral expressions in

$$a_1, a_2, \ldots b_1, b_2, \ldots c_0, c_1, c_2, \ldots.$$